

ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 43 卷第 2 期
二〇二二年十月
VOL. 43 NO. 2
October 2022

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

| | | |
|-----------|-----|-------------------|
| 主編 | 陳嘉皇 | 國立臺中教育大學數學教育學系 |
| 副主編 | 林原宏 | 國立臺中教育大學數學教育學系 |
| | 李源順 | 臺北市立大學數學系 |
| 編輯委員 | 林勇吉 | 國立清華大學數理教育研究所 |
| (依姓氏筆劃排序) | 林素微 | 國立臺南大學教育學系 |
| | 徐偉民 | 國立屏東大學教育學系 |
| | 秦爾聰 | 國立彰化師範大學科學教育研究所 |
| | 張淑怡 | 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 |
| | 張煥泉 | 苗栗縣頭份鎮信德國民小學 |
| | 許慧玉 | 國立清華大學數理教育研究所 |
| | 楊凱琳 | 國立臺灣師範大學數學系 |
| | 劉建成 | 桃園市平鎮區平鎮國民中學 |
| | 鄭章華 | 國立彰化師範大學科學教育研究所 |
| | 謝佳叡 | 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 |
| 國際編輯委員 | 林承瑤 | 美國南伊利諾大學課程與教學學系 |

| | |
|------|---|
| 地址 | 臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》 |
| 電話 | 886-2-7734-6576 |
| 傳真 | 886-2-2933-2342 |
| 電子郵件 | tjmtedit@gmail.com |
| 網址 | http://tame.tw/news/news.php?class=204 |

附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

主編的話

秋季是個令人歡欣喜悅的季節，除了天氣轉成舒適涼爽的感受外，自然界也進入採收儲存的時節，將豐腴美好的作物與萬物共享。本期刊登的論文內容，即是諸位作者長期孜孜恪恪耕耘，將其豐盛的果實提供給讀者的饗宴。

在 108 年教育改革下的數學教育裡，主張課程與教材應著重於探究式活動的研發與形成性評量的精進，本期提供的內容即是作者在此方面的貢獻。首先吳韶康等三位作者之「數學探究教學對國中學生數學理解之研究」一文，即探討運用探究教學對國中學生數學理解發展之影響，採取個案研究法的設計，讓研究對象把生活情境中發現的一非例行性問題，進行探究學習活動。研究結果發現探究教學增強學生應用知識的能力，提升理解力；探究教學發展學生問題表徵的能力，引發學生邏輯思維能力，並能培養創造力；探究教學透過師生共建，提升不同智力性學生的多元思考的能力。第二篇由吳宜洵與梁淑坤兩位作者以「鈕扣拼拼樂」遊戲為例融入國小五年級數學教學之研究，目的在研擬數學遊戲及探討學習改變，研究對象為五年級班級共 28 位學生，針對較為困難的單元進行遊戲教學。研究結果以「擴分、約分和通分」為例，以玩法改變、組員編排、教具改良、時間調整，讓遊戲教學進行更順利。透過量化資料及質性資料輔助了解班級學生在遊戲教學後數學學習成就、學習動機及學習自信心均有所提升。再者為有效評量的介紹，廖倩廷與林原宏之「五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究」，研究者透過開放性評量學習單與學生晤談紀錄進行資料蒐集與分析，以了解學生於因數與倍數單元之解題類型。研究發現實驗組的學習成效顯著優於控制組。學生於因數先備知識、因數、公因數與最大公因數、倍數先備知識、倍數、公倍數與最小公倍數呈現多種解題類型。教師省思使用開放性評量融入教學之題數不宜過多，易導致教學時間不足。建議未來使用開放性評量融入教學之研究，教師須營造尊重與包容之課室環境，促進師生與同儕對話。

另外，謝閻如提供之「國小數學素養評量一試題編製經驗談」一文，以我國現行的《十二年國民基本教育課程綱要》之「核心素養」為主軸，透過素養評量引導素養教學作為現行的策略。主張數學素養著重在個人應用數學能力，能將所學的數學知識呈現在解決生活問題中。有鑑於國小現職教師及師資生對於數學素養評量試題編製的疑問，本文提出 20 則數學素養試題做為參考，希望能帶給國小現職教師及師資生一些出題的靈感。最後，劉祥通與章勤瓊之「兩岸師資生解基準化問題的表現與分析」，主要是分析台灣師資生的解答類型分類與統計正確率，並與大陸師資生做對比。研究發現，

四個問題的正確率在 33.8%-55.9%之間，遠比大陸師資生答對率低(65.8%-88.6%)；正確解題類型有三種：設基準量為 X 、設基準量為 1、設特殊數值當基準量等；錯誤類型包括基準量指認錯誤、程序性知識與概念性知識不足以致未能克服解題障礙以及未發揮後設認知的監控能力以致解題失敗。最後在討論中解析 2 個簡潔的解題策略，並找出 4 個解題失敗的關鍵點。感謝這些學者提供之甜美果實，感恩在心，亦期盼所有讀者皆有所獲。

《臺灣數學教師》主編

陳嘉皇 謹誌

臺灣數學教師

第 43 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2022 年 10 月出刊

目錄

- 數學探究教學對國中學生數學理解之研究 1
／吳韶康、柳賢、洪振方
- 以「鈕扣拼拼樂」遊戲為例融入國小五年級數學教學之研究 15
／吳宜洵、梁淑坤
- 五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究 29
／廖倩廷、林原宏
- 國小數學素養評量－試題編製經驗談 57
／謝閨如
- 兩岸師資生解基準化問題的表現與分析 75
／劉祥通、章勤瓊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 43 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2022

CONTENTS

- A study of Mathematics inquiry-Based Teaching on Eighth Grade students' Mathematics Understanding 1
/ Shao-Kang Wu 、 Shian Leou 、 Jeng-Fung Hung
- A study on using Button Fighting game as an example to integrate mathematics games in fifth grade mathematics teaching 15
/ I-Hsun Wu 、 Shuk-kwan S. Leung
- Application of Open-ended Assessment on the Instruction of Factors and Multiples for Fifth Graders 29
/ Qian-Ting Liao 、 Yuan-Horng Lin
- Experience of Test Construction of Mathematics Literacy in Elementary School 57
/ Kai-ju Hsieh
- The Performance and Comparison of Problem-Solving on the Norming Problems from Pre-service Teachers of Taiwan and mainland China 75
/ Shiang-tung Liu 、 Qinqiong ZHANG

吳韶康、柳賢、洪振方（2022）。
數學探究教學對國中學生數學理解之研究。
臺灣數學教師，43（2），1-14。
doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0001

數學探究教學對國中學生數學理解之研究

吳韶康¹ 柳賢² 洪振方²

¹ 國立高雄師範大學 科學教育暨環境教育研究所

² 國立高雄師範大學

摘要

本研究旨在探討運用探究教學對國中學生數學理解發展之影響，採取個案研究法的設計，以屏東縣某國中八年級學生為研究對象，先提供一非例行性問題進行探究教學，之後，再篩選四位異質性學生，成立合作學習小組，利用課餘時間，讓研究對象把生活情境中發現的一非例行性問題，進行探究學習活動。研究者以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來蒐集資料，探討在探究學習活動中，學生面對非例行性問題的數學理解的表現情形及發展的影響。研究結果發現：一、探究教學增強學生應用知識的能力，提升理解力；二、探究教學發展學生問題表徵的能力；三、探究教學引發學生邏輯思維能力，並能培養創造力；四、探究教學透過師生共建，提升不同智力性學生的多元思考的能力。

關鍵字：非例行性問題、探究教學、數學理解

壹、緒論

一、研究動機

國內教育歷經「九年義務教育」、「九年一貫課程」到「十二年國教」的革新，強調有意義的學習，將學習態度、知識與能力緊密結合。因此，培養學生具備解決問題的能力和階層思維能力的發展，是近來教育執行者所重視的能力。引導式探究教學是以學生為中心，教師從學習的情境中引導學生發現問題，認清問題關鍵的所在，提出可能的假設，擬定可行的解決方案，選擇合適的策略，驗證假設並獲致結論，經由問題解決的過程，讓學生體會到探究的經驗，並在解題的過程中學習到技能，且培養他們主動積極及產生興趣的態度（楊秀停、王國華，2007；劉宏文、張惠博，2001；張靜儀，1995）。在數學探究學習的情境中，教師協助學生搭建真實世界與數學知識之間的橋樑，學生經由分析、推理、臆測、論證、反思等高層次思考的發展歷程來學習數學，主動建構知識，促進數學思維能力的提升。

國內外的文獻顯示數學探究教學法促進自主學習和深度理解（陳玟樺，2020），能降低學習焦慮，提升學習成效且學習保留效果良好，有助於建構正確數學概念，且對學習態度產生正向影響（葉秀玲、張國綱、徐偉民，2021；劉宏文、張惠博，2001；Chin, Lin, & Wang, 2009; Chase & Gibson, 2002; Tamir, Stavy & Ratner, 1998），增強學生之數學學習動機，有效率提升學生之後設認知能力（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2014；Chin, Lin, Chuang, & Tuan, 2007）。可見，瞭解數學探究與從事數學探究相關研究的重要性，已不言可喻。數學探究教學協助學生在真實世界與數學知識之間不斷地進行轉換，而生活情境所涉及的問題，不可能提供明確條件，當學生面對無法知道其解題路徑的非例行性問題時，需要設計適當的解題策略，因此，非例行性問題的解題表現可以提供研究者更多瞭解學生思維發展及展現探究能力的機會。目前國中數學教學學生也少有機會嘗試解非例行性問題，將知識整合轉化為生活能力，符合十二年國教強調的數學素養，體現數學在生活中的實用性。所以，本研究的探究學習活動設計以非例行性問題為探究主題，探討國中學生面對非例行性問題的數學理解的表現情形及發展的影響，提供教育工作者了解此項研究結果，提供教學規劃參考。

二、研究目的

基於上述動機，本研究目的如下：

- (一) 探討學生在探究學習活動中，對非例行性問題的數學理解表現情形
- (二) 探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響

貳、文獻探討

以往在數學教學上，教師常以單向講述灌輸知識，靠背誦記憶及反覆訓練，讓學生能以最快速度得到知識、也容易得到報酬，但成效短暫，而且發展有限；學生需理解新知識的背後意義，學到整體聯結的概念結構，形成一套完整的知識網絡，成效長遠，而且能全方位發展(skemp,1987/陳澤民，2018)。建構主義者也認為學生新概念的形，以原有的認知基模進行同化及調適的功能，來建構新的認知結構，不是被動的接受。在探究學習的情境中，學生用「數學家的態度」進行探索（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2014；Yerushalmy、Chazan & Gordon, 1990），讓學生主動去探尋問題、思考問題與解決問題。學生以自己所理解的方法解題，教師給予學生適當的鷹架，提升學生數學理解的層次，建立良好學習態度。鍾靜（2015）也指出，探究教學重視問題和情境的設計、概念的發展，適合於數學教室中實施，尤其當前對數學教學的觀點已從接受知識轉向探究知識。

有鑒於此，研究者先提供非例行性問題實施探究教學，之後，再讓研究對象把生活情境中發現的一非例行性問題進行探究學習活動。在探究學習的情境中，採用 Siegel、Borasi 與 Fonzi(1998)的四個階段數學探究教學，聚焦於發現和提出值得探究的問題，點燃學生的興趣，為第一階段的「準備與聚焦探究(setting the stage and focusing the inquiry)」；第二階段是「執行探究(carrying out the inquiry)」，引導學生進行分析、推理、臆測與論證等探究行為，經過討論獲致最後結果，為第三階段的「綜合和溝通(synthesizing and communicating)」；第四階段是「評估和延伸(taking stock and looking ahead)」，最後對探究結果的反思，再形成新的探究。

以教師為主的課堂上，在進度及時間的壓力下，教師習慣使用講述的方式教數學（李源順，2021），研究者的實務經驗也發現，這種方式讓學生能以最短時間得到知識，靠反覆練習也容易得到報酬，但是，略過探索的過程，缺少師生互動，容易造成學生的學習興趣低落、喪失對學習的思維能力，知識便無法順利遷移至生活情境中，而理解才是學生可以帶得走的能力。因此，本研究在探究學習的歷程中，依據 Pirie 與 Kieren (1992)的數學理解成長模型的觀點，採用「提取知識」、「製造心像」、「形成心像」、「覺察性質」、「形式化」、「觀察」、「結構化」和「創造發明」，分析學生面對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。非例行性問題的解題路徑具有不確定性，學生要以更靈活的方式，設計適當的解題策略，因此，非例行性問題的解題表現可以提供研究者更多瞭解學生思考的機會。當學生面對非例行性問題時，先「提取知識(Primitive Knowing)」，是理解的初始層次，將過去所學的知識運用到新的概念上；經由認知活動，發展出更高階的能力，是第二層次的「製造心像(Image Making)」，心像是數學解題過程中重要的輔助工具；第三層次的「形成心像(Image Having)」是不須透過操作，即能回顧並察覺所具備的心像；回顧前三個理解層次，以特定的性質檢驗心像，進行心像之間的區別(distinction)、組成(combination)、連結(connection)關係是第四層次的「覺察性質(Property Noticing)」；第五層次是「形式化(Formalizing)」，針對所注意的性質作有意

識的思考，抽取出共通性，將其心理的物件歸類(class-like)，形成群集；觀察個人形式化的過程，並組織和比較觀察的結果，是第六層次的「觀察(Observing)」；第七層次的「結構化(Structuring)」是能夠清楚正確解釋前一層次觀察結果，將基本假設及觀察的結果，建立邏輯化的關係；具備充足的結構化知識，能自由想像穿梭各層次間，創造新的問題和衍生新的概念為第八層次「創新發明(Inventing)」。Pirie 與 Kieren (1992) 的觀點是從建構主義出發，視數學理解的發展為一個組織知識結構的動態歷程，不是固定在一層層行動，學生在理解層次間以非線性「折回-前進(back-and-forth)」的形式移動（陳彥廷、柳賢，2009）。

參、研究方法

以文獻探討為理論，針對研究問題提出研究設計及流程，研究對象、研究工具與資料處理與分析等。

一、研究設計及流程

本研究採取個案研究法的設計，以屏東縣某國中八年級學生為研究對象，研究者先提供非例行性問題實施探究教學，採用 Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998)提出的四個階段數學探究進行教學。再篩選四位異質性學生，成立合作學習小組。利用課餘時間，再讓研究對象把生活情境中所發現的另一個非例行性問題進行探究學習活動。在探究學習的歷程中，依據 Pirie 與 Kieren 的數學理解成長模型為本研究探討國中學生在探究學習的情境脈絡下，對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來記錄教學事件，深入探索教學現場實際情形，提供資料分析的參考。

二、研究對象

選取八年級為研究對象，為了深入瞭解數學學習小組內的互動，有利於資料分析，選擇口語表達、語文能力較佳及有興趣的學生，成立學習小組，異質性組員是依據 Sternberg(1985)智力三元理論(triarchic theory of intelligence)區分為分析性智力(analytical intelligence)三位及實用性智力(practical intelligence)一位，該小組學生個性活潑，也專注於探究學習的活動。

三、研究工具

涉及之研究工具包括四個階段數學探究，以及分析學生數學理解層次發展之數學理解成長模型，和探究學習活動設計的非例行性問題。

(一) 四個階段數學探究及數學理解模型

探究是形成問題與解決問題的歷程，也是追求知識的歷程。在探究活動中，學生會有提出想法（提出問題或疑問）、進行試驗（分析、推理、提出臆測）、提出結論

（嘗試讓他相信自己的想法、依賴數學證據和論述去決定有效性）等機會，以便有效地促成學生理解與獲得知識，同時，也發展學生的思維。

本研究依據 Siegel 等人（1998）提出的四個階段數學探究進行探究學習，包括「準備與聚焦」、「執行」、「綜合和溝通」及「評估和延伸」。在探究學習的歷程中，採用 Pirie 與 Kieren(1992)提出「數學理解成長模型」的觀點，以「提取知識（Primitive Knowing）」、「製造心像（Image Making）」、「形成心像（Image Having）」、「覺察性質（Property Noticing）」、「形式化（Formalizing）」、「觀察（Observing）」、「結構化（Structuring）」和「創造發明（Inventing）」等八個理解層次為本研究探討國中學生在探究學習的情境脈絡下，對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。附錄 1 為任務 2 在數學探究學習活動下的數學理解層次操作性概念舉隅。

（二）探究學習活動設計的非例行性問題

研究者設計非例行性問題實施探究學習活動，把學生於課堂所學「數列」的知識整合轉化為生活能力，體現數學在生活中的實用性。初步完成設計後，研究者與三位協同研究者進行討論，確保學習活動之可靠性。

研究者先提供一非例行性問題（範例 1）實施探究學習，以小組合作共同探究水果的擺放方式及最底層的水果數量，整理後以紙本呈現成果，並上台分享，同時，師生能針對各組報告的結果進行提問及討論。

探究學習活動一的範例 1

我們常在路邊見到的水果攤，一車子的水果經過老闆的巧思擺放，是不是顯得與眾不同呢！今天由你來做主，發揮創意設計能吸引顧客的擺法！說明水果的擺放方式及最底層的水果數量。

利用資訊科技工具輔助教學，研究者提供學生使用網路資源，延伸課程的內容，之後，再提供一非例行性問題（範例 2）實施探究學習，由四位研究對象來解題，探究依據不同數量的水果，來決定底層水果的擺放數量，以紙本呈現成果。

探究學習活動一的範例 2

小儒暑假去鄉下爺爺家，幫忙賣百香果，他記得家裡附近的水果店，會把水果層層堆疊成亮眼的三角錐（圖示見附錄 2），小儒想挑戰這個任務，可是每天爺爺採收的百香果數量不同，小儒每天應該如何決定先擺放底層的百香果數量呢？

探究學習活動一結束後，範例 3 是由四位研究對象將校園生活情境中發現的另一非例行性問題，進行探究學習活動。

探究教學二的範例 3

下課時分，學生漫步在校園裡的石頭步道，懷著古代詩人「結廬在人境，而無車馬喧。」的意境，腦海中憶起兒時踩階梯的遊戲，隨著時光的推進已逐漸淡忘。為了重拾童年的美好，並使原本的遊戲增添創意及更多的趣味，於是學生決定來探究踩階梯的步數，為了增加一些限制條件以提高難度，在左右對稱的步道，規定左腳只能踩左邊的階梯，而右腳只能踩右邊的階梯，首先限制左腳恰走 1 步達到目標的話，則左腳能有幾種踩法？以此類推，左腳恰走 2 步達到目標呢？左腳恰走 3 步達到目標又會如何？附錄 3 為任務 2 的教學設計表。

將探究教學二的非例行性問題，分成五個任務。在五個任務中，左右兩排對稱的階梯數各為 i ，當左腳恰走 L 步達到目標，則左腳所有的走法數以數列來表示。茲將本研究五個任務的數學符號整理如下表 1。

表 1
五個任務的數學符號對照表

| | 任務 1 | 任務 2 | 任務 3 | 任務 4 | 任務 5 |
|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 左腳恰走 L 步達到目標 | $L=1$ | $L=2$ | $L=3$ | $L=4$ | $L=m$ |
| 左腳所有的走法數 | $\langle a_i \rangle$ | $\langle b_i \rangle$ | $\langle c_i \rangle$ | $\langle d_i \rangle$ | $\langle z_i \rangle$ |
| 左右兩排對稱的階梯數 | $1 \leq i \leq n$ | $2 \leq i \leq n$ | $3 \leq i \leq n$ | $4 \leq i \leq n$ | $m \leq i \leq n$ |

四、資料處理與分析

研究者實施探究教學時，以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來蒐集資料。研究者邀請協同研究者三位進行資料分析及比對。三位協同研究者皆為教育博士，具有豐富的教學研究經驗。在資料分析期間，當研究者完成分析後，隨即交由三位協同研究者重新審視，以判斷研究者論述與主張的合理性。若有意見相左之處，再共同進一步針對論點相左之處進行討論與議決，以達到意見一致，減少研究者主觀的偏誤，提升研究的信效度。

肆、研究結果與討論

在探究教學的情境中，分析學生在探究學習的歷程中，對非例行性問題的數學理解表現情形，並探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響。以下對研究結果進行討論：

一、探討學生在探究學習活動中，對非例行性問題的數學理解表現情形

在探究學習的情境脈絡下，學生聚焦於每個任務中左腳達到目標的步數，執行任務，研究者引導學生進行分析、推理、臆測與論證等探究行為，經過討論獲致任務 1~

任務 5 的結果分別為 $a_n = n$ 、 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$ 、 $c_n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ 、 $d_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ 、 $z_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(m-1)]}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m}$ ，最後都對每個任務的

探究結果進行反思，再形成下一個新的探究活動。而生活情境所涉及的非例行性問題，具有不明確的解題路徑，可以提供研究者更多瞭解學生思維發展及展現探究能力的機會。研究者採用 Pirie 與 Kieren(1992)提出的「數學理解成長模型」觀點，以「提取知識」、「製造心像」、「形成心像」、「覺察性質」、「形式化」、「觀察」、「結構化」和「創造發明」等八個理解層次，探討學生在探究學習活動歷程中，對非例行性問題的數學理解表現情形。

(一)、探究學習活動中，學生透過提取知識、製造心像，進而形成心像，搭建思考的鷹架，增進學生對概念的理解

探究學習活動中，學生執行任務時，提取過去所學等差級數和的知識，運算任務 2 經過組織形式化的數學式 $b_n = 1+2+3+\dots+(n-1)$ ，得到初步的結果 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$ ；同理，任務 3 和任務 4 分別提取連續兩整數乘積和與連續三整數乘積和的知識，運算數學式，得到初步的結果。

進行任務 2 的解題歷程中，學生將題意以具體圖像表徵進行分析時，發現所得答案不同，研究者引導他們對照彼此的做法，學生從圖像表徵裡找到錯誤的關鍵，原因在於未秩序地排列。下圖 1 是以 b_3 為範例來說明，當左右兩排對稱的階梯數各為 3，左腳恰走 2 步達到目標的限制下，則左腳能有幾種踩法？學生的解題步驟是先把左腳的第 1 步固定在第 1 階，剩下左腳 1 步及 2 階，則有 2 種走法（第 2 階踩左腳，第 3 階踩右腳及第 2 階踩右腳，第 3 階踩左腳）；接下來，再把第 1 步固定在第 2 階（第 1 階踩右腳），剩下左腳 1 步及 1 階，則有 1 種走法。學生透過製造心像，進而形成心像的過程，以圖像表徵將題意具體化，利於學生解題時進行分析及推理。探究學習的過程，並不是要求學生將知識背起來，而是逐步搭建思考的鷹架，增進對概念的理解。



圖 1 範例

(二)、探究學習活動中，學生覺察關係，發展出形式化歸類的的能力

任務 3 的探究過程中，延伸任務 2 解題的知識及經驗，卻無法直接由圖像表徵轉換成數學式來表示，當其中一位分析性智力組員從各走法總數中察覺到 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ 的聯結，便能運用 $c_4 = b_3 + c_3$ 的關係來表示 $c_4 = \frac{2 \times 3}{2} + 1$ 的數學式，同理

$c_5 = b_4 + c_4 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + 1, \dots$ ，以此類推。在探究學習活動中，學生從任務 1 可直觀 $a_n = n$ 、任務 2 由圖像表徵轉換成數學式來表示 $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ 、任務 3 是察覺出 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ 的聯結後，組織形式化的結果

$c_n = b_{n-1} + c_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} + \dots + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + 1$ ，任務 4 延伸前一個任務所得的知識及經驗得到

$$d_n = c_{n-1} + d_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} + \dots + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + \frac{3 \times 2 \times 1}{6}$$

，透過探究學習的歷程，給學生時間及機會去覺察其中的聯結，分析所察覺的關係，進一步思考所注意到的關聯，抽取出共通性，組織形式化的結果，發展出形式化歸類的的能力。

(三)、探究學習活動中，擁有結構性的理解，延伸創新

進行任務 3 的探究中，當組員觀察形式化的過程，臆測

$$c_n = \frac{n(n-1)}{2} + \dots + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + 1$$

，最後小組討論得到初步結果 $c_n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ ，使用數學上用來證明提出的論證是否正確的邏輯推論方法，驗證臆測結果是否正確，完成解題後，評估探究任務的過程，將前次任務的經驗和知識，延伸創造新的任務。

(四) 探究學習活動中，透過小組合作學習，師生共建知識

分析性智力三位組員分工合作，一組員較具創造力，能從生活情境中發現非例行性問題，策劃五個任務的策略進行探究；另一位組員洞察能力較佳，能察覺藏在非例行性問題中的聯結 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ ；再者，展現形式化歸類的的能力執行解題的組員，能提取連續三整數乘積和的知識，得到任務 4 的初步結果

$$d_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \dots + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + 1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

。對於實用性智力組員因數學概念上的不足，知識的連結力較弱，在師生及生生共建的境歷中學習，可增進對概念的理解，並加深概念及增廣經驗。於探究學習活動中，透過小組合作，為了完成共同的任務，彼此互相支援進行學習，師生共建知識。

二、探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響

(一) 探究學習增強學生應用知識的能力，提升理解力

探究教學的歷程中，學生提取知識能增進對概念的理解，進一步把這些概念運用在新的任務上，增強學生對所學知識的應用；學生根據題意製造心像，進而形成心像，通過圖像表徵，可為學生搭起思考的鷹架，來瞭解抽象知識的意義，提升理解力。

(二)、探究學習增進學生問題表徵能力的發展

一開始學生以圖像表徵將題意具體化，進一步覺察彼此的關聯，找出規律性，抽

取共同的性質，逐步以形式化歸類，循序漸進往高階理解層次邁進，賦予抽象化表徵的線索，增進學生問題表徵能力的發展，問題表徵在問題解決上提供解題的線索，可提升學生解題能力。

（三）探究學習引發學生邏輯思維能力，並能培養創造力

在探究學習情境下，學生學會通過分析、推理、臆測、論證及反思的過程，符合邏輯地建立它們之間的關係，促使學生思維結構層次不斷提升，發展邏輯思維能力，再延伸創造新的問題。

（四）探究學習透過師生共建，促進不同智力性學生多元思考的能力

分析性智力組員透過小組合作學習，在探究任務的表現，確定可以有效率地提取知識、形成心像、進行形式化歸類，到最後驗證所觀察的結果，並反思再延伸創造新的問題；實用性智力組員在師生共建及生生共建的學習氛圍下，表現積極挑戰的態度，透過討論分享及研究者適時的引導，搭建思考的鷹架，更接近解題的近側發展區。

伍、結論與建議

一、結論

在探究學習活動的過程中，學生先聚焦於非例行性問題中，分成五個任務進行探究。學生透過提取知識、製造心像，進而形成心像，通過圖像表徵，可為學生搭起思考的鷹架，提升理解力，增強學生對所學知識的應用；從解題的探索過程中，提供學生從覺察到形式化歸類，增進學生問題表徵能力的發展；到最後清楚正確解釋前一層次組織和比較所觀察的結果，進行臆測及驗證的過程，建立邏輯化的關係，解決實際問題。學習知識的歷程中能讓學生學會自己去思考與探究，研究者適時給予引導，促使學生思維結構層次不斷提升，發展邏輯思維能力，再延伸創造新問題的能力。

在探究教學運作下，使學生從被動的知識接受者，蛻變成主動的知識探究者，啟動學生的學習動力，透過小組合作學習，師生共建，促進不同智力性學生多元思考的能力，擴展認知範圍，展現邏輯思維能力，培養創造力，也學會溝通及討論的團隊精神，符合數學素養強調教育的價值與功能，讓學生具備終身學習的關鍵能力。

二、建議

本研究僅以四位國中學生為研究對象，其中三位是分析性智力學生，故研究結果無法推論至其他學生在探究學習歷程中的數學理解表現。又探究學習歷程中影響數學理解發展是否會因研究對象的年級、性別或研究主題而有所不同？未來可以增加樣本數、改變小組成員的組合方式或針對不同單元加以研究。

陸、參考文獻

- Chase, C., & Gibson, H. L. (2002). Longitudinal impact of inquiry-based science program on middle school students' attitudes toward science. *Science Education*, 86(5), 693-705.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., Chuang, C. W., & Tuan, H. L. (2007). The influence of inquiry-based mathematics teaching on 11th grade high achievers: Focusing on metacognition. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, 129-136). Seoul, Korea: PME.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., & Wang, Y. L. (2009). An investigation of the influence of implementing inquiry-based mathematics teaching on mathematics anxiety and problem solving process. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.5, 447). Thessaloniki, Greece: PME.
- Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E. (1992). Watching Sandy's understanding growth. *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 243-257.
- Richard R. Skemp. (2018). 數學學習心理學 (陳澤民譯)。臺北市：九章。(1987)
- Robert J. Sternberg & Louise Spear-Swerling (2004)。思考教學 (李弘善譯)。臺北市：遠流。(1996)
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.
- Tamir, P., Stavy, R., & Ratner, N. (1998). Teaching science by inquiry: assessment and learning. *Journal of Biological Education*, 33(1), 27-32.
- Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, 19, 219-245.
- 李源順(2021)。數學這樣教-國小數學感教育。台北市：五南。
- 林勇吉、秦爾聰、段曉林 (2014)。數學探究之意義初探與教學設計實例。臺灣數學教師，35(2)，1-18。
- 陳彥廷、柳賢 (2009)。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道的探討。科學教育學刊，17(1)，1-25。
- 陳玟樺 (2020)。芬蘭教師的數學探究教學模式設計：以「縮圖與比例尺」為例。課程研究，15(2)，69-97。
- 葉秀玲、徐偉民和張國綱 (2021)。數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響。臺灣數學教師，42(2)，56-83。
- 張靜儀 (1995)：自然科探究教學法。屏師科學教育，1，36-45。
- 楊秀停、王國華 (2007)。實施引導式探究教學對於國小學童學習成效之影響。科學教育學刊，15(4)，439-459。
- 劉宏文和張惠博 (2001)：高中學生進行開放式探究活動之個案研究 - 問題的形成與解決。科學教育學刊，9(2)，169-196。
- 鍾靜 (2015)。以探究教學提昇學童數學概念之深度和廣度。國民教育，55(1)，126-139。

附錄

附錄 1

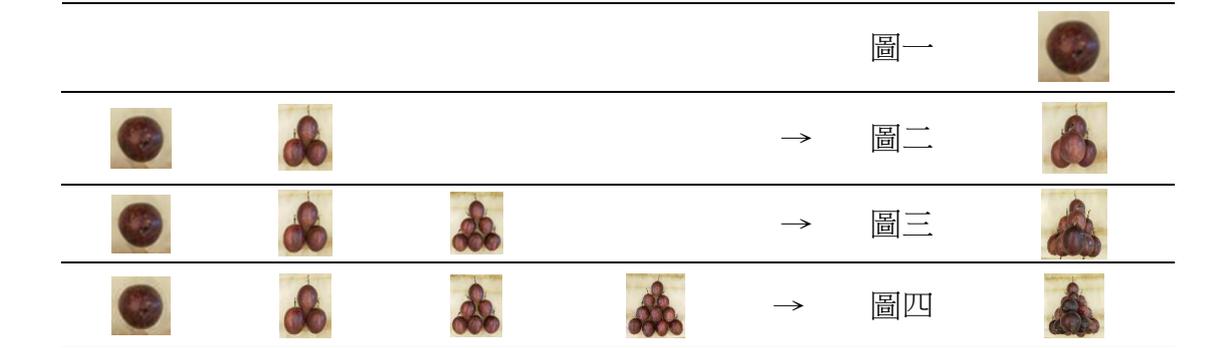
任務 2 在數學探究學習活動下的數學理解層次操作性概念舉隅

| 探究階段 | 探究學習活動下的數學理解層次 操作性概念舉隅 | 理解層次 |
|-------------|--|-------------|
| 準備與聚焦 | 學生將非例行性問題分成五個任務，在任務 2 中，學生聚焦於左腳恰走 2 步達到目標的限制，提取任務 1 所得到的「圖像化」的概念及經驗，準備先以具體圖像表徵的策略來進行解題。 | 提取知識 |
| 執行 | 首先設定左腳步數恰為 2 時，隨著階梯數為 2,3,4,5,6,...，按照階梯數秩序地排列步伐為概念。 | 製造心像 |
| | 將思維中的概念以具體圖像表徵呈現出來，將抽象問題具體化。 | 形成心像 |
| | 學生將題意以具體圖像表徵進行分析，學生察覺按照順序秩序地來找規律性，才能完整呈現所有的步數。以 b_4 為例，當階梯數 $n=4$ 時：首先將第 1 步踩在第 1 階，剩下的第 2 步有 3 種走法；依序將第 1 步換踩在第 2 階，剩下的第 2 步有 2 種走法；最後是把第 1 步踩在第 3 階，剩下第 2 步有 1 種走法。 | 覺察性質 |
| | 學生進行圖像表徵的分析及推理，進一步思考所注意到的關係，抽取出共通性，再轉化為數學式來表示，即 $b_2 = 1, b_3 = 2+1, b_4 = 3+2+1, b_5 = 4+3+2+1,$ $b_6 = 5+4+3+2+1, \dots$ | 形式化 |
| 綜合和溝通 | 隨著階梯數 n 的增加，學生比較及組織所觀察到左腳的總走法數，經由小組成員討論後，臆測 $b_n = b_{n-1} + (n-1)$ 且 $b_n = (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$. | 觀察 |
| 執行 綜合和溝通 | 學生檢視其圖像表徵，覺察出其中的聯結，轉換成數學式來表示： $b_2 = 1, b_3 = 1+2, b_4 = 1+2+3, b_5 = 1+2+3+4,$ $b_6 = 1+2+3+4+5, \dots$, 透過觀察去臆測 $b_n = 1+2+3+\dots+(n-1)$, 並提取等差數和的知識，運算出 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$, 再使用數學歸納法去驗證 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}, n \geq 2$, 證明可知猜測是正確的。 | 結構化 提取知識 |
| 評估與延伸 | 教師以「正向提問」及「整合提問」方法引導學生，將操作的具體圖像表示成數學式，察覺其中的規律性，學生分析及推理，並驗證臆測所得到的結果，最後反思任務 2 所得到的結果，學生再延伸新的探究任務 3. | 創造發明 |

附錄 2

範例 2 圖示

百香果堆疊方式如圖示



附錄 3

【範例3】任務2教學設計表

| 活動名稱 | 數列和級數 | 節數 | 3 |
|-----------|---|----|---|
| 核心素養 | A2 系統思考與解決問題 | | |
| 與領域素養 | 數-J-A2 能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。 | | |
| 學習表現 | n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。 n-IV-8 理解等差級數的求和公式，並能運用到日常生活的情境解決問題。 | | |
| 學習內容 | N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。 N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。 | | |
| 設計理念 | 1.融入校園環境裡踩階梯遊戲的情境，增進學習的興趣。 2.增加遊戲中一些限制條件，激發學生的創意，充分掌握數形關係。 3.運用探究學習活動，提升學生的理解能力。 | | |
| 數學素養的預期表現 | 一、透過觀察、操作、分析與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的信心與正向態度。 二、在探究學習活動中，表現學習的好奇心及觀察規律、執行、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。 三、在探究學習活動中，展現運用輔助工具於數學程序及解決問題的正确態度。 四、在探究學習活動中，表現運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。 | | |

(續下頁)

五、藉由校園裡踩階梯遊戲的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：「階梯有氧」運動、減肥法與地理-三級階梯等。

六、探究學習活動中，欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

| | |
|------|---|
| 學習歷程 | 在探究學習活動中，透過準備與聚焦，執行中的分析、推理及臆測，綜合和溝通，評估與延伸，認識數列、等差數列及等差級數。 |
| 評量方式 | 小組討論、觀察、資料蒐集、口頭報告、作業繳交 |

小組以具體圖像表徵的策略來進行解題時，分析性智力的兩位組員先發現他們所得答案不同，第三位分析性智力組員及實用性智力組員也不知道誰的答案是正確的。研究者引導他們對照不同答案的圖像表徵，一位分析性智力組員察覺錯誤的關鍵是無法列出所有的走法，也就是有些走法會被忽略掉，原因在於未秩序地排列。

學生迷思/教師診斷引導
 正確做法以下圖的 b_3 為範例來說明，當左右兩排對稱的階梯數各為3，左腳恰走2步達到目標的限制下，則左腳能有幾種踩法？學生的解題步驟是先把左腳的第1步固定在第1階，剩下左腳1步及2階，則有2種走法（第2階踩左腳，第3階踩右腳及第2階踩右腳，第3階踩左腳）；接下來，再把第1步固定在第2階（第1階踩右腳），剩下左腳1步及1階，則有1種走法。



| 教學活動 | 教學流程說明 | 時間 | 教學資源 |
|-------|---|----|-------------------------|
| 準備與聚焦 | 1.組員從校園生活情境中發現要探究的問題，分成五個任務。評估任務1的探究結果後，延伸到新的探究活動任務2。 2.小組討論後，準備提取任務1的概念及經驗，聚焦於左腳恰走2步達到目標的限制，先以具體圖像表徵的策略來進行解題。 | 10 | 格子紙 |
| 執行 | 1.組員們按照階梯數排列步伐，隨著階梯數增加2,3,4,5,6,...，以具體圖像表徵呈現出來。 2.組員們答案不同，教師以提問的方法引導學生，小組討論找出原因。 3.組員們進行分析及推理，將圖像表徵轉化為符號 | 90 | 格子紙 紀錄單 (續下頁) |

| | | | |
|---------------|----------------------------------|----|-----|
| 表徵。 | | | |
| 綜合 和 溝通 | 1.小組討論及溝通臆測一般式。 2.驗證臆測所得到的結果。 | 90 | 紀錄單 |
| 評估 與 延伸 | 反思任務2所得到的結果，再延伸新的探究任務3. | 10 | 紀錄單 |

吳宜洵、梁淑坤（2022）。

以「鈕扣拼拼樂」遊戲為例融入國小五年級數學教學之研究。

臺灣數學教師，43（2），15-28。

doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0002

以「鈕扣拼拼樂」遊戲為例融入國小五年級數學 教學之研究

吳宜洵¹ 梁淑坤¹

¹ 國立中山大學教育研究所

摘要

因應十二年國民基本教育「成就每一個孩子—適性揚才」的願景，同時在「國際數學與科學教育成就趨勢調查」公布顯示（TIMSS，2019），台灣學生面臨在數學的學習興趣、自信心低於國際平均，對數學學習動機不高的困境。而「遊戲」對大眾具有吸引力，因此研究者希望透過數學遊戲的編修，改善此困境。本研究的目的是（1）研擬數學遊戲及（2）探討學習改變，採課程設計及問卷調查法，研究對象為五年級班級共 28 位學生，針對較為困難的單元進行遊戲教學。資料蒐集包括：數學學習成就測驗、數學學習態度量表、回饋表、錄影帶。研究結果以「擴分、約分和通分」為例，依據饒見維（2002）提出的四項遊戲要點編擬數學遊戲：「鈕扣拼拼樂」修正面向包括：玩法改變、組員編排、教具改良、時間調整，讓遊戲教學進行更順利更依據饒見維（2002）要點。透過量化資料及質性資料輔助了解班級學生在遊戲教學後數學學習成就、學習動機及學習自信心均有所提升。最後，研究者對未來的教學及研究做出建議。

關鍵字：五年級數與量、數學遊戲編擬、學習成就、學習動機、學習自信心

壹、緒論

一、研究動機

十二年國民基本教育課程是以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景，結合「自發、互動、共好」的基本理念，希望在教育的過程中能夠兼顧每個孩子的個別需求，尊重差異，讓他們透過教育提升自己的求知欲以及創新的勇氣。同時根據「國際數學與科學教育成就趨勢調查」(TIMSS) 2019 最新結果公布顯示，台灣學生數學和科學的學習興趣和自信心低於國際平均，對於此學科的學習動機不高，認同感較為低落。因此研究者希望進一步探討透過遊戲教學提升學生學習自信心及學習成就，本研究由一位實務工作者擔任教學研究者之一，她常常遇到學生的學業成就差異性較大且學習動機普遍低落，尤其在數學領域更有此現象。班上經常有三分之一為學習扶助的學生，在數學的學習上更需要透過不同的教學模式來提升學生的學習動機，因此她與大學研究所教授，企圖顛覆傳統的講授式課程，用設計不同的教學，融入數學課程再評估學生學習成效。研究者們希望讓孩子能夠從小在建立數學觀念基礎時能快樂學習，而在過往經驗中，「遊戲」普遍對多數孩子來說較具有吸引力，故作者們透過遊戲教學研究，探討可否提升學生的學習動機及學習自信心，讓孩子在過程中找到學習的樂趣，進一步評估遊戲融入數學課程對學生的學習改變。

二、研究目的

研究主旨為探究遊戲融入國小數學之素養導向教學設計能否改變學生的學習。針對五年級上學期的課程中選定對學生來說較為乏味的單元來設計遊戲，探討可否提升學生在數學上的學習成就、動機及自信心。

依據上述，本研究的研究目的如下：

- (一) 探討如何研擬遊戲使之融入五年數學課程及編修方向為何。
- (二) 探討遊戲融入五年級數學課程能否改變學生的學習（成就、動機、自信）。

貳、文獻探討

一、遊戲教學及設計要點

饒見維曾說過：「人類天性愛玩，不管大人或小孩都一樣。如果能善用人類此種喜好遊戲的天性，引導到各科的教學與學習，必能增加學習的動機與樂趣。」(饒見維，1996)。國內學者饒見維(1996)提到遊戲導入教學應包含四個的要點：挑戰性、競賽性或合作性、機遇性或趣味性、教育性。

(一)**挑戰性**：設計遊戲時，必須依據學童能力來訂下任務的目標及達成的標準，難度隨學童能力調整，使其對遊戲具有期待感而產生挑戰性，若超過或低估其能力太多則易使學童失去興趣及信心。

(二)**競賽性或合作性**：人們在學習事務時若有與其對照的標準則容易產生好勝的心理而增進自我，因此在遊戲教學時加入競賽性可使其增加學習的動力，同時若以兩人以上競賽時，為了增加勝率也需與他人合作，進一步培養自己溝通表達、相互合作的技巧。

(三)**機遇性或趣味性**：遊戲無法預期最後的結果，過程中具有機遇性，因為除了實力外也需要運氣成分才有可能致勝，則會讓人對遊戲結果富有期待，而產生遊戲的樂趣，讓人人都有機會成為贏家並吸引更多人參與（廖育汝、魏士軒，2021）。

(四)**教育性**：遊戲教學之所以為教學，代表其具有教學的意義，因此需要賦予教育性，透過遊戲來學習面對現在及未來生活時所需具備的能力，例如：在數學領域上則需要具備演算、推理、思考、分析、解決問題等能力來運用數字作思考，否則就只是一般的趣味遊戲了。

因此一個好的遊戲教學需要具備以上幾點特色才是有意義的，若少了其中一項都會對此遊戲教學的效果產生折扣，當一個良好的遊戲少了教育性則淪為一般的趣味遊戲，在學習的成效則較小，相反的，若一個遊戲只剩下教育性，則學童可能很快就會對其失去興趣，而成為一般的教學活動（周士傑、梁淑坤，2007）。

二、國小高年級適用遊戲教學的教學過程

表 2-1 遊戲融入數學教學的應用

| 年級 | 期刊標題 | 單元類別 | 探討 |
|----|---|-------------------------------|----------------|
| 五 | ●趙翊君、梁淑坤（2017）。 團 體遊戲之研發及融入五年 級數學複習對學生學習之改 變。 | ●乘法和除法 ●因數和倍數 ●擴分、約分和通分 | ●學習成效 ●學習興趣 |
| 六 | ●梁淑坤、周士傑（2007）。 遊戲融入小學六年級數與計算 教學的設計及反思。 | ●異分母分數加減 ●整數四則運算 ●小數的加減 | ●學習成效 |

從上表可以發現，在國小高年級中，有許多單元可以融入遊戲，同時會發現融入

遊戲教學的單元類別中「數與量」較為多數，教師可能也會花較多的心思來設計課程。

參、研究方法

一、研究對象

以便利取樣採取研究者所任教的班級，為高雄市某國小五年級共 28 位學生，在學業方面，上安親班的學生人數大約二分之一，同時班上有三分之一為學習扶助學生，因此在課程設計上更需要配合不同程度的學生，同時學生較少有複習課業的習慣，多是完成功課內容就好，因此他們對於數學單元的內容熟悉度稍嫌不足。

二、教學進行方式及遊戲設計

(一) 教學進行方式

配合五上數學單元「擴分、約分和通分」，課本章節編排為第一節:擴分、第二節:約分，第三節:通分，當教師進行完課本內容的教學後可搭配此遊戲作為綜合練習，當學生理解概念後，課本內容多是基本的計算，對部分學生來說較為乏味，因此加入競賽的要素，並把擴分、約分兩者同時練習，讓學生增加練習次數，達到學習目標。

(二) 遊戲設計

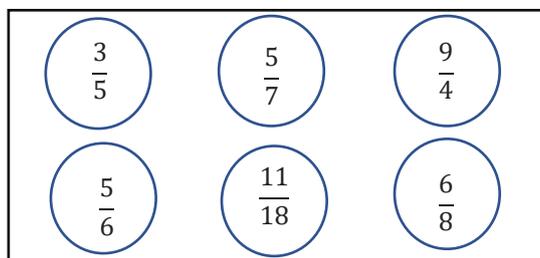
遊戲名稱：鈕扣拼拼樂（擴分、約分和通分）

遊戲目的：透過鈕扣拼湊的過程，讓學生練習擴分、約分將分數做通分，找到等值分數。

遊戲方式：五張小卡。每個學生會先拿到五張小卡，每張小卡上有六個圓圈，圓圈代表鈕扣。

1.開始出題：老師或學生出題，並將此六個分數填入第一張小卡的空格中，如圖。

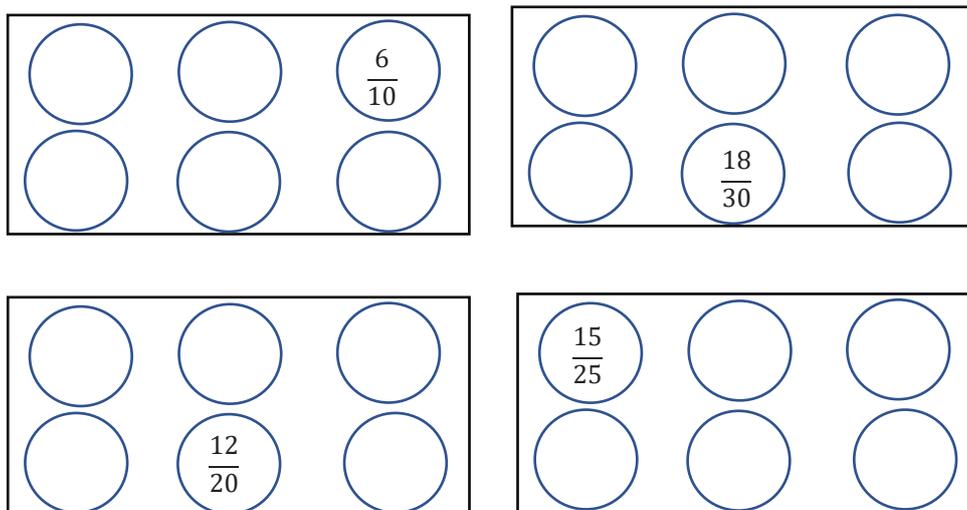
圖 3-1 分數填入小卡中



2.填空規則：請學生於另外四張小卡寫下此六個分數擴分或是約分後的等值分數到小卡

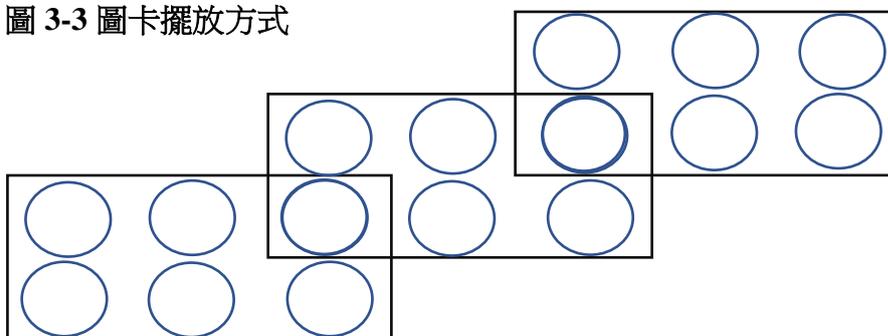
中的任何一個格子，以 $\frac{3}{5}$ 為例，如圖。

圖 3-2 寫出四個等值分數到另外四張小卡



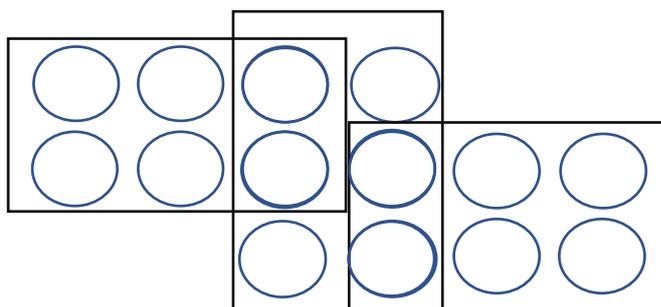
3.擺放規則：每張小卡中任意一個角落的鈕扣與另外一張小卡角落的鈕扣若是等值分數方可擺放，如圖。同時以猜拳決定學生出牌順序:順時針或逆時針，每位學生的出牌時間若超過 40 秒則必須放棄這個輪迴的出牌，直接換下一位學生出牌。(出牌時間教師可依照班上學生程度彈性調整)。

圖 3-3 圖卡擺放方式



4.決勝規則：每個人手上有五張小卡，若先把自己的手中的牌出完，該玩家即為獲勝者；若學生逐漸熟練，可以晉級到一次要扣兩個鈕扣，增加题目的挑戰性，如圖。

圖 3-4 進階玩法的擺放方式



5. 小組人數：約 4~6 人，若越多人則檯面上可以選擇的分數就會越多種。

三、研究工具

(一) 數學測驗卷（學習成就）

本研究的單元能力測驗卷單元是：「擴分、約分和通分」，包括：數學測驗卷前測及後測，了解學習前後的成效。測驗卷是以廠商提供的題庫光碟出題，題目經由班級導師及另外兩位國小教師進行審題，經過三位專家的建議修正後完成。

(二) 數學學習動機及自信心量表

本研究之數學學習動機及學習自信心量表是使用 Hsu (2003) 之數學學習態度問卷，該研究之目的是探討卷宗評量與紙筆測驗對學生數學概念、數學溝通能力及數學學習態度之相關。本研究取其中學習數學的自信心及學習動機兩面向。

數學學習態度量表之評分方式將由「非常不同意」、「不同意」、「同意」、「非常同意」依序給予 1 至 4 分，每一問卷中的題目均可表示出對數學科的正面亦或是反面的態度，所有題目的總分，代表著個人的數學學習態度，如果分數越高，表示其數學學習態度越積極。原問卷的內部一致性 alpha 信度考驗為.7659，效度是採用專家效度。本研究針對遊戲教學對個人的影響，僅採用學習數學的信心、數學學習的動機(內在動機、外在動機)兩個向度之間卷題目來做探討，每一個向度有兩題正向題、兩題反向題，共 12 題，來探討教學後對學生數學態度的改變。

(三) 數學遊戲回饋表及訪談

請學生分享玩遊戲時的感受，在過程中學習到那些東西，並將心情紀錄於回饋表中，同時分享遊戲中最喜歡及感到困難的地方在那裡？為什麼？此遊戲對自己的數學有沒有幫助？遊戲過程中的發現與收穫，並於遊戲後讓學生進行評比遊戲，包括：印象較深刻的是遊戲中的那部分？遊戲是否吸引你？對於知識上的學習是否有用？對於不清楚之處，用訪談了解。

(四) 教師觀察紀錄及札記

紀錄在遊戲過程中教師教學的感受、特殊事件及處理方式，並在活動結束後省思。

肆、研究結果

一、研擬數學遊戲及編修

(一) 遊戲設計要點

研究者依饒見維 (2002) 提出四項遊戲要點，包括：挑戰性、競賽性、趣味性及教

育性，檢核後發現在此遊戲中皆具備上述要點，如下表。

表 4-1 遊戲要點應用於遊戲中

| 挑戰性 | 競賽性 | 趣味性 | 教育性 |
|--|-------------------|---|--------------|
| 讓學生自行填寫等值分數，學生會依照自身的程度進行擴、約分，以 $3/5$ 為例，程度低組學生所填寫的分數可能是 $6/10$ ，程度高組學生則會以較大數字呈現，例如： $90/150$ ，在遊戲過程中不同程度的學生會與其程度相近者多出很多討論。 | 與同儕互相比賽，看誰的紙卡先出完。 | 原本只是單純的寫出等值分數，加入牌卡出牌後學生無法預期桌面上的牌為何，同時還必須在時間限制下尋找自己手中牌卡的等值分數，與同儕比賽增加學習的樂趣。 | 練習等值分數的轉換練習。 |

(二) 數學遊戲預試與修正

遊戲研擬後再進行預試，預試階段是由同校五年級的 4 位學生完成，採取立意取樣的方式選取，係班上學科表現能力前、中、後的學生，希望能藉此預試了解不同程度的學生在進行遊戲的狀況，再修正為正式版本。

此次預試時間為 40 分鐘，修正過程經由指導教授討論和再次試玩，遊戲經預試後，其編修內容共三方面：

1. 教具紙卡：圓圈數改少

原先設計的教具紙卡中每張小卡上有六個鈕扣圓圈，小卡中任意一個角落的鈕扣與另外一張小卡角落的鈕扣若是等值分數方可擺放，但此設計會讓中間的兩個鈕扣分數無法練習到，因此將小卡剪開，讓小卡上的鈕扣數量更改為三個，讓每一個鈕扣的分數都能練習，且有更多種拼法產生，增加遊戲的教育性及趣味性，如圖 4-1。

圖 4-1，小卡剪開後，圓圈數改少任何一個鈕扣只要是等值分數皆可擺放



續下頁



2. 出題方式：老師先出題

鈕扣拼拼樂開始出題時，每個學生會先拿到五張小卡，每張小卡上有六個圓圈，老師或學生出題，並將此六個分數填入第一張小卡的空格中，更改為老師先出題，並且各組派一位同學出來抽籤，選取小卡，每張小卡的分數都不同，可以增加遊戲的趣味性，同時當學生這一組分數練習完後還能與其他組交換其他小卡，多一次練習的機會。

3. 填空規則：設定範圍

請學生於另外四張小卡寫下此六個分數擴分或是約分後的等值分數到小卡中的任一格，若沒有對分數擴分後的分母作限制時，容易產生數字過於龐大的等值分數，而讓學生在遊戲中會花費較多的時間在計算，而失去練習的機會，因此在填寫等值分數時對於此分數給予一定範圍的限制。

表 4-2 鈕扣拼拼樂初版與修訂版對照表

| 初版 | 修訂版 | 修改原因 |
|------------------|------------------|--|
| 教具紙卡：每張小卡上有六個圓圈。 | 教具紙卡：每張小卡上有三個圓圈。 | 教具紙卡：小卡為六個圓圈時中間的分數無法利用，若更改為三個圓圈則會有更多種拼法，使遊戲更具有教育性及趣味性(饒見維，1996)。 |



| 初版 | 修訂版 | 修改原因 |
|--|---|--|
| 出題方式：老師或學生出題，並將此六個分數填入第一張小卡的空格中。 | 出題方式：老師先出題，將分數填入小卡空格中，各組有不同的題目。 | 出題方式：增加趣味性，各組拿到不一樣的分數小卡可以增加遊戲樂趣，且第一輪完成後各組可以交換。 |
| 填空規則：請學生於另外四張小卡寫下此六個分數擴分或是約分後的等值分數到小卡中的任一格，不用寫在相對應的位置。 | 填空規則：請學生於另外五張小卡寫下此六個分數擴分或是約分後的等值分數到小卡中的任一格，不用寫在相對應的位置，且分數的擴分或約分分母須為 200 以內的數。 | 填空規則：如果分數擴分後數字過於龐大則會讓學生在遊戲進行時花費較多的計算時間，為了讓遊戲的挑戰性符合學生程度，故增加此限制。(饒見維，1996)。(如下圖) |



二、實施遊戲教學後學生學習之轉變（成就、動機、自信）

（一）學習成就

研究者依學生進行搭配數學課程第四單元的遊戲鈕扣拼拼樂後的前後測試卷成績，用描述性統計比較平均值和標準差。

此遊戲透過鈕扣拼湊的過程，讓學生練習擴分、約分，將分數做通分找到等值分數，在敘述統計上，實施遊戲教學前後學生在此單元學習成就的表現分析結果，全班 28 位學生在第四單元學生學習成就前測試卷上，最高分為 100，最低分為 21，平均值 67.00，標準差 20.52。進行數學遊戲教學「鈕扣拼拼樂」遊戲後，後測最高分仍為 100 分，最

低分為 22 分，全班後測平均 73.43 分，全班分數幅度平均增加 6.43 分。成對樣本 T 檢定分析結果，可以得知前測及後測達顯著效果 ($p=.016$)。

表 4-3 總分敘述統計(第四單元)

| | 個數 | 最小值 | 最大值 | 平均值 | 標準差 |
|--------|----|-----|-----|-------|-------|
| 第四單元前測 | 28 | 21 | 100 | 67.00 | 20.52 |
| 第四單元後測 | 28 | 22 | 100 | 73.43 | 18.06 |

表 4-4 成對樣本 T 檢定(第四單元)

| 第四單元前測及後測 | 平均值 | 標準差 | 自由度 | 顯著性 |
|-----------|-------|-------|-----|-------|
| | -6.42 | 13.28 | 27 | .016* |

由統計分析可以得知，結合鈕扣拼拼樂遊戲中，班上學生在數學學習成就上有小幅度的進步，其中進步人數為 20 人，進步 5 分以上者共 11 人，其中編號 15 號為班上能力高組，因前測試卷作答多為空白，故其前測只有 21 分，該位學生表示當時作答較為懶散，因此寫題目時多空白，後測有認真作答，得 89 分，故其足足進步 68 分；退步人數為 8 人，皆為 5 分內的退步。

教師觀察札記發現，此單元擴分、約分和通分透過試卷得知大部分的學生多錯在分數比大小及應用題的大題，單純的等值分數填填看大題較少被扣分，其原因可能與學生對於題目內容的熟悉度以及閱讀理解有關係，而應用題的部分總共兩題，全班兩題在後測時皆答對者僅有 2 位。

(二) 學習動機

在敘述統計上，實施遊戲教學前後學生在學習動機表現分析結果，在實施遊戲教學前，全班 28 位學生在學習動機前後測問卷上，最高分皆為 32 分，最低分則是相差 1 分，前、後測最低分分別為 16 分及 17 分，全班整體平均值進步 1.61 分，前後測平均分別為 26.03 及 27.64。標準差前後測則是有所縮小差距，以四捨五入至小數第二位來看，前測為 4.15，後測為 3.4，縮小差距 0.75 分。

由 T 檢定可以得知，學生在透過數學遊戲式教學的學習後學生學習動機在前後測結果上達到顯著 ($.015^*$)，其中分數進步的人數為 15 人，退步人數為 10 人，維持原分數共三人。研究者從中發現，數學遊戲對於數學程度較為落後的學生來說，其學習動機的進步幅度較為明顯。

表 4-5 學習動機前後測總分敘述統計

| | 個數 | 最小值 | 最大值 | 平均值 | 標準差 |
|------------|----|-------|-------|-------|------|
| 學習動機 前測 | 28 | 16.00 | 32.00 | 26.03 | 4.14 |
| 學習動機 後測 | 28 | 17.00 | 32.00 | 27.64 | 3.39 |

表 4-6 學習動機成對樣本 T 檢定

| 學習動機問卷前平均值 | 標準差 | 自由度 | 顯著性 |
|------------|-------|-----|-------|
| 測及後測 | -1.60 | 27 | .015* |

同時從教師觀察札記資料中，也特別注意到班上兩位學習障礙及個性較為文靜、內向的學生，其在數學課程結合數學遊戲後對於學習的動機、自信心及學習成就等都有所提升，該位學障生在回饋表上表示：「只要努力就可以學會了!」、「學會數學會感到很開心」；另一位內向學生則表示：「透過遊戲可以增加跟同學的互動」，因為教師在組員的安排上除了找數學能力相當者以外，刻意安排較為溫暖、正向的同學與其一組，在遊戲中多一些鼓勵，增加其自信心，讓其學習動機有明顯地進步，體現十二年國教素養中「人際關係與團隊合作」的精神。在學生回饋表中，有學生表示：「這個遊戲讓他覺得這單元沒有這麼無聊了!」因為此單元較多著重於基本的運算成除法的能力，因此加入一些競賽性、趣味性的要素在遊戲中，可以增進學生們的學習興趣進而提高學習動機。

(三) 學習自信心

在敘述統計上，在實施遊戲教學前，全班 28 位學生在學習自信心前後測問卷上，最高分皆為 16 分，最低分則是相差 2 分，前、後測最低分分別為 7 分及 9 分，全班整體平均值進步 1.3929 分，前後測平均分別為 12.0 分及 13.3929 分，標準差前後測則是有所縮小差距，前測為 2.67，後測為 1.73，縮小差距 0.94 分。

表 4-7 學習自信心前後測總分敘述統計

| | 個數 | 最小值 | 最大值 | 平均值 | 標準差 |
|-------------|----|------|-------|-------|------|
| 學習自信心 前測 | 28 | 7.00 | 16.00 | 12.00 | 2.66 |
| 學習自信心 後測 | 28 | 9.00 | 16.00 | 13.39 | 1.72 |

由 T 考驗可以得知，學生在數學遊戲式教學後其學習自信心在前後測結果上達到顯著 (.009*)，其中分數進步的人數為 17 人，退步人數為 6 人，5 人則維持原分數，從中

發現進步較明顯的是編號 14、16、22、24 及 28，而這 5 位當中有 4 位在班上的能力分組屬於低組，因此發現低組的 8 位學生中，大部分的學生在學習自信心上都有進步，且 4 位有明顯多達 5 分以上的進步，另外 4 位扣除編號 11 為特殊生外在學習自信心上皆有所進步，因此根據量表所得的分數發現，對於學習低成就的孩子來說，遊戲式的學習對於他們的學習自信心有所提升，而從遊戲的過程中確實也可以得到驗證。

表 4-8 學習自信心成對樣本 T 檢定

| 學習自信心問卷平均值 | 標準差 | 自由度 | 顯著性 |
|------------|-------|-----|-------|
| 前測及後測 | -1.39 | 27 | .009* |

至於教師觀察方面，顯示印象很深刻的是在進行遊戲時，會依照學生的程度進行組別的分組，其中有一組學生中安排 2 位特殊生在其小組，而另外 1 位學生則是編號 14，其個性較為衝動，容易與其他同儕吵架，但同時也相當熱心，而在一連串遊戲的過程中發現此學生在遊戲中對於特殊生給予相當多的協助及等待，對他來說是一個展現的舞台，且特殊生對於該生的協助不會有所拒絕等言語出現，因此彼此間能有良好的互動關係，無形中除了特殊生可以得到幫助，對於該生來說他對自我的認同感、自信心都是一個正向的發展，該生遊戲結束後自己跑來跟老師說：「我剛剛幫 O 成很多的忙。」他在遊戲中得以發揮自己的所長，因此其在前後測的學習自信心量表上分數有明顯的進步，也讓這群孩子在遊戲中找到他們學習的樂趣及自信。

伍、討論與建議

本研究在探討透過遊戲教學融入國小五年級數學課程內容來提升學生數學的學習成就、學習動機及學習自信心，透過資料分析評估學生學習之轉變，同時藉由教師觀察紀錄及學生回饋讓遊戲教學更上層樓。

饒見維（1996）提出四項遊戲要點，包括：挑戰性、競賽性、趣味性及教育性，在數學單元的遊戲編擬過程中，首先思考要讓學生學到什麼？得到什麼收穫？再依據這四項原則來設計遊戲，而比重可視教學者所著重的教學面向來調整，若遊戲設計中包含以上要素，則可完成各單元的遊戲編擬。同時在開始遊戲後，教師需要了解學生在遊戲過程中的想法、感受，並進一步修正遊戲，如同本研究中經過預試所修正的面向包括：玩法改變、組員編排、改良教具、時間調整，經過這些調整後才使得遊戲的進行更為順利，如此透過遊戲要點來設計遊戲，並再開始執行後根據學生遊戲的過程來思考修正的面向，讓數學各個單元在設計遊戲時有一個依循的方向。

透過量化資料及質性資料輔助，包括：學生回饋表、訪談及教師觀察了解班級學生在遊戲中經由遊戲教學其學業成績表現皆有所提升，班級學生原先對於數學的學習動機

較為低落，同時自信心也較為不足，但自從研究者開始進行遊戲教學後的幾週，學生都會很期待的問教師：「這禮拜有要玩遊戲嗎？」除了從日常上課中感受到學生對於上數學課的期待，也讓數學課體現「玩中學」的概念，進一步透過學習動機及自信心量表得知低組學生在此分數上有明顯的進步，對於數學程度高組的學生來說其自主學習的能力及自律能力通常較佳，而有較好的學習成就表現，因此其學習動機及自信心本身就會較高，但對於低組學生來說透過遊戲教學依照學生程度進行分組，讓彼此程度相當者一起進行遊戲，互相學習，此研究結果與李直容（2016）相同，透過遊戲教學可以改變教室的學習氛圍，而學生對遊戲的喜愛程度也會影響他們的學習成就。體現十二年國教的核心素養「人際關係與團隊合作」。

未來遊戲設計可以擴大到其他年級、其他單元，讓內容多元化，其設計不同卻同樣提升學習，若將對象範圍擴大到其他不同年級的學生並設計課程遊戲，則能進一步了解遊戲教學在其他年級、其他單元的施行狀況，並在遊戲教學後了解學生在學習成就、學習動機及學習自信心的進步是否有所不同。另外，本研究進行遊戲教學所使用的教具皆為紙本、實體教具，隨著日新月異的科技發展，電子產品、網際網路越來越普及，未來教師在進行遊戲編擬時可以考慮如何使用電子產品來設計課程遊戲，以因應未來的趨勢，或針對實體教具及電子化 APP 對學生學習之影響是否有所不同來做進一步的研究，並讓遊戲設計結合生活，更可以不侷限於教室，實際運用在生活中，進而類化到更多場所，例如：園遊會、戶外教學等各種教室外的場所來進行遊戲，增加學生的類化經驗，同時也體現十二年國教的戶外教育教學之議題；最後，本遊戲主要是學完數學概念後的應用與練習，教師也可思考在配合單元內容上，如何用遊戲式的方式來學習數學概念，加深學生印象。

誌謝 感謝審查者提供寶貴意見、助理王軒眉小姐協助文書處理以及科技部經費上之補助（計畫編號：MOST 108-2410-H-110-026-MY2）。本文內容僅代表作者看法而非補助單位之立場。

參考文獻

- 吳宜洵（2022）。*遊戲融入國小五年級數學之素養導向教學設計對學生學習之評估*〔未出版之碩士論文〕。國立中山大學。
- 李直容（2016）。*遊戲融入國小五年級數與計算教學之行動研究中*〔未出版之碩士論文〕。國立中山大學。
- 周士傑、梁淑坤（2007）。*遊戲導入國小六年級數學教學設計與反思*。台灣數學教師電

子期刊, 11, 12-32。

張春興 (2013)。《教育心理學》。東華。

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學

學領域。https://www.k12ea.gov.tw/files/class_schema/課綱/12-數學/12-1/十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域.pdf

廖育汝、魏士軒 (2021)。《遊戲融入教學對國小數學學習興趣與成效之研究—國小一年級幾何課程》〔未出版之碩士論文〕。國立臺中教育大學。

趙翊君 (2016)。《團體遊戲之研發及融入五年級數學複習對學生學習之改變》〔未出版之碩士論文〕。國立中山大學。

饒見維 (1996)。《國小數學遊戲教學法》。五南。

Hsu, H.-Y. (2003). *An experimental study of the effects of portfolio assessment and paper-pencil test on mathematical concepts, mathematical communicating capability, and mathematical learning attitude*. Presented in the Joint Meeting of 24th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Hawaii, U.S.A.

廖倩廷、林原宏 (2022)。

五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究。

臺灣數學教師, 43 (2), 29-56。

doi: 10.6610/TJMT.202210_43(2).0003

五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究

廖倩廷¹

林原宏²

國立彰化師範大學科學教育研究所¹

國立臺中教育大學數學教育學系²

摘要

本研究旨在將開放性評量融入教學，探討五年級學童於因數與倍數單元之學習成效與解題類型。本研究採用準實驗研究設計中的「不等組前後測實驗設計」，研究對象為臺中市某國小五年級普通班學生，研究者對實驗組實施為期兩週之開放性評量融入因數與倍數單元之教學；控制組亦實施為期兩週之因數與倍數傳統評量之教學。研究者透過開放性評量學習單與學生晤談紀錄進行資料蒐集與分析，以了解學生於因數與倍數單元之解題類型。研究者以自編因數與倍數單元試卷進行後測，並以學童四年級上學期數學學期成績作為共變項，進行前測與後測之單因子共變數分析探討學習成效。研究發現實驗組的學習成效顯著優於控制組。學生於因數先備知識、因數、公因數與最大公因數、倍數先備知識、倍數、公倍數與最小公倍數呈現多種解題類型。教師省思使用開放性評量融入教學之題數不宜過多，易導致教學時間不足。建議未來使用開放性評量融入教學之研究，教師須營造尊重與包容之課室環境，促進師生與同儕對話。

關鍵詞：二階段評量、因數與倍數、開放性評量、建構反應題

壹、緒論

一、研究背景與動機

因數與倍數對學習者和教學者都是較感困難的單元，因數的定義和教材的語意抽象難以理解，無法透過具體實物直接說明，同時因數於生活中較為少見，對於剛升上五年級的學生來說，學習因數與倍數單元實屬不易（黃國勳、劉祥通，2003；Orhun, 2002）。此外 Dias(2005)指出不僅是國小學生，甚至是新進教師對於因數與倍數仍有辨識乘法關係的問題。學生於因數與倍數出現困難，不只是學生的問題，亦可能始於教師流於程序與記誦的教學模式(Triyani, Putri & Darmawijoyo, 2012)。

數學課室中，教師「教」學與學生「學」習是一種循環的歷程，評量扮演提供回饋的角色（林素微，2000），在課室中具有至關重要的地位。近年來開放性評量(open-ended assessment)成為當前評量的趨勢，允許問題有多種解決方法。開放性評量提供學童探求多種解題策略 (Wijaya, 2018)。透過開放性評量融入教學，能幫助教師了解學生的解題層次，以利教師補救和診斷概念；學生於評量中呈現的想法，亦可作為調整與修正教學之依據。而常見開放性評量種類許多，建構反應題(constructed-response item)與兩階段評量(two-tier assessment)符應開放性評量之精神。胡詩菁和鍾靜（2015）指出建構反應題能提供較多的學習訊息，促使教師做較佳的教學決定。兩階段評量兼具訪談的質性特色與量化的優點，可在短時間收集大量的學生想法與概念，因此本研究使用建構反應題與兩階段評量作為開放性評量融入教學之題型。

綜合上述所言，因數與倍數單元學習不易，然而課室中傳統評量較難看出學習歷程，而開放性評量掌握較多學習狀況並促進同儕交流與分享，因此本研究將開放性評量融入教學，期能了解學童於因數與倍數之學習成效與多元解題類型。

二、研究目的

根據前述的研究背景與動機論述，本研究目的如下：

- (一) 探討開放性評量融入五年級因數與倍數單元之學習成效。
- (二) 分析開放性評量融入五年級因數與倍數單元之解題類型。

貳、文獻探討

一、開放性評量意涵與相關研究

開放性評量(open-ended assessment)是近年來受重視的評量思潮，允許問題有多種解決方法。開放性評量重視解題者的自發性，從不同的方法獲得答案(Wijaya,

2018)。開放性評量有別於傳統的紙筆測驗（選擇式反應題），僅有一種答案或一種解題的方法，其重視不僅是答案，而是解題者的思考歷程。

透過開放性評量融入於教學，能幫助教師了解學生的解題層次，提供補救教學和診斷概念的機遇；學生於評量呈現的想法，可作為調整與修正教學之依據。同時開放性評量能引導學生發展高層次的數學解題思維(Klavir & Hershkovitz, 2014; AL-Absi, 2012)。當學生有多元的解題策略，更能引發課堂討論和促進同儕學習。

常見開放性評量題型種類許多，舉凡開放性問題或任務、數學寫作、數學步道……等，皆為開放性評量之題型，本研究選用建構反應題(constructed-response item)和二階段評量(two-tier assessment)符應開放性評量之精神，透過建構反應題能了解學生多元解題想法，藉由二階段評量進行數學概念診斷。

（一）建構反應題意涵與相關研究

「國民中小學九年一貫課程學習成就評量指標與方法手冊(林世華、盧雪梅、陳學志, 2004)」指出建構反應題(constructed-response items)是一種允許學生自由建構、組織和呈現想法的試題，給予學生組織和表達想法的自由，而答案由學生產生和提供，須人工閱卷計分，無法使用電腦閱卷。Tankersley(2007)指出建構反應題是一種開放性的紙筆測驗，要求學生運用知識技能和批判思維建構答案。建構反應題的開放特性，讓學生將思考過程加以組織，以呈現在試題上。在計分上建構式反應題須將解題類型分類，並以人工批改。選擇式反應題(selected-response items)無法看見解題歷程，要設計具有誘答力選項的選擇式反應題實屬不易，須對迷思概念有一定瞭解，若設計不佳將可能淪為答題的線索。因此建構式反應題允許學生對於題目的詮釋、組織和表達呈現出來，此一大優勢也是一般傳統選擇式反應題的限制。

相關研究指出以建構反應題作為教學的評量題目，能有效引導教師進行教學程序的調整，有利提升數學的學習與內涵（胡詩菁、鍾靜，2015）。研究者認為建構反應題不但可了解學生的數學概念和多元解題想法，教師亦可將此作為調整教學的參考，並針對不清楚的概念進行全班的討論與講解，達到有效教學。因此本研究透過建構反應題了解學生多元解題想法。

（二）兩階段評量意涵與相關研究

Treagust (2006)指出兩階段評量包含兩個階段的選擇題讓學生進行答題，在第一階段的答題中通常會有 2 到 4 個選項，而在第二階段常見有 4 個選項，學生須針對第一階段的回答，在第二階段找出可能的原因。第一階段的問題，評量現象的描述性知識，第二階段的問題為評量解釋性的知識(Tsai & Chou, 2002)。兩階段評量之實徵性研究在自然科學領域運用相當成功和廣泛，因為藉由兩階段評量能收集解題想法、回饋學習情形，並診斷概念和錯誤類型。當教師掌握學生的學習狀況，便能作為補救和調整教學之依據，對教學者和學習者皆是一大益處(劉子鍵、林怡均，2011；Bayrak, 2013)。在數學科領域，Hilton、Hilton、Dole 和 Goos(2013)利用兩階段評量診斷比例概念之研究指出，兩階段評量亦可作為前測

和後測評量，教師透過評量比較和追蹤學習情形。此外把兩階段評量作為課室活動，針對學生的答題，教師立即並適切回應能幫助學習。因此本研究藉由二階段評量進行數學概念診斷。

二、因數與倍數意涵與相關研究

依據在教育部 97 年「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」中。因數與倍數單元在第三學習階段（五年級和六年級）。黃培甄和葉啟村（2005）整理學童於因數與倍數單元之迷思有：使用關鍵字解因數與倍數的問題、找因數缺漏、缺乏因數與倍數概念和無法整合因數與倍數之關係。Rubenstein 和 Tompson (2002)指出因數與倍數的語言讓學生難以理解，學生常混淆因數與倍數。當學生學到最大公因數與最小公倍數時，更可能使用關鍵字解題(Kolitsch & Kolitsch, 2011)。此單元對於學習者而言較感困難，學童若於因數與倍數單元無法順利學習，將導致公因數、等值分數和後續分數計算……等諸多單元遇到瓶頸，可見因數與倍數教材地位之重。

綜合前述，研究者將開放性評量融入教學，以了解學生於因數與倍數之學習成效和多元解題類型。在本研究中，教學者亦根據研究歷程提出反思與建議。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採準實驗研究設計(Quasi-experimental Design)中的「不等組前後測實驗設計」，研究目的為探討不同評量方法（開放性評量和傳統評量）對不同班級（實驗組與控制組）數學學習成效之影響，期能對數學教育教學現場有所建議。

其中 x_1 為實驗組班級接受開放性評量融入因數與倍數單元之教學， x_2 為控制組班級接受因數與倍數單元傳統評量之教學，本研究所指傳統評量教學是以教科書佈題為評量之教學。教學前兩班皆以四年級數學學期評量成績作為共變項(o_1 、 o_2)，教學實驗後皆以自編因數與倍數單元後測作為後測成績(o_3 、 o_4)。本實驗設計模式如表 1：

表 1
實驗設計模式

| 組別 | 共變項 | 實驗處理 | 後測 |
|-----|-------|-------|-------|
| 實驗組 | o_1 | X_1 | o_3 |
| 對照組 | o_2 | X_2 | o_4 |

本研究控制變項會以學童四年級數學學期評量成績作為共變項（前測）。自變項為不同的評量方法於五年級因數與倍數單元之實施：實驗組班級融入開放性

評量、對照組班級以課本做做看和動動腦為評量。依變項為學童於因數與倍數單元之學習成效。圖 1 為研究架構。

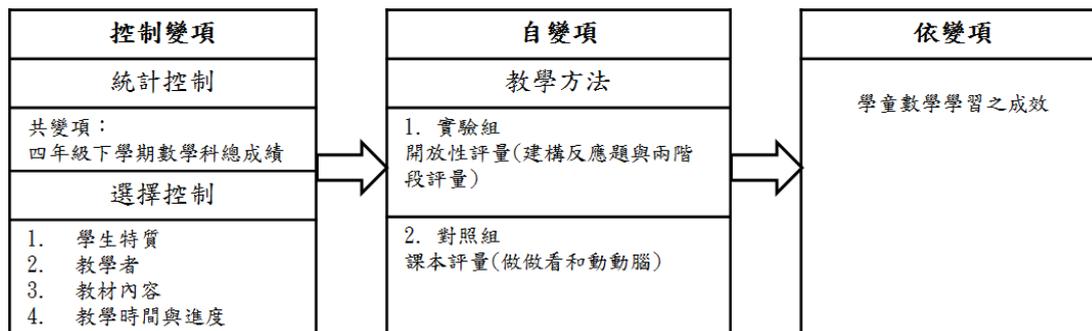


圖 1 研究架構

二、研究對象

研究參與者為五年級學生。實驗組男生 8 人，女生 6 人；控制組男生 6 人，女生 7 人。

三、研究工具

(一) 開放性評量學習單

研究者會將建構反應題與兩階段評量以開放性評量學習單(魔數時間)的形式作為課堂評量。使用時機依題目題型分為課本佈題前(參圖 2)、課本佈題後(參圖 3)和取代課本佈題(參圖 4)。

開放性評量學習單(分別為附錄一中的任務 1-1 到任務 6-1)將於本單元的 6 個活動進行(整除、因數、公因數與最大公因數、倍數、公倍數與最小公倍數和 2、3、5、10 的倍數,共 8 堂課),教師針對學生於開放性評量學習單出現的多元解題歷程作類型分析,在課堂中補強與澄清學生概念;另外學生的多元解題想法於課堂中與全班一同討論,可促進思考與溝通表達。附錄一為開放性評量試題內容與說明。

(二) 自編因數與倍數單元試卷

研究者根據因數與倍數之學習表現與內容建立雙向細目表以編製試題,題目設計後與數學教育專家、相關經驗教師和誼友教師共同檢視因數與倍數試卷,以確保試題具有代表性並經由專家共同分析和修訂,使試題具有內容效度。(參見附錄三)

(三) 晤談記錄

研究者針對實驗組全班於開放性評量學習單呈現之多元解題想法等處,於每堂課後(共 8 堂課)進行晤談,過程中錄音並於晤談後轉譯成逐字稿,作為補足學生於開放性評量學習單呈現不清之用。

四、教學與評量規劃

(一) 實驗組教學與評量之流程

課堂融入開放性評量學習單有三個時機，第一為教師於全班進行因數與倍數單元之重要概念的教學前（圖 2）；第二為進行因數與倍數單元之重要概念的教學後（圖 3）和第三取代課本因數與倍數佈題（圖 4）。以下分別說明融入開放性評量學習單之教學與評量規劃：

1. 開放性評量置於課本佈題前

教師教導課本佈題前（學習單置於課本重要概念的教學前），請學生個別完成學習單，並於學生作答時行間巡視，將學生的解題表現分類，挑選具代表性的解題歷程，投影至智慧黑板。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此時教師可隨時掌握學生的學習狀況，診斷學生先備知識。針對理解本題概念的學童進行因數與倍數新概念之教學；針對不理解本題概念的同學則進行先備知識的補強。

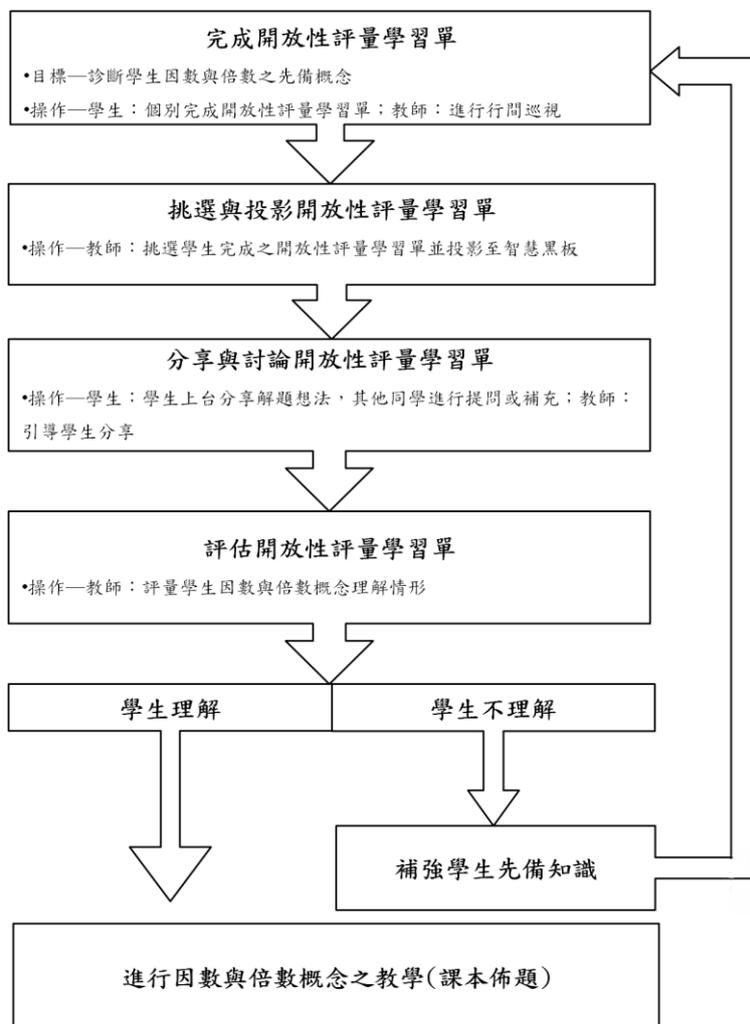


圖 2 實驗組教學與評量之流程（開放性評量置於課本佈題前）

2. 開放性評量置於課本佈題後

教師教完課本佈題後（學習單置於課本重要概念的教學後），請學生個別完成學習單，並於學生作答時行間巡視，以利將學生的解題表現分類，挑選具代表性的解題歷程，投影至智慧黑板。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此時教師可隨時掌握與觀察學生的學習情形，評估學童理解或不理解新概念。針對不理解的學生，加強概念的澄清後，再進行下一個概念的教學。

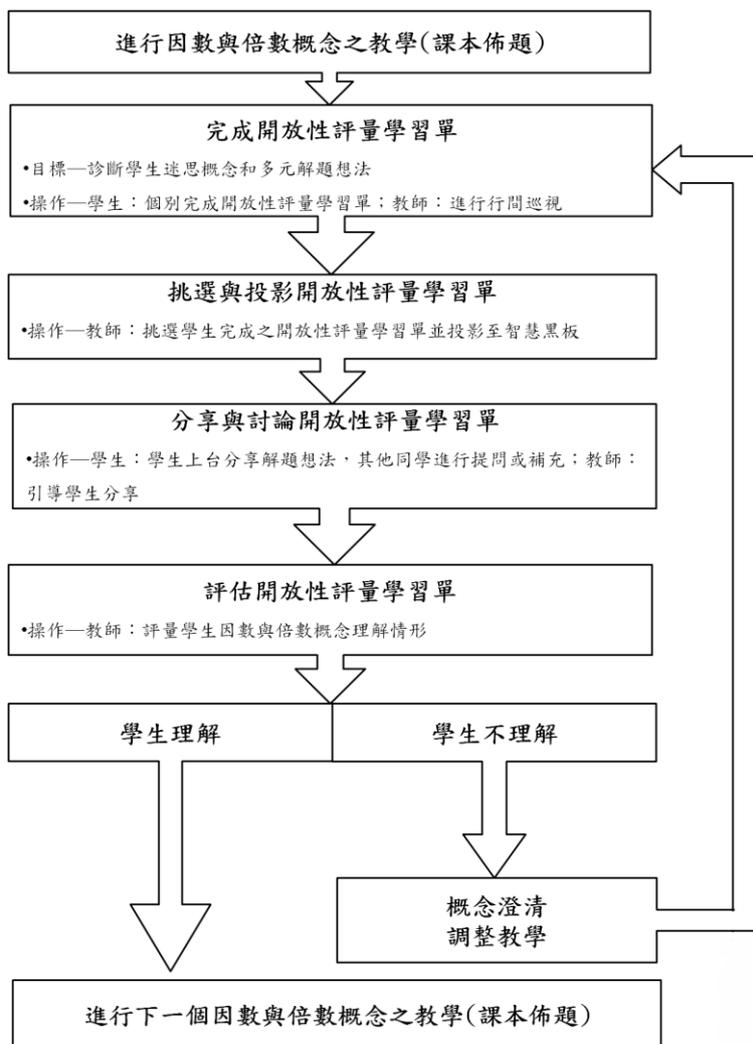


圖 3 實驗組教學與評量之流程（開放性評量置於課本佈題後）

3. 開放性評量取代課本佈題

當課本佈題與開放性評量之概念相似，以開放性評量取代之，避免教導重複。請學生個別完成學習單，同時教師行間巡視，挑選代表性解法於課堂分享。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此階段教師透過開放性評量學習單傳達重要概念。針對不理解本題概念的同學進行概念的澄清；針對理解本題概念的同學進行下一個因數與倍數概念之教學。

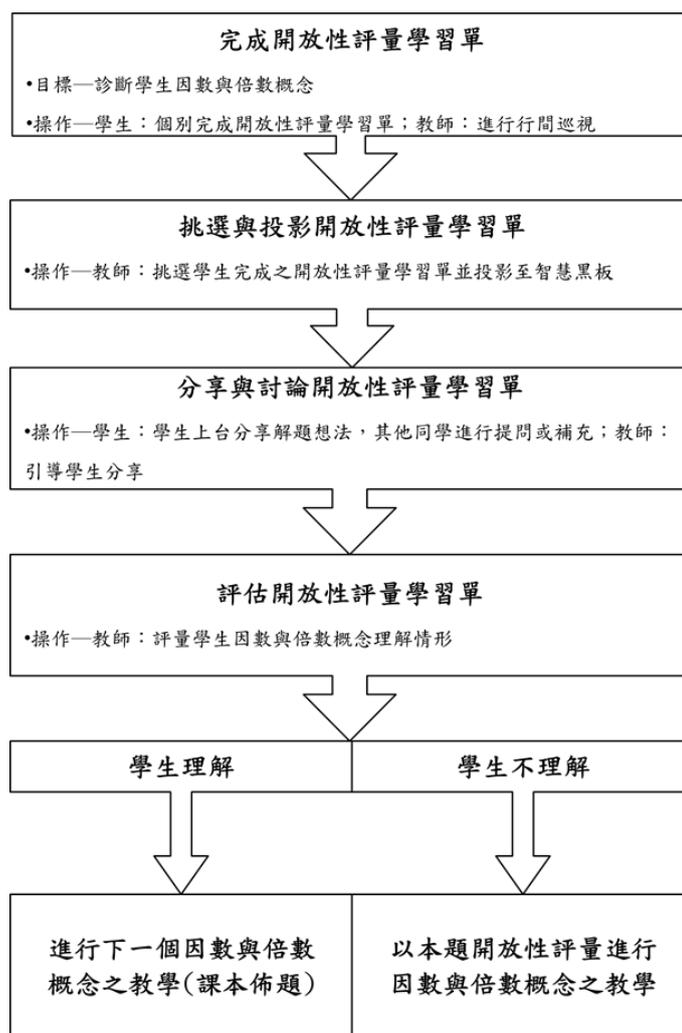


圖 4 實驗組教學與評量之流程(開放性評量取代課本佈題)

(二) 控制組教學與評量之流程

教師先於全班進行因數與倍數單元之重要概念的教學，再以課本「做做看」與「動動腦」之練習作為課堂評量，讓學童進行解題，教師評估學生的學習，針對不理解的學童，加強學生對新概念的理解與澄清後，再進行下一個概念的教學。

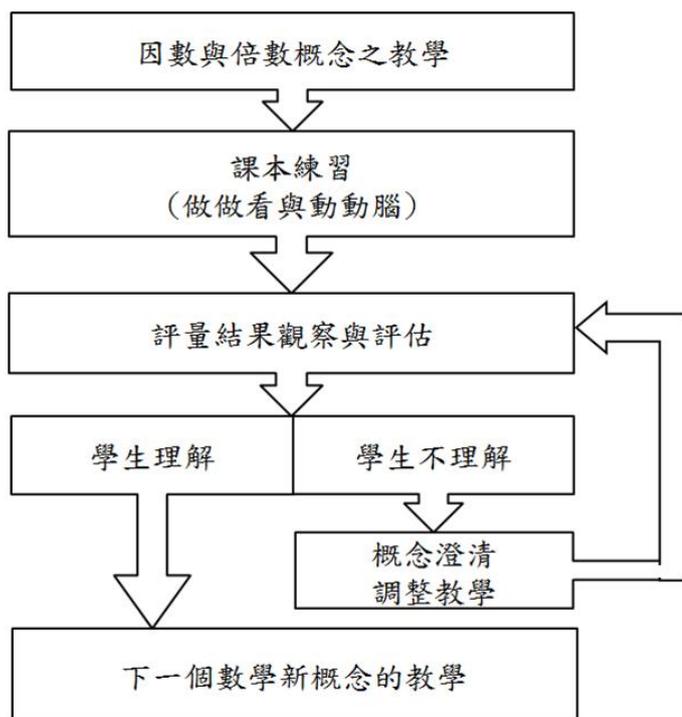


圖 5 控制組教學與評量之流程

五、資料處理

(一) 質性資料處理與分析

開放性評量學習單將於每堂課後收回，針對開放性學習單進行批改，尤其留意學生多元解題想法。每堂下課進行全班學生晤談，了解學生解題想法，以利後續分析解題類型。表 2 為資料類型編碼與說明。

表 2

資料類型編碼與說明

| 資料類型 | 編號 | 編號說明 |
|----------|-------------------------|-------------------------|
| 開放性評量試題 | 任務 n-m(n=1~6； m=1~4) | 課本活動 n 之開放性評量試題編號 m |
| | 任務 1-1 | 課本活動一之開放性評量試題 1 |
| 開放性評量學習單 | S1-任務 1-1 | 1 號學童之開放性評量學習單(任務 1-1) |
| 學生晤談記錄 | 晤 S1-1080923 | 1 號學童 108 年 9 月 23 日 |

(二) 量化資料處理與分析

本研究蒐集之量化資料為學童四年級數學評量成績、自編因數與倍數單元之後測成績。以 IBM SPSS Statistics 統計套裝軟體進行資料處理，利用描述性統計和單因子共變數分析。

肆、結果與討論

一、學生學習成效分析

研究者將收集的相關資料，運用統計套裝軟體(SPSS)進行統計的詮釋與分析。如表 3 所示，在排除共變項（四年級數學評量成績）對依變項（因數與倍數單元後測）之影響後，F 值為 4.704，p 值為 $.040 < .05$ ，達顯著水準，表示受試學生會因為不同評量之實驗設計而有所差異，而且實驗組優於控制組。如表 4 所示，實驗組平均分數為 86.541，控制組為 74.879，實驗組平均分數顯著高於控制組 11.662 分，顯示開放性評量融入教學能提升學童在因數與倍數單元之學習成效。

表 3

因數與倍數單元後測之單因子共變數分析摘要表

| 來源 | 依變數 | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F 檢定 |
|-----------|-----------|----------|-----|---------|--------|
| 組別 共變數 | 因數與倍數單元後測 | 916.299 | 1 | 916.299 | 4.704* |
| 誤差 | 因數與倍數單元後測 | 4675.259 | 24 | 194.802 | |

* $p < .05$

表 4

因數與倍數單元後測之單因子共變數分析摘要表（描述性統計）

| 來源 | 組別 | 平均數 | 平均數差異 (實驗組-控制組) |
|-----------|-----|--------|--------------------|
| 因數與倍數單元後測 | 實驗組 | 86.541 | 11.662* |
| | 控制組 | 74.879 | |

* $p < .05$

二、學生解題類型分析

(一) 學生在因數先備知識之解題類型

因數先備知識奠基於「除法問題」和「整除概念」，除法問題搭配開放性評量試題編號為任務 1-1、整除概念為任務 1-2。

1. 學生能解決除法問題

試題任務 1-1

班上有 14 位同學要進行分組，請問每 3 人一組，每個同學都可以分到組別嗎？

1. (A)可以 (B)不可以

2. 我選擇上述答案的理由是：

學生在解決任務 1-1 分別使用不同策略解題，如下：

我選擇上述答案的理由是：
14 不可以被 3 整除

請把你的想法寫下來

圖 6 SL2-任務 1-1 (加法)

我選擇上述答案的理由是：
B

請把你的想法寫下來

十四不可以被 3 整除

$5 \times 3 = 15$

$14 \div 3 = 4 \dots 2$

A: 4 組, 剩 2 人

圖 7 SM5-任務 1-1 (乘法)

我選擇上述答案的理由是：
B

請把你的想法寫下來

$14 \div 3 = 4 \dots 2$

如果這樣子分會有兩個人多出來。所以沒辦法三個人一組。

圖例: (stick figures)

圖 8 S14-任務 1-1 (除法)

請把你的想法寫下來

因為 14 的因數有 1, 2, 7, 14 裡面沒有 3 這個數字。因數的意思就是可以這個數整除的。

被

A: B 不可以

圖 9 S3-任務 1-1 (因數關係)

2. 學生具備整除概念

試題任務 1-2

18 可以被下列哪些數整除，用算式把判斷方法記下來。

1、2、5、6、18、27、36、54

學生在解決任務 1-2，能找到 18 可以被那些數整除，並使用不同的方法解釋 18 不能被 36 和 54 整除。如 S14 清楚被除數和除數的關係，說明如果 $36 \div 18 = 2 \dots 0$ ，就變成 36 是被除數，同理 54，唔談如下：

師：那你講一下什麼是整除？

生：就是不會有餘數。

師：很好！但 36 也不會有餘數阿(36 除以 18 等於 2 餘 0)，為什麼 36 不行？

生：這樣變成 36 是被除數。

師：很好！那 54 呢？

生：54 也會變被除數。(晤 S14-1080923)

另外亦有學生提到，如 S2 解釋 $36 > 18$ 和 $54 > 18$ ，所以 18 不能被 36 和 54 整除，晤談如下：

師：說說看什麼是整除？

生：整除就是沒有餘數。

師：那 18 可以被整除，那 18 是什麼數？

生：18 是被除數。

師：為什麼不能選 36？

生：因為比他(18)大。(晤 S2-1080923)

此外學生 SM5 說明如果 $18 \div 36 = \frac{1}{2}$ 和 $18 \div 54 = \frac{1}{3}$ 商就變成分數，所以 18

不能被 36 和 54 整除，晤談如下：

師：說一下什麼是整除？

生：整除就是餘零。

師：這個($36 \div 18 = 2 \dots 0$)也餘零啊？為什麼不行？

生：因為要 18 除以 36。

師：為什麼不行？

生：這樣就變成二分之一了！（晤 S5-1080923）

(二) 學生在因數問題之解題類型

診斷學生因數概念包括認識因數、找因數和解決因數的應用問題。任務 2-1 檢驗學生因數概念；任務 2-2 檢驗學生找因數。任務 2-3 透過讓學生偵錯題目，診斷學生找因數缺漏（1 和自己）和因數與倍數混淆之情形。

1. 學生具備因數概念

試題任務 2-1

觀察算式 $18 \div 2 = 9$ ，請問只有 2 是 18 的因數嗎？

1. (A)是 (B)不是
2. 我選擇上述答案的理由是：

學生能逐一檢驗 18 可以被哪些數整除，找出 18 的所有因數。如 S10 將 18 可以被哪些數整除的數搭配分組圖示表示出來。

我選擇上述答案的理由是：
 (B)並不是只有2才是18的因數

請把你的想法寫下來

$18 \div 2 = 9$ $18 \div 6 = 3$ $18 \div 1 = 18$
 $18 \div 9 = 2$ $18 \div 3 = 6$ $18 \div 18 = 1$

這些都是18的因數喔!

(1) $18 \div 2 = 9$
 (2) $18 \div 9 = 2$
 (3) $18 \div 6 = 3$
 (4) $18 \div 3 = 6$
 (5) $18 \div 1 = 18$
 (6) $18 \div 18 = 1$

Good! 非常仔細!

圖 10 S10-任務 2-1

另外 SH14 於晤談中清楚說明因數成對的特性，晤談如下：

師：學習單你寫「因數會成對出現」，這個意思是什麼？

生：這兩個都是因數(2 和 9)。(晤 S14-1080924)

2. 學生能找出某數的所有因數

試題任務 2-2
 請找出 36 的所有因數，並把找因數的過程用算式記下來。

S6 將 36 可以被哪些數整除逐一檢驗，找出 36 的所有因數；S1 利用乘法與除法算式，成對找出 36 的所有因數，並以表格進行整理。

請把你的想法寫下來

$36 \div 1 = 36$
 $36 \div 2 = 18$
 $36 \div 3 = 12$
 $36 \div 4 = 9$
 $36 \div 6 = 6$
 $36 \div 9 = 4$
 $36 \div 12 = 3$
 $36 \div 18 = 2$
 $36 \div 36 = 1$

圖 11 S6-任務 2-2 (逐一檢驗)

請把你的想法寫下來

| | | |
|------------------|--------------------|-------|
| $36 \div 1 = 36$ | $1 \times 36 = 36$ | 1, 36 |
| $36 \div 2 = 18$ | $2 \times 18 = 36$ | 2, 18 |
| $36 \div 3 = 12$ | $3 \times 12 = 36$ | 3, 12 |
| $36 \div 4 = 9$ | $4 \times 9 = 36$ | 4, 9 |
| $36 \div 6 = 6$ | $6 \times 6 = 36$ | 6 |

除法 乘法 得到的因數

36的因數：1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Good!

圖 12 S1-任務 2-2 (成對)

3. 開放性評量能促進學生反思

試題任務 2-3
 以下是幾位同學所找 24 的因數：
小明：2、3、4、6、8、12
小美：2、3、4、6、8、12、24、48
小智：24、48、72、96
 請問哪個同學的說法是正確的？(若是錯誤的請你幫忙改正，並用算式記下來)

S4 和 S7 在尚未教導倍數教學時，已具備倍數概念。S4 清楚 48 為 24 的倍數，晤談如下：

師：你學習單寫 48 倍是什麼意思？

生：啊！48 是 24 的倍數。(晤 S4-1080926)

其中 SL7 提到 24 的最小因數是 1，最大因數是 24，顯示透過開放性評量能促進學生反思，察覺每個數最小的因數是 1，最大的因數是自己。

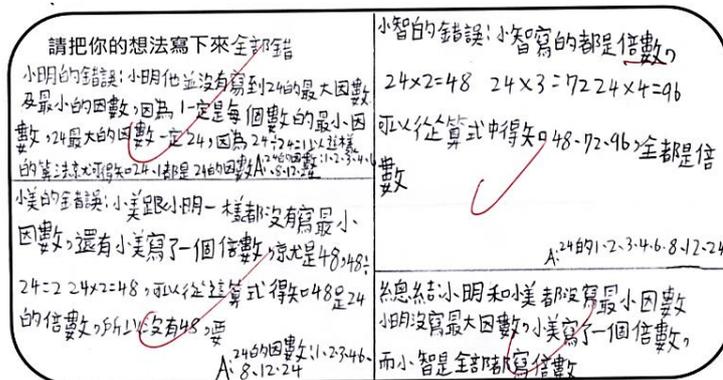


圖 13 S7-任務 2-3

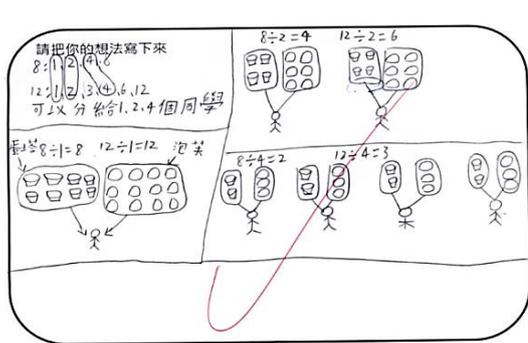
(三) 學生在公因數與最大公因數問題之解題類型

任務 3-1 診斷學生處理公因數與最大公因數應用問題時，是否誤解題意和使用關鍵字解題的情形。

1. 學生能處理公因數應用問題

試題任務 3-1
 老師準備了 8 個蛋塔和 12 個泡芙，準備分給同學，每個人拿到的蛋塔一樣多，泡芙也一樣多，請問可以分給幾個同學？請將所有分法用圖表示出來。

值得一提的是，S13 在反思提到學習公因數可讓平分東西更方便，進行數學的反思。



經過討論後，你學到什麼？
 經過了這一次的課程，讓我知道如何平分許多的東西，真的很方便。😊

圖 14 S13-任務 3-1 (列舉法)

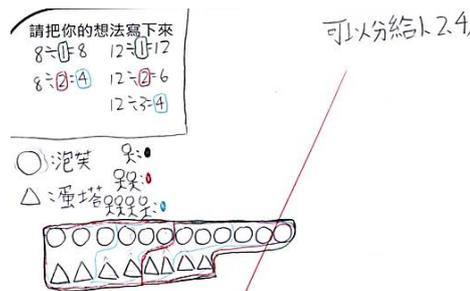


圖 15 S14-任務 3-1 (除法)

2. 學生能找出公因數但無法處理公因數應用問題

S12 和 S5 雖然找出公因數但無法解決公因數之應用問題。

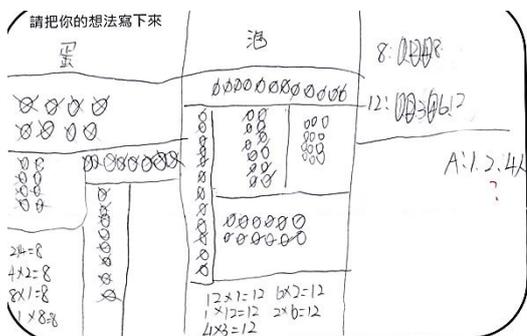
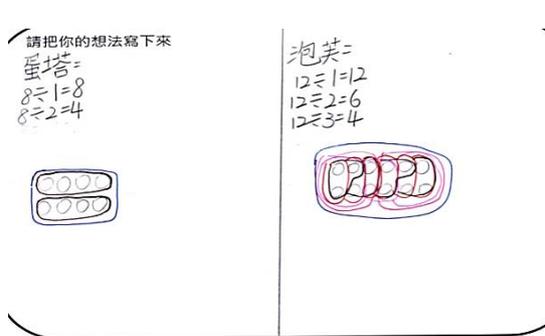


圖 16 S5-任務 3-1



經過討論後，你學到什麼？
 我學到了怎麼找出公因數，並且最大公因數。
 例如：找出 9 和 18 的公因數和最大公因數。
 9 = 1 × 9, 18 = 2 × 9, 18 = 3 × 6, 18 = 6 × 3, 18 = 9 × 2, 18 = 18 × 1. 9 跟 18 有共同的因數，所以就叫做公因數。
 1, 3, 9 都是 9 和 18 的公因數，最大公因數只要從公因數裡找出最大的。例如：1, 3, 9 是 9 最大，所以這就是最大公因數。

圖 17 S12-任務 3-1

(四) 學生在倍數先備知識之解題類型

倍數先備知識奠基於「幾的幾倍」和「倍的語言」，此概念搭配開放性評量試題編號為任務 4-1。

1. 學生具備「幾的幾倍」和「倍的語言」概念

試題任務 4-1
 迴紋針為 4 公分長，彩色筆是迴紋針的 2 倍長，緞帶是彩色筆的 3 倍長，請問緞帶是迴紋針的幾倍？請把算式記下來。

S1 呈現物品長度關係，圖示搭配算式，彩色筆 24 公分為迴紋針 4 公分的 6

倍長。S6 表徵方式特別，以離散量表徵長度的連續量。

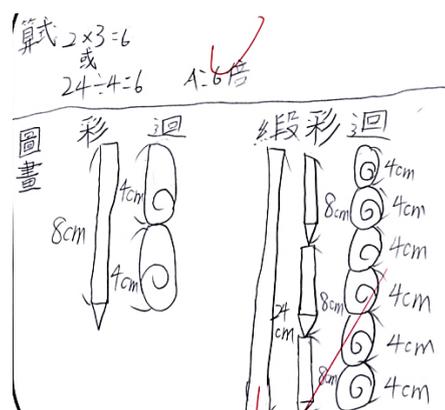


圖 18 S1-任務 4-1

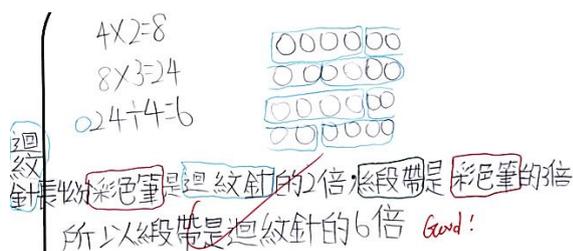


圖 19 S6-任務 4-1

(五) 學童在倍數問題之解題類型

診斷學生倍數概念包括認識倍數、找倍數和解決倍數的應用問題。任務 4-2 診斷找倍數缺漏和因數與倍數混淆之情形；任務 4-3 透過偵錯診斷倍數概念、因數與倍數混淆或以為 1 為倍數之情形。解決倍數的應用問題為任務 4-4 置於課本佈題教學前，作為課本倍數應用問題之先備知識。

1. 學生能找出某數的倍數

試題任務 4-2
找出 18 的倍數，依大小順序寫出 5 個，並把找倍數的算式記下來。

S14 以幽默詼諧的語句：「寫到天荒地老也寫不完」，來描寫倍數有無限多個。S2 用加法找出 18 的倍數。

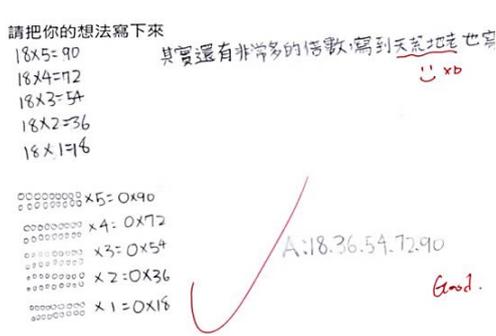


圖 20 S14-任務 4-2 (倍數有無限個)

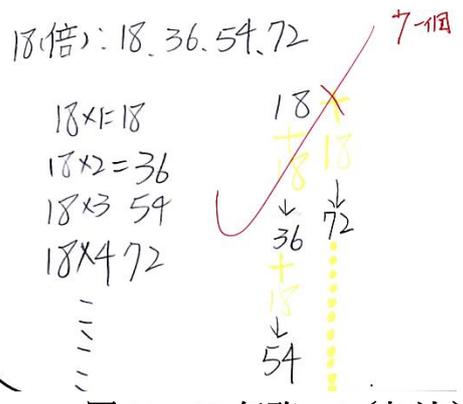


圖 21 S2-任務 4-2 (加法)

2. 學生了解因數與倍數概念

試題任務 4-3

以下幾位同學所找 1~100 中 24 的倍數：

小明：1、24、48、72、96

小光：48、72、96

小美：1、2、3、4、6、12、24 請問哪個同學的說法是正確的？若是錯誤的請同學幫忙改正，並把用算式記下來。

學生能將因數與倍數關係連結自己的學習。

經過討論後，你學到什麼？

我學到了倍數有無限多個，而且很容易把倍數寫成因數，而且因數和倍數有一個規律。例 $2 \times 3 = 6$ 因 因 倍 倍

決錯!

∞

圖 22 S3-任務 4-3

請把你的想法寫下來

小明的倍數有 1，但 1 不是 24 的倍數，而是 24 的因數，因為是所有的數最小的因數 Good!

小美只有寫 24 的因數，所以除了 24 以外全都錯

小光的倍數忘了寫 24，因為 24×1 所以 24 本身也是自己的倍數 有規則 1 倍 很棒!

然則小明的答案出現了因數，小光是寫 24 的最小倍數，小美是全寫因數，所以答案是 24、48、72、96

圖 23 S7-任務 4-3

3. 學生能比較因數與倍數

試題任務 4-4

果園今天採收一些蘋果，每 3 顆裝一籃，數量最接近 20 又比 20 少，請問今天採收多少蘋果？

S13 說明倍數比因數簡單，顯示學生學完因數與倍數，能說出自己學習的想法，此為一般傳統評量不易呈現的部分，開放性評量能使學生監控自我的學習並促進反思。

經過討論後，你學到什麼？

我學會倍數以後，讓我更容易算出答案，而且我覺得倍數比因數簡單多了！

例如：找出 14 的因數、倍數（寫出 3 個）

因數：
 $14 \div 1 = 14$
 $14 \div 2 = 7$
 $14 \div 7 = 2$

倍數：
 $14 \times 1 = 14$
 $14 \times 2 = 28$
 $14 \times 3 = 42$

Good!

圖 24 S13-任務 4-4

(六) 學童在公倍數與最小公倍數問題之解題類型

公倍數與最小公倍數概念對應對試題為任務 5-1，解決學生認為最小公倍數為 1 之情形。2、3、5 和 10 之倍數判別對應試題為任務 6-1。

1. 學生能找出公倍數與最小公倍數

試題任務 5-1

以下是小明找 12 和 16 最小公倍數的方式：

12 的倍數：1、12、24、36、48、60.....

16 的倍數：1、16、32、48、60、72.....

公倍數：1、48、.....

最小公倍數：1

請問小明的找最小公倍數的方法是正確嗎？

1. (A)是 (B)不是

2. 我選擇上述答案的理由是：

學生能利用乘法、列舉法和短除法找出最小公倍數。

請把你的想法寫下來

因為不是 12、16 倍數，但是是 12、16 的最小公倍數

可是他找的其他倍數是對的，因為 12x1=12，12 再加 12 又是另一個倍數了，16 也是同樣的事情。

小明除了 1 寫錯，其它都是對的！

Good!

A: 最小公倍數是 48

列舉法表格：

| | | | | |
|----------|-----------|-----------|---------|-----------|
| 12x1=12 | 12x5=60 | 12x10=120 | 16x1=16 | 16x6=96 |
| 12x2=24 | 12x6=72 | 12x15=180 | 16x2=32 | 16x7=112 |
| 12x3=36 | 12x7=84 | 12x20=240 | 16x3=48 | 16x8=128 |
| 12x4=48 | 12x8=96 | 12x30=360 | 16x4=64 | 16x9=144 |
| 12x9=108 | 12x25=300 | 12x45=540 | 16x5=80 | 16x10=160 |

圖 25 S14-任務 5-1 (乘法)

我選擇上述答案的理由是：

B

請把你的想法寫下來

12: 12, 24, 36, 48, 60

16: 16, 32, 48, 64, 80

最小公倍數 = 48

圖 26 S9-任務 5-1 (列舉法)

請把你的想法寫下來

圖 我的方法

只要先算出最小公倍數，在往上乘，就能算出。

短除法：

$$\begin{array}{r} 16 \\ 4 \overline{) 16} \\ \underline{12} \\ 4 \end{array}$$

公倍數是 48, 96, 144

A: 最小公倍數是 48

圖 27 S3-任務 5-1 (短除法)

2. 學生能處理公倍數應用問題

試題任務 6-1

39□□是一個四位數，這個數是 2 的倍數，也是 5 的倍數，請問四位數可能為多少，把所有可能都寫出來。

學生能利用倍數判別方法和公倍數概念解題。S13 利用個位判別 2 的倍數，認為此方法會方便許多，進行數學學習的反思。S7 採用公倍數概念解題。

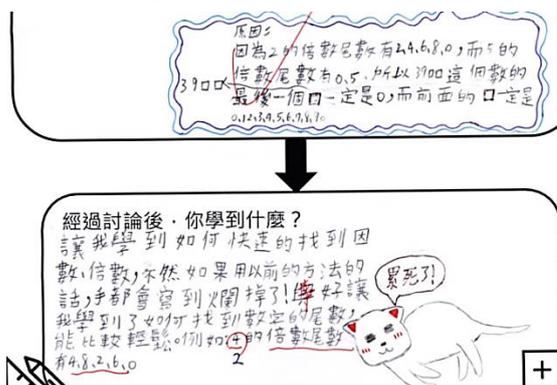


圖 28 S13-任務 6-1 (倍數判別)

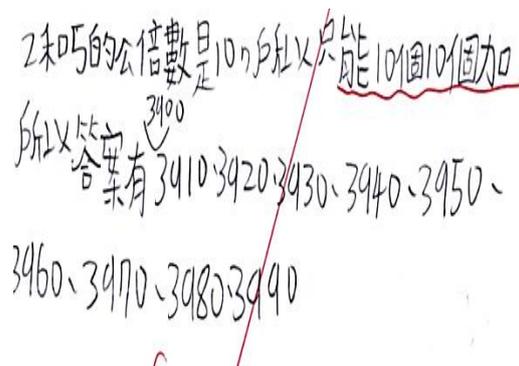


圖 29 S7-任務 6-1 (公倍數)

研究者整理學生於各試題之解題類型 (見於附件二)。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 開放性評量融入因數與倍數單元能提升學童數學學習成效

本研究將學童四年級數學成績與自編因數與倍數試卷成績，進行共變數分析，實驗組顯著優於控制組，顯示開放性評量能提升數學學習成效。

(二) 學童於開放性評量呈現多元解題類型

本研究融入開放性評量於因數與倍數單元，輔以學生晤談，學童呈現多元解題類型，開放性評量更能促進學生反思。

二、建議

(一) 教師體認開放性評量題數不宜過多

使用開放性評量應考量學生負荷與教學時間，因開放性評量與傳統評量不同，須寫下自己的解題歷程與想法。同時開放性評量作為課室討論，若教學者未能掌握教學節奏，容易導致教學、討論與分享時間不足，將有失使用開放性評量診斷學生想法促進學生學習與課堂討論之用意。因此使用開放性評量之試題每堂課不宜過多，才能充分討論，促進師生與同儕交流。

(二) 教師須營造師生與同儕間相互欣賞與尊重之課室環境

開放性評量能看出學生的多元解題想法，但當教師或同儕將解題想法分類並

比較優劣，將影響學生不敢發表和害怕犯錯的情況。因此使用開放性評量，教師須營造課室相互尊重與欣賞的環境，讓學生都能說出自己的想法，才為使用開放性評量之用意。

陸、研究討論

本研究將開放性評量融入因數與倍數單元，學生在本單元之學習成效提升，另外在開放性評量呈現多元的解題歷程，對於不擅言詞的學童，更多了表達想法的機會。不過研究者思考實行開放性評量的限制與改進，開放性評量讓學童有充分表達的空間，但此評量方法有別於傳統評量，學生要寫下或說出自己的想法實屬不易，須配合各種方式才能讓學生產出，舉凡教師的鼓勵和獎勵、同儕的作品、分享時間……等，都須全面考量。另外開放性評量強調開放的精神，課室中尊重與包容氛圍更加重要，除了教師的態度，如何營造讓學生安心、自由的數學課室環境是值得思考的方向。研究者亦思考開放性評量融入教學對偏鄉低成就的學童是否合適。本研究為開放性評量融入因數與倍數教學之初探，期能對未來使用開放性評量之教師或研究提供參考與建議。

參考文獻

- 林世華、盧雪梅、陳學志（2004）。國民中小學九年一貫課程學習成就評量指標與方法手冊。臺北市：教育部。
- 林素微（2000）。數學科評量的新願景：談多元評量。*研習資訊*，**17**（3），31-42。
- 胡詩菁、鍾靜（2015）。數學課室中應用建構反應題進行形成性評量之研究。*臺灣數學教師*，**36**（2），26-48。
- 黃培甄、葉啟村（2005）。國小六年級因數與倍數單元之創新架構研究。*南大學報*，**39**（1），61-89。
- 黃國勳、劉祥通（2003）。五年級學童學習因數教材困難之探討。*科學教育研究與發展季刊*，**30**，52-70。
- 劉子鍵、林怡均（2013）。發展二階段診斷工具探討學生之統計迷思概念：以「相關」為例。*教育心理學報*，**42**（3），379-400。
- AL-Absi, M. (2012). The effect of open-ended tasks –as an assessment tool–on fourth graders' mathematics achievement, and assessing students' perspectives about it. *Jordan Journal of Educational Sciences*, **9**(3), 345-351.
- Bayrak, B. K. (2013). Using two-tier test to identify primary students' conceptual understanding and alternative conceptions in acid base. *Meviana International Journal of Education (MIJE)*, **3**(2), 19-26.
- Dias, A. (2005). Using lattice models to determine greatest common factor and least common multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and*

- Learning*, 730-738.
- Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 25(4), 523-545.
- Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating 'open-ended' problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 20(5), 23.
- Kolitsch, S., & Kolitsch, L. (2011). Greatest common factors and least common multiples with venn diagrams. *Louisiana Association of Teacher of Mathematics Journal*, 5, 1-7.
- Orhun, N. (2002). *Solution of verbal problems using concept of least common multiplier (LCM) and greatest common divisor (GCD) in Primary School Mathematics and Misconceptions*. Retrieved September, 2009, from <http://math.unipa.it/~grim/SiOrhun.PDF>
- Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics*, 9(2), 107-112.
- Tankersley, K. (2007). *Tests that teach: Using standardized tests to improve instruction*. Alexandria, VA: ASCD.
- Treagust, D. F. (2006). Diagnostic assessment in science as a means to improving teaching, learning and retention. In *UniServe science – symposium proceedings: Assessment in science teaching and learning* (pp. 1–9). Sydney, NSW: Uniserve Science.
- Triyani, S., Putri, R. I., & Darmawijoyo. (2012). Supporting Student's Ability in Understanding Least Common Multiple (LCM) Concept Using Storytelling. *Journal on Mathematics Education (IndoMS - JME)*, 3(2), 151-164.
- Tsai, C. C., & Chou, C. (2002). Diagnosing students' alternative conceptions in science. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(2), 157-165.
- Wijaya, A. (2018). *How do open-ended problems promote mathematical creativity? A reflection of bare mathematics problem and contextual problem*. Journal of Physics: Conf. Series, 983 (2018) 012114, International Conference on Mathematics, Science and Education 2017 (ICMSE2017).

附錄一 開放性評量試題內容與說明

| 教學活動 | 教學目標 | 試題編號 | 開放性評量題 (實驗組) | 使用時機 |
|------|--------------------------------|--|---|---|
| 活動一 | 1-1 透過商為整數，餘數是 0 的整數除法，認識整除的意義 | 任務 1-1 | 班上有 14 位同學要進行分組，請問每 3 人一組，每個同學都可以分到組別嗎？ 1. (A)可以 (B)不可以 2. 我選擇上述答案的理由是： | ■ 活動一 整除 整除意義：課本例題一（除法問題）教學前。 |
| | | 任務 1-2 | 18 可以被下列哪些數整除，用算式把判別方法記下來。1、2、5、6、18、27、36、54 | ■ 活動一 整除 整除意義：課本例題一（整除概念）教學後。 |
| 活動二 | 2-1 透過整除認識因數 | 任務 2-1 | 觀察算式 $18 \div 2 = 9$ ，請問只有 2 是 18 的因數嗎？ 1. (A)是 (B)不是 2. 我選擇上述答案的理由是： | ■ 活動二 因數 認識因數：課本例題三（透過操作附件，從乘法或除法算式，發現因數是成對出現）教學後。 |
| | | 任務 2-2 | 請找出 36 的所有因數，並把找因數的過程用算式記下來。 | ■ 活動二 因數 找因數：課本例題四（利用乘法和除法不重複之算式找出某數之因數）教學後。 |
| | 任務 2-3 | 以下是幾位同學所找 24 的因數： <u>小明</u> ：2、3、4、6、8、12 <u>小美</u> ：2、3、4、6、8、12、24、48 <u>小智</u> ：24、48、72、96 請問哪個同學的說法是正確的？（若是錯誤的請你幫忙改正，並用算式記下來） | ■ 活動二 因數 因數概念：課本例題五（因數應用問題）教學前。 | |
| 活動三 | 3-3 處理公因數與最大公因數的應用問題 | 任務 3-1 | 老師準備了 8 個蛋塔和 12 個泡芙，準備分給同學，每個人拿到的蛋塔一樣多，泡芙也一樣多，請問可以分給 | ■ 活動三 公因數和最大公因數 公因數和最大公因數之應用：取代課本 |

(續下頁)

| 教學活動 | 教學目標 | 試題編號 | 開放性評量題 (實驗組) | 使用時機 |
|------|-----------------|-----------|--|--|
| | | | 幾個同學？請將所有分法用圖表示出來。 | 例題五（分東西之公因數與最大公因數應用問題）。 |
| 活動四 | 4-1 了解倍數的意義 | 任務 4-1 | 迴紋針為 4 公分長，彩色筆是迴紋針的 2 倍長，緞帶是彩色筆的 3 倍長，請問緞帶是迴紋針的幾倍？請把算式記下來。 | ■ 活動四 倍數 倍數意義：取代課本例題一（幾的幾倍問題）。 |
| | 4-2 找出某數的倍數 | 任務 4-2 | 找出 18 的倍數，依大小順序寫出 5 個，並把找倍數的算式記下來。 | ■ 活動四 倍數 找倍數：課本例題三（找出範圍內的倍數）教學後。 |
| | | 任務 4-3 | 以下幾位同學所找 1~100 中 24 的倍數： <u>小明</u> ：1、24、48、72、96 <u>小光</u> ：48、72、96 <u>小美</u> ：1、2、3、4、6、12、24 請問哪個同學的說法是正確的？若是錯誤的請同學幫忙改正，並把用算式記下來。 | ■ 活動四 倍數 倍數應用：例題四（倍數應用問題）教學前。 |
| | 4-3 解決倍數的應用問題 | 任務 4-4 | 果園今天採收一些蘋果，每 3 顆裝一籃，數量最接近 20 又比 20 少，請問今天採收多少蘋果？ | ■ 活動四 倍數 倍數應用：例題五（倍數應用問題）教學前 |
| 活動五 | 5-1 認識公倍數與最小公倍數 | 任務 5-1 | 以下是小明找 12 和 16 最小公倍數的方式： <u>12 的倍數</u> ：1、12、24、36、48、60…… <u>16 的倍數</u> ：1、16、32、48、60、72…… <u>公倍數</u> ：1、48、…… <u>最小公倍數</u> ：1 請問小明的找最小公倍數的方法是正確嗎？ 1. (A)是 (B)不是 | ■ 活動五 公倍數與最小公倍數 認識公倍數與最小公倍數：課本例題二（宣告公倍數與最小公倍數）教學後 |

(續下頁)

| 教學活動 | 教學目標 | 試題編號 | 開放性評量題 (實驗組) | 使用時機 |
|------|--|--------|--|--|
| | | | 2. 我選擇上述答案的理由是： | |
| 活動六 | 6-1 能判別 2 的倍數 6-2 能判別 5 的倍數 6-3 能判別 10 的倍數 | 任務 6-1 | 39□□是一個四位數，這個數是 2 的倍數，也是 5 的倍數，請問四位數可能為多少，把所有可能都寫出來。 | 活動六 判別 2、3、5、10 之倍數：判別 2、5、10 倍數：課本例題三(判別 10 的倍數，個位數字是 0) 教學後。 |

附錄二 開放性評量之解題類型

| 概念 | 問題 | 解題類型 | 開放性評量 題號 | |
|------------|--------------|--|--|--|
| 因數先備 概念 | 除法問題 | 1.加法策略 2.乘法策略 3.除法策略 4.因數關係 | 任務 1-1 | |
| | 整除概念 | 1.以被除數與除數關係解釋 36 和 54 非本題答案 2.以 $36 > 18$ 和 $54 > 18$ 關係解釋 36 和 54 非本題 3.以 $18 \div 36 = \frac{1}{2}$ 和 $18 \div 54 = \frac{1}{3}$ 解釋 36 和 54 非本題答案 | 任務 1-2 | |
| | 認識因數 | 1.找出 18 的所有因數 (因數成對性質) 2.找出 18 的所有因數 (逐一檢驗算式) | 任務 2-1 | |
| 因數概念 | 找因數 | 1.找出 36 的所有因數 (因數成對性質) 2.找出 36 的所有因數 (逐一檢驗算式) | 任務 2-2 | |
| | 公因數與最大公因數的應用 | 1.找出 24 的所有因數(因數與倍數關係偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) 2.找出 24 的所有因數(除數與被除數關係偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) 3.找出 24 的所有因數 ($24 \div 48 = \frac{1}{2}$ 、 $24 \div 72 = \frac{1}{3}$ 和 $24 \div 96 = \frac{1}{4}$ ，偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) 4.找出 24 的所有因數 (48、72 和 96 $>$ 24，偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) | 任務 2-3 | |
| | | 公因數與最大公因數概念 | 1.找出公因數 (列舉法)，了解使用公因數之時機，圖示適切解釋算式 2.找出公因數 (列舉法)，但以為找出的公因數為蛋塔和泡芙的個數，而非人數 3.找出公因數 (列舉法)，僅個別找出蛋塔和泡芙的分法(因數)再找兩者共同的分法 (公因數) | 任務 3-1 |
| | | 倍數先備 概念 | 幾的幾倍和 倍的語言 | 1.找出「誰是誰的幾倍」(除法算式) 2.找出「誰是誰的幾倍」(乘法算式) |

(續下頁)

| 概念 | 問題 | 解題類型 | 開放性評量 題號 |
|-------------|--------------|---|-------------|
| 倍數概念 | 找倍數 | 1.能找出 18 的 5 個倍數（說明倍數有無限多個） 2.能找出 18 的 5 個倍數（說明倍數往上加的概念） | 任務 4-2 |
| | | 1.判斷 100 以內 24 的倍數（更正題目有誤之處） 2.判斷 100 以內 24 的倍數（更正與分析題目有誤之處） | 任務 4-3 |
| | 倍數的應用 | 1.利用乘法找出最接近 20 又少於 20 的數 2.利用除法找出最接近 20 又少於 20 的數 | 任務 4-4 |
| 公倍數與最小公倍數概念 | 公倍數與最小公倍數的判斷 | 1.找出最小公倍數 48（列舉法） 2.找出最小公倍數 48（乘法） 3.找出最小公倍數 48（短除法） | 任務 5-1 |
| | 公倍數的應用 | 1.找出 10 個 39□□ 的答案（倍數判別方法） 2.找出 10 個 39□□ 的答案（公倍數判別方法） | 任務 6-1 |

附錄三 國小五年級因數與倍數單元後測試卷

國小五年級因數與倍數單元後測試卷

親愛的同學您好，這份試卷這是幫助你對「因數與倍數」的瞭解，請放輕鬆作答，仔細計算後再寫下你的答案，試卷總共有 20 題，作答時間是 40 分鐘。

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

1. 已知 $10 \div 5 = 2$ ，請問：
 - (1) () 5 是 10 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 2 是 10 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 10 是 5 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 10 是 2 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
2. 已知 $3 \times 4 = 12$ ，請問：
 - (1) () 3 是 12 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 4 是 12 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 12 是 3 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 12 是 4 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
3. 判別公因數、公倍數、最大公因數和最小公倍數：
 - (1) () 4 是 12 和 16 的①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 1 是任意兩數的①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 10 是 2 和 5 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 12 是 3 和 4 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (5) () 下列哪一個數為 6 和 8 的最大公因數 ① 1 ② 2 ③ 6 ④ 8
 - (6) () 下列哪一個數為 3 和 6 的最小公倍數 ① 1 ② 3 ③ 6 ④ 18
4. () 45 是 3 和 5 的公倍數，請問哪一個選項也是 3 和 5 的公倍數？
 - ① 25×2
 - ② 35×2
 - ③ 45×2
 - ④ 55×2
5. () 觀察下列兩個式子 $4 \times 86 = 344$ 和 $344 \div 4 = 86$ ，請問哪個同學說法是正確的？
 - ① 小華：「4 是 344 的因數」
 - ② 小明：「4 是 344 的因數與倍數」
 - ③ 小英：「344 是 86 的因數」
 - ④ 小智：「4 是 86 的倍數」
6. 請將可以整除 14 的數字圈起來
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、28、42
7. 請列出因數、公因數和最大公因數：
 - (1) 請寫出 14 的因數：_____

(續下頁)

- (2) 請寫出 21 的因數：_____
- (3) 請寫出 14 和 21 的公因數：_____
- (4) 請寫出 14 和 21 的最大公因數：_____
8. 請列出倍數、公倍數和最小公倍數：
- (1) 請寫出 16 的倍數(由小到大，列出 10 個)：
- _____
- (2) 請寫出 18 的倍數(由小到大，列出 10 個)：
- _____
- (3) 請寫出 16 和 18 的公倍數(由小到大，列出 3 個)：
- _____
- (4) 請寫出 16 和 18 的最小公倍數：
- _____
9. 下列哪些數是 2、3、5、10 的倍數？
156、273、105、820、444、782、415、700
- (1) 2 的倍數有_____
- (2) 3 的倍數有_____
- (3) 5 的倍數有_____
- (4) 10 的倍數有_____
10. 老師要把 35 顆巧克力平分給小朋友，請問平分給幾個人，可以剛好分完？寫出所有答案並把作法記下來。
11. 有一張長 36 公分、寬 42 公分的長方形紙，想把全部剪成相同大小的正方形。
- (1) 請問可能的邊長是幾公分？寫出所有答案。
- (2) 請問剪成最長的正方形是幾公分？
12. 有一堆糖果數量在 200 顆~300 顆之間，每袋裝 24 顆可剛好裝完，請問這堆糖果可能有幾顆？
13. 運動會表演的人數在 50~80 人之間，每 4 人排一排或每 6 人排一排，可以剛好排完，請問可能的人數是幾人？

本試卷結束

謝閻如 (2022)。

國小數學素養評量－試題編製經驗談。

臺灣數學教師，43 (2)，57-74。

doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0004

國小數學素養評量－試題編製經驗談

謝閻如

國立臺中教育大學數學教育學系

摘要

我國現行的《十二年國民基本教育課程綱要》以「核心素養」為主軸，透過素養評量引導素養教學為現行的策略之一。數學素養著重在個人應用數學能力，能將所學的數學知識呈現在解決生活問題中。有鑑於國小現職教師及師資生對於數學素養評量試題編製的疑問，本文提出 20 則數學素養試題做為參考，希望能帶給國小現職教師及師資生一些出題的靈感。

關鍵詞：國小數學、試題設計、數學素養

壹、緒論

我國現行的《十二年國民基本教育課程綱要》以「核心素養」為主軸，強調適應現在生活及面對未來挑戰所應具備的知識、能力與態度，且「核心素養」強調學習與生活的結合（教育部, 2021）。素養導向評量的實施則為了落實素養導向教學的策略之一，透過適當的評量，達成培養學生核心素養和領域核心素養的課程與教學（國家教育研究院, 2018b）。

數學素養評量需要強調數學領域核心素養及國小數學「學習表現」和「學習內容」的結合，並用於理解或解決真實情境脈絡中的問題。國小階段數學領域核心素養具體內涵，依循總綱核心素養之「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」三面向，共計 9 項能力。本文主要聚焦於「數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬訂解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的應用（國家教育研究院, 2018a）」，分享個人設計國小數學素養評量試題的經驗。

貳、數學素養意義及面向

在這個時代數學通常被稱是「隱形文化 (invisible culture)」(Steen, 1990)，在我們的生活周遭微妙地充斥著數學和統計思維（如數字、和形狀、改變與機會等），這些思維深深影響著我們的生活與工作方式，如報章雜誌中數字或圖表的使用，但一般大眾通常無法深入理解這些數字或圖表內含的意義。「數學素養」無法完全用數學知識來概念化，數學素養關乎個人使用和應用數學知識的能力 (Jablonka, 2003; Steen, 1990)。

根據經濟合作暨發展組織 (Organization for Economic Cooperation and Development [OECD]) 對於數學素養的解釋為「個人在各類情況脈絡下套用、運用和解釋數學的能力，包括數學推理，使用數學知識（如概念知識、程序知識和事實知識）及工具來描述、解釋和預測現象。數學素養幫助個人意識數學在世界中的角色，協助建設性、參與性和反思性的現代世界公民做出有根據的判斷與決策 (OECD, 2018)。」

Steen (1990) 認為數學素養必須反應數學和統計思想運作的不同層面，包含 (1) 實用素養，無論一個人的工作或生活水準為何，自信的應用數學素養可以在日常生活的許多決定中展現優勢。(2) 公民素養，確保公民能夠理解主要公共政策問題中出現的基於數學的概念，無法正確推理數字的社會大眾無法有效區分公眾政策為理性或魯莽的主張。(3) 專業素養，數學專業素養可以開啟學

生職業生涯的大門，提供企業提供產品或生產的競爭力，及提升國家在全球技術經濟的創新力；專業素養高時所有的人都受益，反之亦然。(4) 休閒素養，許多成年人喜歡將數學或邏輯活動做為休閒活動的一部分，而現代人投入在各種休閒活動的時間、精力或經費等均是數學隱藏在大眾視線下的深層脈絡。(5) 文化素養，數學是人類文化的共同組成成分，數學之美亦是受到許多人讚賞的議題，這些世代相傳的抽象思考可以視為人類文化遺產的一部分。

數學素養，根據 Jablonka (2003) 的論述，可以分為以下五個面向：(1) 發展人力資本 (developing human capital)，指能夠透過擬題和解題來分析、推理及溝通想法和結果的能力，即數學化和建模的構成觀點；(2) 文化認同 (cultural identity)，根據“民族數學”的廣義定義，為勞工團體的不同數學實踐，為不同社會人士的非正式算術實踐，例如攤販、木工、裁縫、家管等；(3) 社會變革 (social change)，在挑戰社會不平等方面，數學被視為揭示和溝通在現實層面中涵蓋社會或政治利益的重要工具；(4) 環境意識 (environmental awareness)，除了解決個人和地方問題，也可應用於解決全球環境問題，例如環境報告中的數據和數學模型的解讀與應用，全球環境問題例如，食物和水資源、人口增長、能源短缺和污染等；與(5) 評估數學 (evaluating mathematics)，包含用精簡的度量 and 指標進行推理，正式交易 (形式化分配權力或金錢的程序)，使用柏拉圖模型 (Platonic models) 進行推理，構建表面模型及命理。此五個面向可以做為考慮數學素養情境脈絡的根據。

根據筆者個人的出題經驗，若是在接到數學素養出題任務時才開始著手蒐集可用的試題情境，所呈現的試題可能會出現為了配合情境導致無法契合所欲評量的數學能力，或為了配合評量能力使得試題的情境描述過於牽強。情境蒐集為長期的工作，在觀察到「可能」有用的情境時，可以將情境加以記錄，並初步思考可能適用的數學概念。可能有用的情境如日常生活經驗、媒體報導，政府資訊，商品廣告，或休閒興趣等。在上述的情境脈絡中，以日常生活經驗最為眾人所熟知，也是經常使用於數學素養試題情境；其他可能情境則可能因為一般大眾過於習慣媒體報導或網頁資訊中的數字使用，而忽略報導或資訊中的數字表徵所涵蓋的數學概念，進而錯失將這些情境入題的可能性。

參、數學素養試題分享

由於數學素養強調情境脈絡，在設計問題前，出題者需要觀察蒐集數學相關的情境脈絡，再根據情境脈絡，思考適合該情境的數學概念，進而完成試題設計。出題者除了根據初步的出題想法外，由於適合數學素養試題的生活情境的蒐集不易，也並非所欲評量的數學概念都已有可使用的情境，因此出題者可以嘗試針對某一個情境脈絡加以簡化或複雜化，使其可以應用於其他年級或數學概念中。若

出題時，所欲評量的數學概念並沒有可以立即適用的情境脈絡，出題者可以根據初步紀錄中選取較為接近的數學概念，針對所欲評量的概念調整修改情境。

筆者於本文中一共整理 20 則數學素養試題，依情境脈絡可以分為美勞 DIY、新聞時事、生活經驗、應用程式、競賽、購物須知及生活知識等 7 類，所評量的數學概念以數與量為主，少數問題亦涵蓋資料與不確定性的內容（如表 1）。

表 1 試題情境及其評量目標分析

| 情境 | 試題 | 評量內容 |
|-----------|---------|---|
| 美勞 DIY | 愛心卡片 | 1. 能將圖卡依照形狀與大小進行分類，並加以點數記錄。 2. 能在具體情境中，比較 10 以內二數量的多少。 |
| | 貓咪感謝卡 | 1. 能將物件依照指定條件進行分類，並加以點數記錄。 2. 能在具體情境中，比較 10 以內二數量的多少。 3. 能解決生活中被減數為 10 以內的減法問題。 |
| | 聖誕卡片 | 1. 能進行點數個數為 10 以內物件。 2. 能解決生活中和為 10 以內的加法問題。 3. 能解決生活中被減數為 10 以內的減法問題。 |
| | 花朵卡片 | 1. 能解決除數為 2、3、5 的問題。 2. 能解決餘數不為 0 的除法問題。 |
| | 紙膠帶聖誕樹 | 1. 能解決除數為二位數的問題。 2. 能進行公尺與公分的換算。 |
| 新聞 時事 | 菜價上漲 | 1. 能解決整數四則多步驟問題。 |
| | 飲料熱量 | 1. 能解決整數四則多步驟問題。 2. 能解決「比」在生活實例之應用問題。 |
| | 電信公司號碼牌 | 1. 能解決序數問題。 2. 能解決時間量乘法問題。 3. 能解決時刻與時間加法問題。 |
| 生活 經驗 | 郵局排隊 | 1. 能解決序數問題。 |
| | 診所掛號 | 1. 能解決序數問題。 |
| 應用 程式 | 公車 APP | 1. 能進行日常生活的時間加減問題（跨時）。 |
| | 訂餐 App | 1. 能進行日常生活的時間加法問題。 2. 能進行時與分的換算。 |
| | 星等 | 1. 能解決平均問題。 2. 能利用四捨五入法對小數取概數。 |
| 競賽 | 歌唱比賽 | 1. 能解決多步驟問題。 |
| | 科學競試 | 1. 能解決小數加法問題。 |
| 購物 須知 | 跳繩長度 | 1. 能進行公尺與公分的換算與比較。 2. 能進行長度倍數計算。 |

續下頁

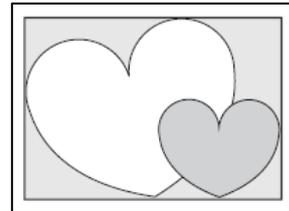
| | | |
|----------|------|--|
| | | 3. 能解決長度在生活實例之應用問題。 |
| | 背包選擇 | 1. 能進行公尺與公分的換算。 2. 能計算整數乘以分數的問題。 3. 能解決重量在生活實例之應用問題。 |
| 生活 知識 | 住家面積 | 1. 能計算長方形面積。 2. 能計算簡單複合圖形面積。 3. 能進行平方公尺與平方公分的換算。 |
| | 老虎領地 | 1. 能計算長方形面積。 2. 能進行平方公里與平方公尺的換算。 3. 能解決整數除以整數，商為小數的問題。 4. 能利用四捨五入法對指定位數取概數。 |
| | 橋梁限重 | 1. 能進行公噸與公斤的換算。 2. 能解決多位數除法問題。 |

一、美勞 DIY

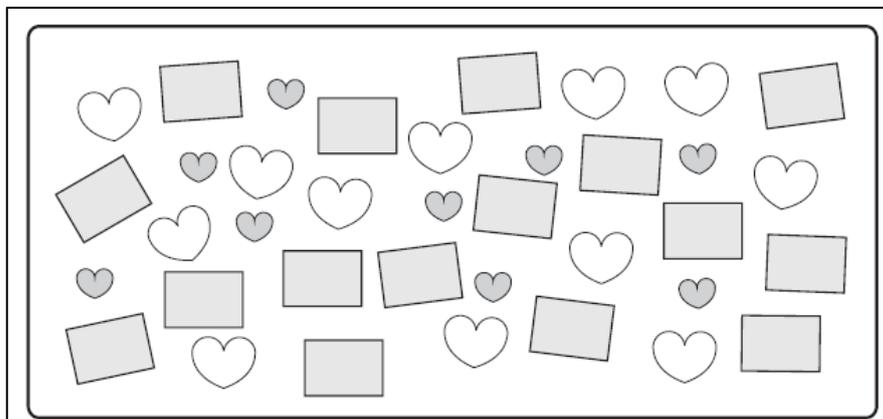
美勞 DIY 可與學生生活經驗相容，筆者經常透過各類 DIY 網站尋找可用的素養情境，且 DIY 活動情境多元，容易延伸變化，可用於基本點數、四則、量的計算等數學概念。試題 1「愛心卡片」的情境設定是用長方形和大小心型卡紙各 1 張組成一張卡片，所需要的材料以散落的方式呈現，詢問學生可以製作的卡片數量，評量學生分類點數，及數量多寡的比較。

試題 1 愛心卡片

張老師想製作心心相印邀請卡（如右圖），做一份邀請卡需要一張長方形卡紙，一張大愛心和一張小愛心。



現在桌上有這些材料，張老師最多可以做幾份邀請卡？



續下頁

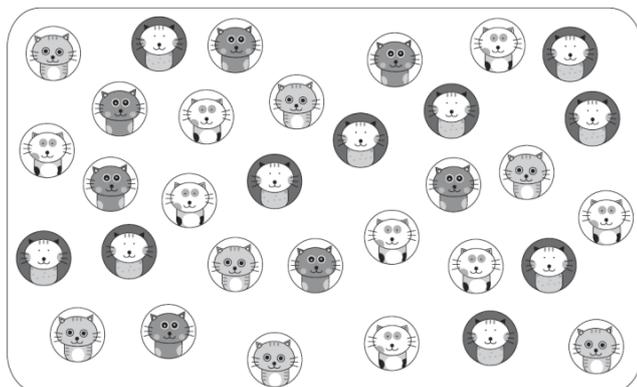
在美勞 DIY 情境下，若改變所需完成的作品，或微調問題中的數學概念，即可形成一個新的問題，如試題 2、試題 3 和試題 4。試題 2「貓咪感謝卡」與試題 1 相同之處是材料均以散落的方式呈現，評量學生分類點數及數量多寡比較的能力，但試題 2 於後續提問各類貼紙會剩下多少，則可評量學生一位數減法的能力。

試題 2 貓咪感謝卡

李老師想要做感謝卡（如下圖），每張感謝卡需要 4 種不同的貓咪貼紙。



1. 現在桌上有這些貼紙，張老師最多可以做幾張感謝卡？

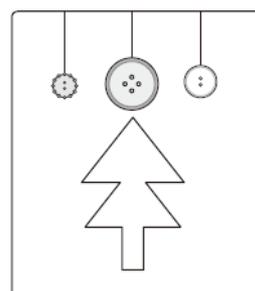


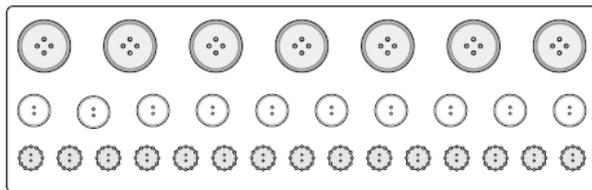
2. 做出最多張感謝卡之後，會剩下  () 張、 () 張、 () 張和  () 張。

試題 3「聖誕卡片」雖然與試題 1 都是卡片製作，然而試題 3 提供排序整齊的物件，刪除物品分類，並在題幹中增加條件「需要製作 12 張卡片」，除了物件點數及數量多寡比較外，另外評量一位數加、減法等數學能力。

試題 3 聖誕卡片

禹彤想要用鈕扣做 12 張聖誕卡片（如右圖），每張聖誕卡片需要大、中、小鈕扣各一個。下面是禹彤在縫紉箱裡找到的鈕扣：





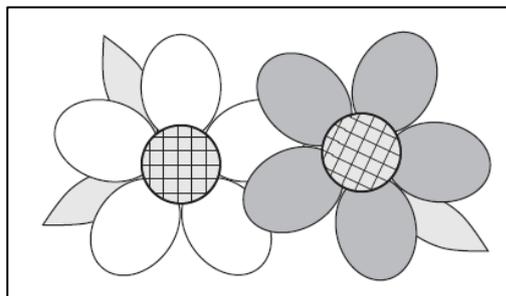
1. 禹彤用上面這些鈕扣最多可以做出幾張聖誕卡？
2. 禹彤做出最多張聖誕卡之後，會剩下幾個鈕扣？
3. 禹彤至少還需要幾個鈕扣，才能完成 12 張聖誕卡？

試題 1~3 的 DIY 活動中，所需的材料均是每個元素 1 個；試題 4「花朵卡片製作」雖然仍是卡片製作，但問題情境刪除物件的點數，且卡片製作所需材料之每一元素均為多個，如 5 個花瓣，3 個葉片和 2 個花心，主要評量學生餘數不為 0 的除法的概念。部分學生有可能利用乘法解決此問題，此時亦符合數學領域核心素養具體內涵「數-E-C2 樂於與他人合作解決問題並尊重不同的問題解決想法（國家教育研究院, 2018a）」之描述。

試題 4 花朵卡片

晴雯想做卡片送給 7 位老師，每位老師一張，每張卡片上有 1 朵深色的花，1 朵淺色的花和 3 片葉子(如右圖)，每朵紙花需要 5 片花瓣和 1 個花心。

晴雯已經剪了 28 片深色花瓣、24 片淺色花瓣、10 個花心和 19 片葉子，她現在最多可以完成幾張卡片？



DIY 情境除了卡片製作，也會在節慶布置時出現。試題四「紙膠帶聖誕樹」為紙膠帶黏貼聖誕樹情境，評量學生「公尺」與「公分」單位換算與除數為二位數的問題。然而學生在解決試題 5 時，若學生先算出所需膠帶的總長度在計算膠帶的捲數，則不符合題目中「每條膠帶必須是完整的 73 公分」的條件，學生解題時需要判斷所使用的解題策略或流程的適切性。

試題 5 紙膠帶聖誕樹

聖誕節快到了，金銘想用 28 張紙膠帶在家裡貼了一棵聖誕樹，每條紙膠帶的長度是 73 公分(每條紙膠帶必須是完整的 73 公分，不可以用接的)，一卷紙膠帶的長度 5 公尺，金銘最少要買幾捲紙膠帶？



二、新聞時事

除了美勞 DIY，新聞報導中經常會出現億以上的大數、價格漲跌、打折、比率(百分比)、大單位(公里、公噸等)，也是筆者常用於思考情境脈絡的來源。臺灣每年暑假幾乎都會遇到颱風或豪雨的侵襲造成農作物損失，導致菜價上漲，試題 6 的起源即為 2017 年 6 月的豪雨過後菜價上漲的新聞，本題情境主要根據新聞中的蔬菜價格評量學生解決整數四則多步驟問題的能力。另外，為了合理化問題情境中蔬菜購買的公斤數，將情境設定在自助餐店。

試題 6 菜價上漲

2017 年 6 月因為連日豪雨導致蔬菜價格上漲，小白菜每公斤從 16 元漲到 50 元，空心菜每公斤從 28 元漲到 70 元，甜玉米從每公斤 7 元漲到 19 元。便當店每天需要採購 2 公斤的小白菜，3 公斤的空心菜和 4 公斤的甜玉米。

1. 便當店在豪雨過後，每天花多少元購買這三種蔬菜？
2. 菜價上漲後，便當店每週購買這三種蔬菜的金額比漲價前貴多少元？

衛生福利部(2020)公告修正「連鎖飲料便利商店及速食業之現場調製飲料標示規定」，規範飲料需要標示總糖量及總熱量，試題 7 根據此規定及隨處可見的茶飲店之飲料內含的方糖個數作為問題脈絡，所使用的數據均為實際的飲料含糖量，除了評量學生整數四則多步驟問題及「比」在生活實例之應用外，也透過題目情境讓學生了解飲料的含糖量，為結合健康教育的數學問題。

試題 7 飲料熱量

茶飲店的飲料通常用方糖的數量來表示含糖量，下表示市售大杯 700 毫升飲料的含糖量：

| 品項 | 珍珠奶茶 | 微糖珍珠奶茶 | 多多綠茶 |
|-----|--------|--------|--------|
| 含糖量 | 12 顆方糖 | 3 顆方糖 | 14 顆方糖 |

1. 陳先生本來每天都會喝一杯大杯的珍珠奶茶，在他發現珍珠奶茶的含糖量很高，決定改喝微糖珍珠奶茶。一星期後陳先生減少攝取的含糖量是幾顆方糖？
2. 李小姐覺得大杯的多多綠茶含糖量有點高，她點了一杯中杯 500 毫升的多多綠茶。這杯多多綠茶的含糖量是幾顆方糖？

試題 8 的新聞情境源起為 2018 年電信公司的 499 之亂的新聞，當時許多民眾為了 499 電信方案排隊數小時（相關資訊可參考維基百科 <https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/499> 吃到飽之亂）。本題的情境描述中盡量保留民眾到電信公司辦理業務的真實狀況，例如號碼牌與抽號機的資料顯示。評量的數學概念主要為序數、時間量的乘法及時刻與時間量的加法，為了符合真實情境，題目主角到達電信公司的時間顯示在號碼牌上，若學生沒有注意號碼牌上的資訊則無法解題。

試題 8 電信公司號碼牌

叔叔到電信公司辦理行動電話續約，右圖是他抽到的號碼牌，叔叔抽完號碼牌後，抽號機顯示還有 15 人等待中。

1. 下一個到櫃台辦理業務的號碼是幾號？
2. 櫃台大約每 3 分鐘會叫下一號到櫃台辦理業務，叔叔能在 16:00 前離開電信公司嗎？



三、生活經驗

由於許多機關行號都使用號碼牌，筆者簡化試題 8 的情境，將場景及活動換成學生更為熟悉的郵局寄信，並修改評量的數學概念為一年級序數問題，形成試題 9 的「郵局排隊」。試題 7 其實與一年級數學課程中的序數問題類似，僅是在問題描述上更符合現實生活情境的方式呈現。

試題 9 郵局號碼牌

李老師到郵局寄信，先抽號碼牌，再看叫號燈。還有幾個人排在李老師前面等著寄信？

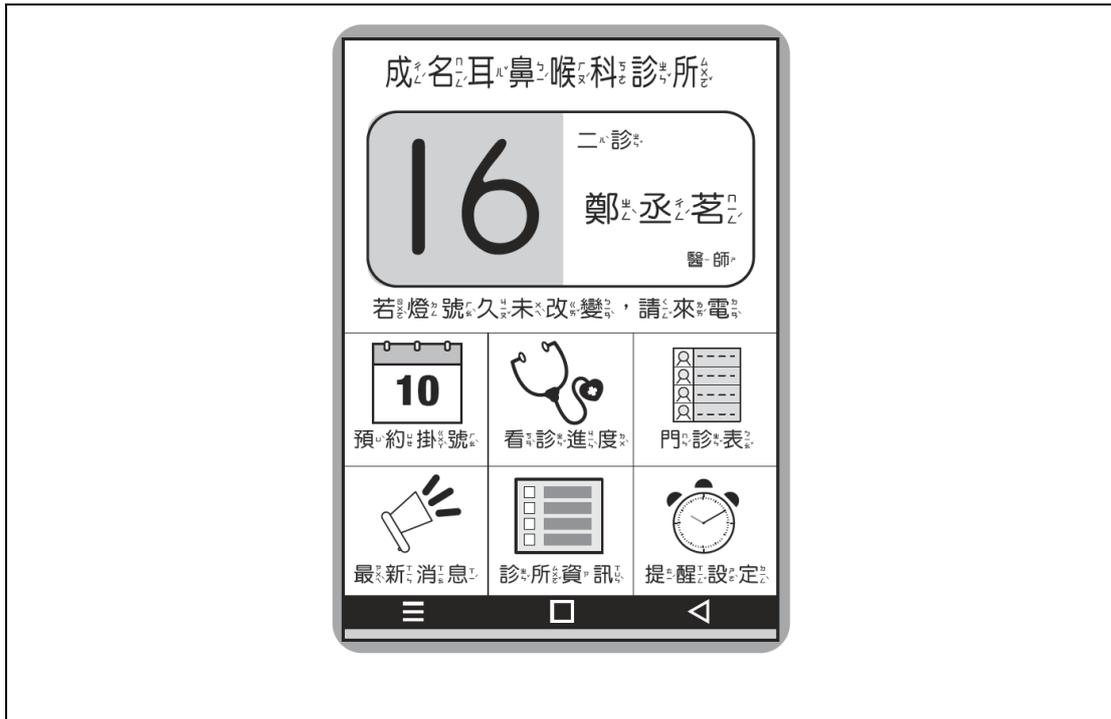


試題 10 與試題 9 類似，利用學生從小到大一定會有的看病的經驗，情境設定為家長先預約掛號，等時間差不多後再出發去醫院或診所，評量一年級排隊序數問題。和試題 9 不同的是，試題 10 不採用號碼牌，使用現代人生活中不可或缺的手機 APP 作為問題情境。

問題 10 診所掛號

小波生病了，媽媽打電話到診所掛號，小波是 24 號。

媽媽打開診所的即時看診 APP(如下圖)，小波的前面還有幾個人正在等待看診？



四、應用程式

現代人常用使用及依賴手機中的應用程式，除了看診即時訊息能縮短在醫院就診的等待時間外，即時公車資訊則為公車族不可或缺的應用程式之一。試題 11 利用即時公車資訊應用程式作為命題情境，要求學生根據題幹中的資訊，計算從家裡出發的時間，評量學生時間量與時刻加減的概念。由於並非所有的學生都熟悉公車應用程式，因此在圖中增加到站時間的說明，避免學生因為不具備此類應用程式的經驗而無法解題。此外，題幹中並沒有說明現在時刻，學生需要從手機圖示中找到相關資訊，否則無法作答，考驗學生對於資訊的解讀能力。

試題 11 公車 APP

媽媽想帶小波搭 295 號公車到動物園玩，從家裡走到離家最近的景文中學站需要 8 分鐘，媽媽查了公車時刻，想提早在公車到站之前 5 分鐘抵達站牌，如果要搭下一班公車，最晚什麼時候要從家裡出發？

續下頁

公車剛過了！
下一班還要再等56分鐘。

公車正在政治大學站，
到大誠高中站還要再等1分鐘。

| 時間 | 站名 |
|------|----------|
| 53分 | 忠順廟 |
| 54分 | 司法新村 |
| 55分 | 景文中學 |
| 56分 | 木南公園 |
| 56分 | 指南路口 |
| 進站中 | 政治大學 |
| 即將進站 | 萬興圖書館 |
| 1分 | 大誠高中 |
| 2分 | 萬壽橋頭(秀明) |
| 3分 | 萬壽橋頭(新光) |
| 4分 | 貓纜動物園站 |
| 5分 | 捷運動物園站 |

到站時間已更新

自 2020 年起，全球因為 Covid-19 病毒肆虐，導致生活習慣改變，很多應用程式進而崛起，訂餐 App 即為其一。問題 12 延續問題 11 的手機應用程式情境，透過訂餐 APP，評量學生時與分的換算，及日常生活的時間加法問題。

試題 12 訂餐 App

由於疫情的關係，許多店家都推出線上點餐服務。下圖是小貝正在用店家的線上點餐系統訂購午餐的畫面。如果小貝現在馬上點餐，大約幾時幾分可以取餐？

10:30

預訂外帶

取餐等待時間
盡快(預估半小時)

| | |
|-------|-----|
| 牛肉鍋燒麵 | 110 |
| 咖哩燴飯 | 105 |

在網路發達的世界中，大多數人遇到自己不曾經驗的事物時，通常在第一時間會考慮上網看看他人的經驗與評價，其中「星等」為網路世界中表徵經驗好壞的常見方式。試題 13 將星等納入問題情境，評量學生平均的概念，及四捨五入法對小數取概數的能力。由於並非所有的學生都了解星等的意義及計算方式，因此在題幹中加入星等表徵的解釋（如：評分人數，滿分及得分）。此問題除了情境符合大眾日常生活外，亦可視為 Jablonka（2003）的「評估數學」面向中的用指標進行推理。

試題 13 星等

下面是水果旅店旗下 2 間分店的網路星等評價：



水果旅店平均的網路星等評價是多少？（算到小數點後第二位，四捨五入到第一位）

五、競賽

各類競賽（如體育競賽，唱歌比賽、語文競賽等）的評分與數字脫離不了關係，部分運動比賽（如跳水、滑冰等）為了公平起見，會刪除每位選手得到的最高與最低二個無效分後，再進行評比，問題 14「歌唱比賽」即採用此評分方式。本題要求學生評估丁選手是否可能奪冠，主要的評量重點為學生是否能「在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的應用（數-E-A3）」，解題所需的數學能力僅為基本的加法及三位數的大小比較，但若學生僅考慮分數的可能性，忽略最高或最低無效分數的處理，則無法做出正確的判斷。

試題 14 歌唱比賽

有一個歌唱比賽的計分方式，是刪除選手獲得分數中最高分與最低分後，計算

續下頁

剩餘得分的總和做為該選手的得分。

下表為四位選手的分數即時紀錄(記分板上尚未呈現評審 B 給選手丁的分數):

| 評審 選手 | A | B | C | D | E |
|----------|----|----|----|----|----|
| 甲 | 89 | 76 | 83 | 90 | 86 |
| 乙 | 84 | 90 | 79 | 87 | 92 |
| 丙 | 75 | 87 | 82 | 86 | 89 |
| 丁 | 91 | -- | 79 | 83 | 86 |

1. 依照比賽的計分方式，甲、乙、丙三位選手中，哪一位選手獲得的成績最好？
2. 丁選手可能在這次比賽中獲得第一名嗎？

若將調整競賽問題中的數據，即可評量學生不同的能力，如試題 14「科學競試」。相較於試題 14，試題 15 的題幹中取消最高與最低無效分數的條件，且僅提供各項獲得的分數（一位小數），而非各個裁判給的成績，主要評量學生一位小數的加法能力。

試題 14 科學競試

有一個科學競試選手選拔賽，分為筆試與實作二部分，滿分 50 分，最後依二部分成績總分進行排名。目前參加決賽的 4 位選手成績如下：

| 選手 | 筆試(分) | 實作(分) |
|----|-------|-------|
| A | 38.5 | 47.9 |
| B | 43.6 | 46.3 |
| C | 39.5 | 47.7 |
| D | 45.2 | 44.5 |

此次競試的前三名分別是哪三位選手？

六、購物須知

跳繩為所有的學生在體育課均會進行的活動，然而多數學生並不明白如何將跳繩調整為最適合自己的長度。試題 16「跳繩長度」情境採用學生熟悉的跳繩情境，評量長度單位公尺與公分換算與比較，及長度倍數計算，由於學生可能無

法完全理解該如何設定跳繩長度的敘述內容，因此在題目中增加圖示。本題可以視為結合數學與體育二科目，也希望透過題幹敘述，增加學生對於跳繩長度設定的知識。

試題 16 跳繩長度

「跳繩長度有學問，採者上拉到腋下」
跳繩長度怎樣才剛好呢？
適合你的跳繩應該是當你的腳踩跳繩，將兩端
往上拉時，握把的兩端要剛好跟你的腋下一樣
高。



呈嘉從腋下到地面的高度是 120 公分，他不適合選哪一條跳繩？

| | |
|--|------------------------------------|
| 1. 繩長：2 公尺 90 公分 重量：120 公克 可自行剪裁 | 2. 繩長：230 公分 重量：100 公克 可自行剪裁 |
| 3. 繩長：280 公分 重量：242 公克 長度可調整 | 4. 繩長：3 公尺 重量：85 公克 長度可調整 |

筆者進一步延伸問題 16 的跳繩選用情境，搜尋日常生活用品中與身高體重相關的物件。問題 17「背包選擇」即與使用者的體重有關。本題使用的數學概念包含公斤公克的單位換算，整數乘以分數，乘法多步驟問題等。問題 17 與問題 16 相同，除了將背包選擇條件作為數學試題情境外，亦提供學生其他領域的知識。

試題 17 背包選擇

爸爸帶全家去逛運動用品店，下面是店裡牆上的海報內容：

為了保護脊椎，專家建議背包的適合重量如下：

- (1) 背包總重量不要超過體重的 $\frac{1}{4}$ 。
- (2) 空背包重量不要超過背包總重量的 $\frac{1}{10}$ 。

續下頁

(3) 登山時，背包總重量不要超過體重的 $\frac{1}{6}$ ，比較能應付臨時狀況。

運動用品店裡有 4 款背包的尺寸和重量：

| A: | B: | C: | D: |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 49×21×23(cm) | 31×13×19(cm) | 28×27×13(cm) | 40×13×30(cm) |
| 2 公斤 | 1000 公克 | 500 公克 | 1500 公克 |

如果依照店家的資訊，

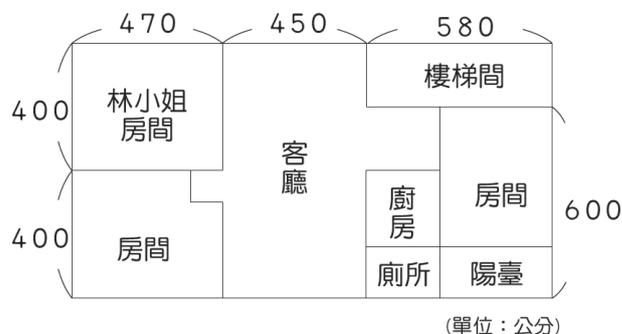
1. 媽媽 36 歲，體重 56 公斤，媽媽的背包總重量最多可以是多少公斤？
2. 體重至少要是多少公斤，才適合使用 A 背包？
3. 爸爸 40 歲，體重 96 公斤，假日計畫去登山，準備裝進背包的裝備共重 15 公斤，爸爸可以選擇哪幾款背包？

七、生活知識

量的測量或單位使用與我們的日常生活息息相關，試題 18 利用住家平面圖作為情境，平面圖中的單位採用藍圖繪製時使用的公分，評量學生長方形面積概念、複合圖形面積的計算、及平方公分與平方公尺的單位換算。學生呈現解題策略可能為整體平面圖扣除樓梯間，或是將客廳右側小長方形切割後合併至廚房區域，先計算切割重組後的二個長方形再加總。

試題 18 住家面積

下面是林小姐家的平面圖：



林小姐家（含陽台，不含樓梯間）的面積是多少平方公尺？

試題 19 與 20 均是評量生活中的大單位。試題 19 「老虎領地」利用生物屬

性，評量長方形面積概念、平方公里與平方公尺的換算，商為三位小數的除法，及用四捨五入法對指定位數取概數。由於大多數學生的平方公里概念較為薄弱，試題中藉由計算 20 平方公里是多少間教室的大小，增加學生對於平方公里的量感。

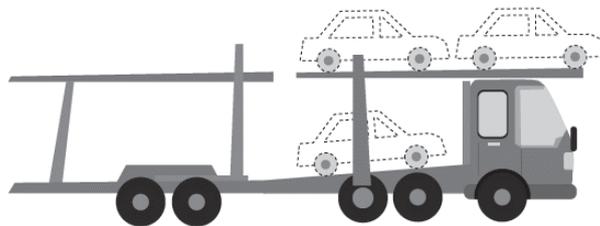
試題 19 老虎領地

一隻成年的雌虎一般的活動範圍是 20 平方公里的。一間國小普通教室的大小大約是長 9 公尺，寬 8 公尺。一隻成年雌虎的活動範圍大約是多少間教室？(用四捨五入法取概述到千位)

由於重量並非視覺量，「公噸」是學生所學的大單位中最無法產生量感的單位。為了評量公噸概念，試題 20 的情境設定為偶爾會在高速公路上的看到的車輛運出車及橋樑最高承載重量，評量公噸與公斤單位換算，計算多位數除法並根據情境設定決定餘數不為 0 時的答案的判斷處理。

試題 20 橋樑限重

下圖中的車輛運輸車空車重量為 12.75 公噸，每輛轎車重 1625 公斤。



有一座橋樑的最高能夠承受的重量為 25 公噸，如果這輛運輸車要通過這座橋樑，最多可以載運幾輛轎車？

肆、結語

在設計數學素養試題時，出題者可能會考慮受試學生的生活經驗可能不足，導致限縮出題時能使用的生活情境；或者認為數學素養試題是透過情境設定，將所欲評量的概念全部包裝於一個故事情境中，採用短文方式敘述問題情境，甚至誤以為題幹描述只要夠長即可被以視為素養試題。然而素養所指的生活經驗不一定是學生親身經歷的經驗，可以是他人的經歷，或未來生活會遇到的情境，因此只需要將情境描述清楚，讓學生有足夠的資訊可以解決問題即可。

在編製高品質的數學素養試題，以下幾點事項提供現職教師或師資生參考：

1. 時時留意生活時使用數字的情境；
2. 多關注生活周遭隱藏的數學概念；
3. 隨時蒐集可用的問題情境；
4. 試題情境不一定是受試學生親身經歷，可以是他人的經驗，或未來可能出現的情形。
5. 若受試學生不具備相關經驗，可以適時針對情境脈絡加以補充說明
6. 情境與數學的關聯性非唯一，可針對同一情境思考如何深化或簡化問題；

數學在我們的生活周遭無處不在，如能有效地將這些生活情境融入於數學素養試題之中，可以使學生感受到數學在生活中所扮演的角色，提高學生的數學學習興趣，以建立面對現階段生活及未來挑戰所應具備的知識、能力與態度。

伍、參考文獻

- 國家教育研究院 (2018a)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。取自 <https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/815/十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域.pdf>
- 國家教育研究院 (2018b)。素養導向「紙筆測驗」要素與範例試題(定稿版)。取自 <https://ws.moe.edu.tw/001/Upload/23/refile/8006/56181/50da6237-355a-4421-84bd-6fb8ab49f324.pdf>
- 教育部 (2021)。十二年國民基本教育課程綱要。取自 [https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/288/\(111學年度實施\)十二年國教課程綱要總綱.pdf](https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/288/(111學年度實施)十二年國教課程綱要總綱.pdf)
- 衛生福利部 (2020)。公告修正現場調製飲料標示規定。取自 <https://www.mohw.gov.tw/cp-4626-55898-1.html>
- Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75-102). Dordrecht: Springer Netherlands.
- OECD. (2018). PISA for Development Mathematics Framework. Retrieved from https://www.oecd-ilibrary.org/pisa-for-development-assessment-and-analytical-framework_5j8mznrw131.pdf
- Steen, L. A. (1990). Numeracy. *Daedalus*, 119(2), 211-231. Retrieved from <http://www.steen-frost.org/Steen/Papers/90numeracy.html>

劉祥通、章勤瓊（2022）。

兩岸師資生解基準化問題的表現與分析。

臺灣數學教師，43（2），75-97。

doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0005

兩岸師資生解基準化問題的表現與分析

劉祥通¹、章勤瓊²

¹國立嘉義大學教育系數理教育碩士班

²福建師範大學教育學院

摘要

基準化問題是小學高年級數學比較困難的題材之一，修習教育專業的師資生在基準化問題的表現值得進行調查和研究。本文從文獻中挑選了四個進階的基準化問題，以文字題的方式呈現形成任務單，以 147 位臺灣 68 位、大陸 79 位）小學教育的師資生進行開放作答。本文主要是分析台灣師資生的解答類型分類與統計正確率，並與大陸師資生做對比，其次各題的解析類型是經過兩位研究者分析，尋求共識獲得的結果。研究發現，四個問題的正確率在 33.8%-55.9%之間，遠比大陸師資生答對率低(65.8%-88.6%)；正確解題類型有三種：設基準量為 X、設基準量為 1、設特殊數值當基準量等；錯誤類型包括基準量指認錯誤、程序性知識與概念性知識不足以致未能克服解題障礙以及未發揮後設認知(元認知)的監控能力以致解題失敗。最後在討論中解析 2 個簡潔的解題策略，並找出 4 個解題失敗的關鍵點。

關鍵字：小學數學；師資生；基準化問題；解題表現

壹、緒論(研究動機、研究問題)

在大學修習師資培育課程的學生，在台灣稱為職前師資生，在大陸稱為師範生，為了一致性，本文在台灣出版，因此以「師資生」來稱呼。

美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM) 出版《學校數學的原則與標準》特別強調:評量應該支持重要的數學學習，以及提供有用的資訊給老師與學生(NCTM, 2000, P.22)。基於此論，師資生的數學解題表現也應提供給師資培育學者與師資生，做為教學與學習的改進。

一、師資生對基準化(標準化)問題感到困難

臺灣地區教科書描述兩量之倍數關係，用”基準量”來對比比較量的大小(比較量÷基準量=比率或比值)。大陸地區教科書則用”標準量”一詞，例如，比較量÷標準量=份數比(劉玲，2001)。比值(比率)的用語，大陸用「份數比」或「分率」來稱呼。

Freudenthal(1983) 用「Norming」以描述兩量對比能力的發展過程，Freudenthal 不是用「Standardizing」，也不是「Standardization」，因此作者翻譯「Norming」為「基準化」；再者，Lamon(1994)也用「Norming」一詞，以著墨兩量倍數關係的對比，強調「Norming」的能力是相對思考的能力與也是解比例問題的基礎。

美國的研究發現，教師與成年人對於分數乘法與除法的理解，非常有限(Armstrong & Bezul, 1995)。Ma(1999)也發現 43%的美國小學教師雖正確地計算 $(1+3/4) \div 1/2$ 的問題，但是不瞭解計算法則的理論基礎。

Lamon 的研究也指出了小學生分數基準化的困難(Lamon,2002)，例如，小明走了 $\frac{3}{4}$ 公里(千米)，發現走了全長的 $\frac{4}{5}$ ，請問全長多少公里(千米)？”此問題既不是等分除(Partitive division)，也不是包含除(Measurement division)的問題，而是探求單位比率(The determination of a unit rate)的問題(Sinicrope, Mick, 和 Kolb 2002)。此問題在臺灣的小學參考書稱之為”相當問題”，也就是已知的($\frac{3}{4}$ 公里)相當於全長的 $\frac{4}{5}$ ，多少公里相當於”全長 1”，此相當問題有比例推理的性質。大陸師資生對上述問題求解當然沒有問題，是否能夠知其所以然，而可以向小學生解釋清楚呢？

根據廖姍雯與劉祥通(2013)調查研究發現:師資生的基準化能力略顯不足，此研究通過問題:

蝸牛珍珍和蝸牛旺旺比賽跑步。比賽開始十秒後，珍珍跑了 $\frac{1}{7}$ 公尺(米)，旺旺跑了 $\frac{2}{11}$ 公尺(米)，請在數線上標示出起跑的位置，並說明你的策略(做法)。

此問題用來測試師資生的基準化能力，但台灣地區只有 68%的小學教育專業的師資生答對此問題。因此，師資生的基準化能力值得吾人繼續繼續關心。本文的任務單除了給台灣一所師培大學修習小學教育專業的學生解答，也以相

同問題給大陸一所大學教育學院修習小教專業之師資生(師範生)解題，以作為對比，期望研究結果能給師資培育單位與數學教育學者參考與改進之依據。

二、數學知識影響數學教學表現，師資生應有高觀點的數學知識

Ma(1999)強調深刻理解基礎數學，對於數學教學的重要性；唯有完全理解該題材，才能有良好的教學表達能力。Usiskin, Peressini, Marchisotto, & Stanley (2003) 主張數學教師應有高觀點(advanced perspectives)的數學知識，他們提倡：關注于數學原理與學校數學兩方面歷史以及概念的演進，才能勝任數學教學的任務。所謂高觀點的數學知識，該書鼓勵數學教師或師資生深度探討數學觀念(ideas)，並且清楚與精準地解釋數學想法；也期待教師或師資生能夠欣賞數學之美、數學的邏輯結構與應用。如果師資生有高觀點的數學知識以看待上述的分數除法，那麼他們的數學知識，將會幫助他們日後的數學教學表現。

三、研究問題

誠如上述，師資生的數學知識為數學教學的重要基礎。對於與小學高年級教材關係密切的基準化的問題，師資生的基準化問題的解題表現是如何？本文將用包含四個文字題的任務單來調查和探討兩岸修習小學教育的師資生在基準化問題的解題表現。

貳、文獻探討

基準化能力需要兩項先備知識，即相對思考能力與單位化能力。

一、相對思考能力

相對的思考能力指學生能瞭解情境中數量關係的相對性。Lamon(1995)認為相對思考能力和比值(比率)的單位化能力是解數量關係問題的兩個重要的思考策略。因為比例是一種比較性的指標，表示一個數量與另一個數量之間的關係，不只是單獨一個數量的改變，所以相對思考能力是解比例問題的一項重要基礎。

而比值是表示一個數值相對於另一個數值的相對大小，但是比例問題牽涉兩個比值的對等，因此“相對”正是比例問題中最重要概念。例如，一隻老鼠吃的量比大象還多，這樣的觀點是基於相對於身體的重量，不只是小的動物相較於大的動物活動量較大，也因為它們相對的面積大，比較容易流失熱量(van Galen 等，2008)。換言之，以相對的觀點，一隻老鼠一天所吃的量 \div 該老鼠的體積大於 $>$ 一隻大象所吃的量 \div 該大象的體積。

二、單位化能力與基準化能力

“單位化”(unitizing)是將單位結構逐漸建立複雜化的歷程，它是發展

更複雜推理的重要機制 (mechanism) (Lamon,1996)。例如，1 單位(24 罐)可樂可以看成 2 單位(12 罐)，3 單位(8 罐)、4 單位(6 罐)等。Lamon(1996)認為如果學生能夠彈性的看待以上單位量(多少罐)與單位數之間的關係，那麼該生對整數的單位化能力可說發展得很好。Lamon(1993)以 16 個物件為例，它可以看成 16 組 1 個單位物件，也可以看成 4 組 4 個單位物件；再發展找出 16 個物件的 $\frac{1}{4}$ (4 個物件)，進而找出 16 個物件 $\frac{2}{4}$ (8 個)與 $\frac{3}{4}$ (8 個)等。簡單的說， $\frac{3}{4}$ 可以看成 3 個 $\frac{1}{4}$ ，繼續發展下去，又可以彈性地看成 6 個 $\frac{1}{8}$ 等等，此乃分數單位化的表現。Lamon(2002)強調單位化成功說明學生可以將分數看成一個數(a fraction as a number)，不是兩個數的組合。學習者單位化的範圍或目標，從整數擴及到分數、小數、與變數等等，單位化的能力是基準化能力的基礎。

“基準化” (norming) 是採取“單位”的架構以概念化其他的情境；例如，“將地球的大小想成像一根針頭那樣大(大約 1 毫米)，然後根據這樣的定義重新看待整個太陽系的大小，那麼太陽就變成是直徑只有 10 釐米的球體，且太陽與地球的距離也變成只有 10 公尺(米)而已”(Freudenthal, 1983)。這以一個基準量(標準量)來推算其他量的方法，是一種“基準化”的過程，在學習數學中是很普遍的思考方法。以往的教學案例中已有這樣的思考方法，但未用“基準化”的術語。例如，黃武雄(1995)用颱風暴風半徑 200 公里(千米)與臺灣島長 500 公里(千米)做比較，以幫助理解颱風暴風半徑大致上有多大？他特別強調，“比較是知識的基礎，也是同化的手段”。這裡的說法是“比較”，即是用“基準量”去比較的“基準化”過程。

Lamon(1994)指出:分數除法的理解與基準化的能力關係密切；以 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}=?$ 到底 $\frac{3}{4}$ 包含了多少個 $\frac{1}{2}$? 此 $\frac{1}{2}$ 是一個單位整體(unit whole)，而 $\frac{3}{4}$ 被此單位整體($\frac{1}{2}$)重新詮釋(re-interpreted)成為 1 又 $\frac{1}{2}$ 個。研究者認為此單位整體($\frac{1}{2}$)，大陸的教師與學者稱為「單位一」。如果將「單位一」改為「新單位一」也許更為恰當，而 1 又 $\frac{1}{2}$ 個稱為「份數比」。

劉祥通(2007)以較複雜的分數 $\frac{4}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{16}{15}$ 為例，視“ $\frac{3}{4}$ ”當基準量，用來比較“ $\frac{4}{5}$ ”，即為“ $\frac{4}{5}$ ”裡包含著“ $\frac{16}{15}$ ”個“ $\frac{3}{4}$ ”；此種詮釋，對於多數師資生來說，未曾想到以“除數”當作新單位，去解釋“被除數”有多少個新單位，此新單位即是“商數”。

Thompson(1995)提出: 數學裡的大概念(big ideas)不是在演算法中被發現，而是我們如何去看見，因此幫助學生以量化的觀點看待周遭的世界(see the world quantitatively)，此量化推理不在數，而在物件(objects)，或量度(measurements)以及它們之間的關係。

Thompson(1995)巧妙地設計一個具象的圖(見圖 1)，給學生看乘法關係內的“部分(parts)”與“整體(wholes)”，其目的是要學生能夠精準的找出基準量與比較量，以發展出完整的基準化的能力。

問題 1:你看到 $\frac{3}{5}$ 的 $\frac{5}{3}$ 嗎?

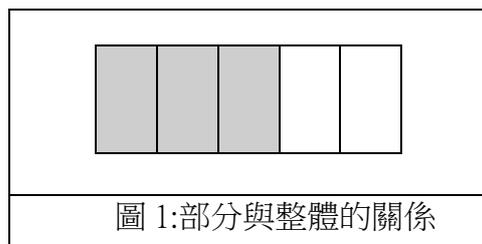
分析:回答此問題，學生要能夠以 5 個小單位找到 $\frac{3}{5}$ ，其次從 3 個小單位，

再找出 $5/3$ 倍，再得到 5 小個單位；

問題 2: 你看到 $1 \div 3/5$ 嗎?

分析: 回答此問題，學生要能夠以 $3/5$ 個大單位(3 個小單位)當作基準量，以找到 1 個大單位(5 個小單位)當作比較量，進而發現比值是 $5/3$ 倍。

以上問題，學生要彈性地看見”基準量”以尋找”比較量”，進而得到比值或成為幾個”份數比”的問題。換句話說，唯有能夠彈性地確認出基準量與比較量，才能解答複雜的基準化應用問題。



大陸教師提出一個例子「8 比 9 少 $1/9$ ，此 8 是比較量，9 是標準量(基準量)，9 是單位 1，此 $1/9$ 是份數比」(劉玲，2001)。

此例的確困擾很多學生與成年人，明明 8 比 9 少 1，怎麼會是少 $1/9$ 呢? 理由是: 把 9 當作基準量，看成單位 1，少的 1 是相對於 9(基準量)是 $1/9$ (份數比)；相對地 9 比 8 多 $1/8$ ，此時 8 是標準量(基準量)，將 8 看成是單位 1， $1/8$ 也是份數比(比值)。以上例子缺乏具體的物件與量度的情境較為抽象，對小學生而言尤為深奧。水結成冰時，體積會增加 $\frac{1}{11}$ ，若冰融化成水時體積會減少多少?(林錫麟，2007)，此應用問題有較具體的情境，或許對於解題者沒有那麼「去情境 (de-contextualization)」的感覺。

以上有很多不同的單位與單位的轉換，處理複雜的單位是學習數與量必經的過程。Steffe(1994)也強調有理數的推理的基礎在於學生能夠處理複雜的單位 (complex units)。

三、解文字題的表現

關於文字題的理解困難，Cuoco(2008) 指出兩個共同的問題: 不熟悉問題的情境，另一種是一般性的閱讀困難。

美國國家教育進展測驗(National Assessment of Educational Progress 簡稱 NAEP) 提供以下二例以說明不熟悉問題的情境(Kouba, Zawojewski, & Strutchens, 1997):

(1) 甲吃一塊披薩的 $1/2$ ，乙吃另一塊披薩的 $1/2$ ，請問誰吃的比較多? 請用圖形、數位與文字解釋你的答案。

此披薩比較問題，未說明甲、乙二人所吃的披薩大小是否相同，困擾了四年級學生，答題令人滿意與非常滿意者只有 24%。

(2) 甲乙兩候選人競選，甲獲得男性 48%，與女性 55% 的選票，請問甲的票數會高於乙?

此選票比較問題，未提供男性與女性的票數，困擾 12 年級學生，只有 26% 學生回答需要知道男性與女性的票數，否則無從判斷，此問題雖無測驗師資生的資料，可以推定師資生對此問題可能也有挑戰。解此問題，基準量的指認與察覺是能否成功解題很關鍵的因素。

當學生遇上不熟悉的問題情境，Cuoco(2008)建議教學時採取「猜測(guess)、檢查(check)、一般化(generalize)」的解題法或教學法。此法雖是耗時，卻可以配合學生的認知程度。

其次是一般性的閱讀困難，有的學者提出理解題意，有的強調問題轉譯與整合，也有強調要有豐富的資源與背景知識。

Polya(1957)建議在解題教學時分成理解題意(Understanding the problem)、擬訂計畫(Devising a plan)、執行計畫(Carrying out the plan)與回顧答案的合理性(Looking back)四個步驟來引導。Schoenfeld(1985)提出影響解題行為有四個因素，分別為資源(Resource)、捷思(Heuristics)、控制(Control)與信念系統(Belief system); 而“資源”(先備知識)是與閱讀理解能力最為相關的因素。

Mayer(1992)主張文字題解題的過程分成四個階段:問題轉意(Problem Translation)、問題整合(Problem Integration)、計畫與控制(Planning and Monitoring)、與執行(Execution)四個步驟。Lester & Kroll (1990)提出的以下例子可以呼應問題轉譯與問題整合:

莎莉每週有 5 元美金的零用金，有一周她的母親給她是零錢，分別是 25 分硬幣(0.25 元)、十分錢(0.1 元)、與鎊幣(0.05)元總共 24 個，請問她母親這周給的各種零錢分別有幾個? 解這個問題需要將線索個別轉譯，也要把兩個線索(共 5 元美金與 24 個硬幣)結合起來。

Mayer(1992)更進一步指出解文字題需要程式性知識(procedure knowledge)、語言知識(linguistic knowledge)、語意知識(semantic knowledge)、基模知識(schematic knowledge)與策略知識(strategic knowledge)。

Barton, Heidema & Jordan(2002)提出:數學閱讀需要豐富的數學基模做為基礎，數學文本中的詞彙(vocabulary)與敘述(statement)都蘊含數學概念，解題者對於詞彙與敘述進行解讀後，才能理解，進而解題。例如，題目中的“課稅”、“折扣”、“省下百分比”、“哪一方案較划算?”。

因閱讀錯誤導致解題失敗的例子很多，縱使資優(尖子)生也不例外；王仁郁(2019)的研究發現:資優生也會因閱讀理解錯誤，導致基準量指認錯誤，而導致解題失敗；他還發現題目中提供圖形以說明理解，能大大增進解題表現。

關於基準化文字題的解題方法，Boaler(2015)的例子如下:

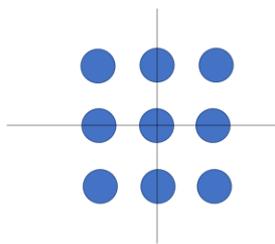


圖 2:一位學生的自創解法

一位男士到店裡買火雞片，3 片的重量是 $1/3$ 磅，但是他的飲食只能吃 $1/4$ 磅，請問他可以吃幾片？

一位四年級生自創的算數視覺解法：

3 片有 $1/3$ 磅， $\Rightarrow 1$ 磅=9 片(畫出 9 個圓圈) $\Rightarrow 1/4$ 磅= $(2 + 1/4)$ 片(如圖 2)。此解法先用倍數法(比例法)求出 1 磅相當於 9 片，而 $1/4$ 磅相當於 $(2 + 1/4)$ 片(用十字線切割九個圓)。看了此解題方法，吾人可以發現此問題也是一種“相當”問題。此法很直觀，利用此法也許可以幫助很多學生獲得有意義的學習，如果教師在行間探訪而獲得此法，意義化之後要珍惜它，也要表揚以鼓勵該生與其他學生創造自己的解法。

Haylock(1995)強調:當標準量改變時，解題者是否能正確指認基準量是解題的關鍵。例如，Haylock(1995) 提出這樣的問題，上個月一個物品售價 200 英鎊，這個月增加 10%，下個月減少 10%，請問後來增加或減少多少百分比？這樣的問題困擾很多人，它給定已知量，形容改變量多少的問題，就是一種相對思考問題，也是基準化的問題。解決這樣的數量關係問題，需要培養基準化的能力。

Van den Heuvel-Panhuizen (2004) 也設計一個開放式評量問題:以加量 25%脆餅乾，價格不變，請問相當於多少折扣? 以上問題給 39 位五年級學生作答，28 位答錯者的回應迥異，可見學生的思考層次與解題路徑大大不同，值得給教學者分析與探討，以瞭解學生的解題想法。

參、研究方法

本文旨在探討師資生在基準化(標準化)問題的解題表現，採用調查法，設計開放式的任務單給兩岸師資生求解，施測對象為台灣一所師資培育大學小學教育學程的 68 位，對照組為大陸某城市的市級大學 79 位教育學院小學專業方向的師資生，共 147 位。

測試時間都為 40 分鐘。根據學生的答案，由兩名研究者共同進行解題類型分析，希望找出他們使用的解題類型(策略)，並解析各錯誤類型的可能因素，以及並統計出各類型的人數。

一、任務單的設計

基準化問題是小學高年級學生的學習題型，解決普通的基準化問題是在師資生的能力範圍內的。為了考驗師資生是否有更高一層的數學能力，研究者從文獻中挑選了比較困難的與基準化問題有關的四題應用題組成一份任務單，此任務單給師資生開放作答。此四題的題目與特點分述如下：

(一)、水結成冰時，體積會增加 $\frac{1}{11}$ ，若冰融化成水時體積會減少多少？(林錫麟，2007)。

特點分析:這個題目是有情境的量化推理問題，前後兩個敘述的標準量與比較量剛好互換，求未知問題的比值，考驗學生能否正確從情境中指認出基準量，而求得新的比值與減少體積的百分比，也探討師資生的解題策略與方法。

(二)、某一品牌的奶粉，促銷期間加量 10%，但不加價，請問此促銷方案相當於省下多少百分比的開支？(Van den Heuvel-Panhuizen, 2004)

特點分析: 題目中牽涉到“容量”與“價錢”，問省下多少百分比? 其實就在考驗解題者能否連結兩個線索(容量增加 10%，價錢不改變)，處理兩種不同單位的量，以比較「單價」，對照出前後方案的價錢與容量之比率?

(三)、一位業務員，從一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的增長百分率，剛好都一樣，請問從一月到四月業績增長率上升(或下降)了多少百分率?)

表 1: 一位業務員 4 個月份的業績

| 月份 | 一月 | 二月 | 三月 | 四月 |
|----|----|--------|--------|----|
| 業績 | ? | 54,000 | 62,100 | ? |

特點分析:

每月的增長率相同，題目問一月到四月的增長率，一月與四月業績是未知，必須從相鄰兩個月的業績尋找增長率，以求出前後四個月的增長率是多少? 此題的起始值一月的業績未知，對於國小高年級生資優(尖子)生、中學一般生往往因迷思概念，而減去成長率 15%，對於師資生是否有困難? 其次，是否能將成長的百分率看成是倍數，正如分數看成是倍數 (fractions as multipliers)(Harel,1995)，而有百分率連乘的精簡策略?

(四)、根據某一項統計，黃金價格從七月份上升六月份的 15%，又從八月份下降七月份的 10%，假設九月份要回到六月份的黃金價格，請問從八月份到九月份的黃金價格是上升還是下降? 上升(或者下降)多少百分比?

特點分析: 此題的發想源自於股市上個月下跌 20%，這個月回到先前的價位，請問這個月上升多少百分比? 修改成:連續三次改變基準量的情境中，考驗解題者能否從長篇的文字題情境中找出正確的基準量，以得出業績上升或下降

的增長百分比。其次，根據計算結果八月份達到 1.035，九月份降回 1.0，學生會直接寫下降 0.35%? 還是找出基準量 1.035 再處理百分比的問題?

二、資料分析:

對 147 位師資生的解題表現分類的過程中，二位研究者在分析各題的解題類型時發現，各題的解法有共通性，大略可以分成三種類型：1. 代數列式，2. 設基準量為 1，3. 尋找特殊數值法(例如，假設水的體積為 11，結冰後的體積為 12)。然後再將各類進行細分，並探討解析差異、統計各類型的人次(答對率)，並附上大陸學生解題類型的人次當對照，從各類型中找出典型案例。最後，分析錯誤類型的可能原因，各題又附上幾位台灣學生的解答與表徵(代碼以 TW1-1，代表台灣師資生解第一題的第一位解答者)，幫助讀者了解該解題類型。可惜，因為掃描檔案的字跡不夠清楚，因此，恕本文不呈現大陸師資生的解答與表徵。

肆、研究結果分析

以下是對 68(對照組 79)位被測師資生的測試結果，根據他們在任務單的四題中各題的解題情況，進行了解題類型的分析。

第(一)題：當水結成冰時，體積會增加 $\frac{1}{11}$ ，若冰融化成水，體積會減少多少？

表 2: 第(一)題解題類型與人數對比

| | |
|-------------------------------|---|
| 類型 1：解題正確，以一當作基準量，正確列出關係式。 | |
| 人數：21(44) | 例如：將水的體積當成 1 單位，冰的體積為 $\left(1 + \frac{1}{11}\right) \times 1 = \frac{12}{11}$ ， 而冰融化成水時體積減少 $\left(\frac{12}{11} - 1\right) \div \frac{12}{11} = \frac{1}{12}$ 。 |
| 類型 2：解題正確，利用未知數 x ，正確列出關係式。 | |
| 人數：4 (23) | 例如：設水的體積為 x ，冰的體積則為 $\frac{12}{11}x$ ， 而冰融化成水時體積減少 $\left(\frac{12}{11}x - x\right) \div \frac{12}{11}x = \frac{1}{12}$ 。 |
| 類型 3：解題正確，用特殊數值代入求解。 | |
| 人數：3(3) | 例如：假設水的體積為 11，則冰的體積為 12， 所減少體積 1 為冰體積的 $\frac{1}{12}$ 。 |
| 類型 4：觀念錯誤，未指認出題目的基準量改變。 | |
| 人數：15 (6) | 例如：直接寫下 $\frac{1}{11}$ 。 |
| 類型 5: 列式正確，回答錯誤，未發揮元認知監控 | |
| 人數:2 (3) | 例如: W (水) $\times \frac{12}{11} = I$ (冰) , $I = W \times 11/12$, 答:11/12 |

續下頁

| | |
|-----------------------|--|
| 類型 6:: 看不出計算方法，或空白未作答 | |
| 人: 23 (0) | 看不出計算方法 13 位，空白 10 位； 此類型大陸師資生 0 位。 |

註解: ()內的數字代表大陸師資生的人數

此題的特點為基準量改變，有 28 位佔 41.2%(大陸 88.6%)師資生解題正確，正確類型大致分為以下三類:

類型 1: 師資生大多將水當成 1 單位，冰當作 $\frac{12}{11}$ 來進行計算。

類型 2: 設水的體積為 x ，冰的體積則為 $\frac{12}{11}x$ ，此為代數法。

類型 3: 其中台灣師資生有 3(大陸 3)位以特殊的數值 11 當作水的體積，12 就是冰的體積，冰溶化為水時體積又是 11，所以減少了 $\frac{1}{12}$ ，研究者認為此法是用特殊數值代入法。

類型 4: 而錯誤解答裡，大多數師資生 15(大陸師資生 6)位直接寫下減少 $\frac{1}{11}$ ，這是將基準量指認錯誤導致的；

一位學生(TW1-1)答案 水 $(\frac{10}{11})$ = 冰 $(\frac{11}{11})$ ，因此冰溶化為水後減少 $\frac{1}{11}$ (見圖 3)。

圖 3: TW1-1 解冰與水的體積變化

水與冰相差是 $\frac{1}{11}$ (減法思維)，但是依他的列式，冰為水的 $\frac{11}{10}$ 倍(乘法思維)，此生列式是減法思維，不是乘法思維。

類型 5: 未發揮後設監控，以致解答錯誤。

一位學生(TW1-2)的列式正確(如圖 4)，但答案錯誤 $\frac{11}{12}$ (正確 $\frac{1}{12}$)，此乃未發揮後設監控的表現。

$$\begin{aligned}
 \text{water} &\rightarrow \text{ice} \quad \text{volume increases } \frac{1}{11} \\
 W \times \left(1 + \frac{1}{11}\right) &= I \\
 \frac{12}{11} W &= \frac{I}{1} \\
 W &= \frac{I}{1} \div \left(1 + \frac{1}{11}\right) \\
 &= \frac{I}{1} \div \frac{12}{11} \\
 &= \frac{I}{1} \times \frac{11}{12} \\
 &= \frac{11}{12} I
 \end{aligned}$$

A: $\frac{11}{12}$

圖 4: TW1-2 未發揮後設監控的例子

第(二)題：某一品牌的奶粉，促銷期間加量 10%，但不加價，請問此促銷方案相當於省下多少百分比的開支？

表 3: 第二題解題類型與人數對比

| | |
|---------------------------------|--|
| 類型 1：解題正確，利用未知數，正確列出關係式。 | |
| 人數： 5(28)人 | 例如：假設原價為 A，原本的量為 B； 促銷價也為 A，加量後為 1.1B； 列出 $\left(\frac{A}{B} - \frac{A}{1.1B}\right) \div \frac{A}{B} \cong 9.09\%$ ， 以每單位價格算出省下 9.09%。 |
| 類型 2：解題正確，以特殊數值代入法求得解。 | |
| 人數： 15(17)人 | 例如：假設原來的量為 100，價格 100； 增量後為 110，而價格依然為 100(應該為 110)， 列出 $(110 - 100) \div 110 \cong 9.09\%$ ， 則省下的 10 元為 110 元的 9.09%，省下 9.09%。 |
| 類型 3：解題正確，以找單價(價格與容量)之比率，列出關係式。 | |
| 人數：4(7) 人 | 例如：假設原來的單價為 1，列出 $(1.1 - 1) \div 1.1 \approx 9.09\%$ ， 表示省下的 0.1 為 1.1 的 9.09%。 |
| 類型 4：未發現基準量改變。 | |
| 人數： 31(20)人 | 直接寫下 10% |
| 類型 5: 列式困難，或無法跨越障礙，或沒有作答 | |
| 人數： 13(7)人 | 假設該奶粉價格為 a，重量為 b 克；原奶粉為 $\frac{a}{b}$ 元/克，促銷奶粉 為 $\frac{a}{1.1b}$ 元/克；後續的計算過程錯誤，以致答案錯誤。 |

註解: ()內的數字代表大陸師資生的人數

此題是關於價錢與容量對比，解題正確的師資生有 24 位佔 35.3%(大陸 65.8%)，類型 1:大多以代數解法(假設未知數)，求出單價進行解題；
類型 2:是將價格與容量以實際數值(100)代入求解，
類型 3:求單價(價格與容量)之比率，此種解法可稱為特殊數值代入法。
類型 4:直觀認為了省下 10%，顯然，此等學生未察覺到基準量已經改變。台灣的師資生有 31 人佔了 45.6%，大陸師資生相對只有 20 位(25.3%)。

類型 5:列式困難、或無法跨越障礙，或沒有作答者，台灣計有 13 位，大陸 (7) 位。

一位學生(TW2-1)雖已列式原來單價為 $\frac{a}{b}$ 元/克，促銷單價為 $\frac{a}{1.1b}$ 元/克，他用促銷單價 \div 原來單價=1/1.1，可惜，卻不知如何解答省下多少百分比?

也有一位(TW2-2)，設原來為 $\frac{x}{y}$ 克/元，促銷為 $1.1 \times \frac{x}{y}$ 克/元，促銷/原來，得到買到 1.1 倍(克/元)，此生可能不會轉換為每克多少元(?元/克)，也就是關於單價的對偶性，不懂得利用倒數關係求出 1/1.1 (90.9% 元/克)，以回答省下多少百分比。

有二位計算上發現她已經設定加量後 110 克除以未加量 100 克得到 1.1，而將 1.1 倍看成是省下的 1.1%(TW2-3 見圖 5)，此解法雖代表已理解題意，但無法克服解題障礙。

$$\begin{aligned} 100g &\rightarrow 100元 \\ 110g &\rightarrow 100元 \\ 110 \div 100 &= 1.1 \\ A &= 1.1\% \end{aligned}$$

圖 5: TW2-3 直接回答省下 1.1%(無法克服解題障礙)

第(三)題：一位業務員，從一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的增長百分率，剛好都一樣，請問從一月到四月業績增長率，上升(或下降)了多少百分率(用計算器算到小數第二位)？

表 4: 一位業務員 4 個月份的業績 (與表 1 相同)

| 月份 | 一月 | 二月 | 三月 | 四月 |
|----|----|-------|-------|----|
| 業績 | ? | 54000 | 62100 | ? |

表 5: 第三題解題類型與人數對比

| 類型 1: 解題正確，依序列出各月份的業績後，求出前後之增長率。 | |
|----------------------------------|---|
| 人數： 33(57)人 | 例如：先算出增長率為 $62100 \div 54000 = 1.15$ ， 而一月業績 = 二月業績 $\div 1.15 = 4696.52$ ， 四月業績 = 三月業績 $\times 1.15 = 71415$ ， 四月業績 \div 一月業績 = $71415 \div 4696.52 = 1.52$ ， 表示四月業績為一月業績的 1.52 倍， 則上升了一月業績的 52%。 |
| 類型 2: 解題正確，直截連續乘三次，求出前後之增長率。 | |
| 人數：5(5)人 | 例如：先算出增長率為 $62100 \div 54000 = 1.15$ ，則四月業績為一月業績增長三次 $1.15 \times 1.15 \times 1.15 = 1.52$ ，表示四月業績為一月業績的 1.52 倍，則上升了一月業績的 52%。 |

續下頁

| | |
|---------------------------------|--|
| 類型 3：未充分瞭解題意(忽略了一月的業績才是問題的基準量)。 | |
| 人數：18(7)人 | 例如：列出 $(62100 - 54000) \div 54000 = 0.15$ ，表示三月業績上升了二月業績的 0.15，因業績增長率相同，則認為一月到四月的業績增長率依然為 0.15，則寫下上升 0.15 為答案。 |
| 類型 4：忽略題目的要求，未算出一月到四月的增長率 | |
| 人數：3(9)人 | 例如：以三月業績除以二月業績算出增長率，但只算出一月與四月的業績，未算出一月到四月的增長率。 |
| 類型 5: 人數 9(1)人 | 不會解題或看不出計算章法 |

註解: ()內的數字代表大陸師資生的人數

此題解題正確的師資生有 38 位，佔 55.9%(78.5%)。

類型 1：計算出一月與四月的業績後，再以四月份業績除一月份業績得到 1.52，故四月份業績上升了一月份業績的 52%。解題正確的師資生皆能察覺一月成長到四月時的基準量為一月份，進而正確求出答案。

設一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的成長百分率為 x

$$54000(1+x) = 62100$$

$$54000x = 62100 - 54000$$

$$x = \frac{8100}{54000} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

設一月到四月的業績成長率為 y

$$46956.152(1+y) = 71415$$

$$y = \frac{71415 - 46956.152}{46956.152}$$

$$= 0.52 = \frac{52}{100} = \frac{52\%}{100}$$

圖 6: TW3-1 的冗長解題過程

此生(TW3-1)答案正確，但是計算過程冗長，不夠精簡，成長率 1.15 倍，從三月除以二月之業績既得，何須列未知數 x 計算，再者既然已算出一、四月的業績(46956.12、71415)兩數相除即得 1.52，何須再列未知數 y 計算(圖 6)。可見此生程序性、甚至概念性知識之不足。

類型 2：只有 5 位師資生能察覺業績增長率相等，進而以二月到三月的增長率連乘三次後得到答案，此為精簡的解法(見圖 7，TW3-2)，可推測使用此解法的學生有較優異的數學能力。

答: 成長百分率
 $54000 \times (1 + x\%) = 62100$
 $(1 + x\%) = 1.15$
 $x = 15$
 \Rightarrow 成長百分率 15%

1月 $\Rightarrow m$
 4月 $\Rightarrow m \times (1.15)^3$
 $\frac{(1.15)^3 m}{m}$
 $= (1.15)^3$
 $= 1.52$
 Ans: 上升 52%

圖 7: TW3-2 的精簡解法

類型 3：直接以二月到三月的增長率 0.15 作為答案，主要錯誤解答是忽略題目的要求，可能誤認為平均成長率，可能認為業績長的圖的”斜率 (slope)” 1.15，卻未算出一月到四月的增長率，另一種可能，也許是忽視了應改以一月份的業績當基準量，此也算是後設認知(元認知)監控的疏失。

類型 4: 忽略題目的要求，沒有回答問題，未發揮元認知的功能。

一位學生(TW3-3)算出一月與四月的業績，可能未回看題意，以為回答一月與四月”?”的欄位，即為所求。

類型 5：解題看不出章法者有 9 位之多，大陸師資生只有 1 位。

第(四)題：根據某一項統計，黃金價格從七月份上升六月份的 15%，又從八月份下降七月份的 10%，假設九月份要回到六月份的黃金價格，請問從八月份到九月份的黃金價格是上升還是下降？上升（或下降）多少百分比？

表 6：第四題解題類型與人數對比

| | |
|-----------------------------|--|
| 類型 1：解題正確，利用未知數，正確列出關係式。 | |
| 人數： 10(34)人 | 例如：設六月份價格為 A ； 七月份價格為 $B = A \times 1.15$ ； 八月份價格為 $C = B \times 0.9 = 1.035A$ ， 下降了 $\frac{(1.035A - A)}{1.035A} \approx 3.38\%$ 。 |
| 類型 2：解題正確，以 1 為基準量，正確列出關係式。 | |
| 人數： 6(16)人 | 例如：設六月份價格為 1 單位； 七月份價格為 $(1 + 15\% = 1.15)$ ； 八月份價格為 $(1.15 \times (1 - 10\%) = 1.035)$ ； 則九月份價格為 $1.035 \times (1 - x) = 1$ ， 得 $x \approx 0.0338 = 3.38\%$ 。大約下降了 3.38%。 |
| 類型 3：解題正確，以特殊數值代入求解。 | |
| 人數：7(3)人 | 例如：設六月價格 100 元；七月價格為 115 元； 八月價格為 103.5 元；九月價格為 100 元； 列出 $(103.5 - 100) \div 103.5 \times 100\% \approx 3.38\%$ ， 下降了約 3.38%。 |

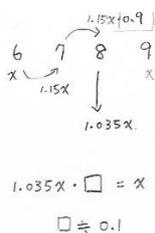
續下頁

| | |
|-----------------------|---|
| 類型 4:未監控答案合理性，以致解題錯誤。 | |
| 人數： 15(9)人 | 例如：設六月份價格為 1； 七月份價格為 1.15 八月份價格為(1.15 × 0.9 = 1.035)； 最後列出 $\frac{1.035-1}{1.035} \times 100\% \approx 3.38\%$ ，(上升) 未發現應為八月份價格到九月份價格，應為下降。 |
| 類型 5:未察覺基準量改變，以致解題錯誤。 | |
| 人數： 3(11)人 | 例如：設六月份價格為 1 單位； 七月份價格為 1.15 八月份價格為(1.15 × 0.9 = 1.035)。 最後列出 $\frac{1.035-1}{1} \times 100\% = 3.5\%$ ， 未發現基準量應為八月份價格，分母應為 1.035，不是 1。 |
| 類型 6: 計算無章法，或未作答。 | |
| 人數：27(6)人 | |

註

解: ()內的數字代表大陸師資生的人數
解題正確者 23 位，佔 33.8%(大陸 67.1%)

類型 1:大多數假設六月份價格為未知數，計算出各月份之間的關係式進行解題。



A: 下降 9%

圖 8: TW4-1 以代數求解，觀念正確答案卻錯誤

此生(TW4-1)用代數解法求得八月 1.035X、九月 X 都正確，但是計算時□應該約等於 0.962，但是題目是下降多少?(見圖 8)，殊為可惜。

類型 2:次多以六月份的價格作為 1 單位來進行計算；

類型 3:有 7 位師資生(大陸 3 位)以特殊數值代入求解。

學生誤認為基準量為九月份價格，九月份價格比八月份多，經過計算後寫出答案為上升 3.38%，並未察覺基準量應該為八月份價格，而對於八月份價格來說，六月與九月份的價格皆為下降，答案應為下降 3.38%。

類型 4: 正確答案是下降 3.38%，此類型師範師可能以六月份當基準量，回答上升 3.38% 的學生，其實題意是以八月份當準量。此歸因於未發揮後設認知(元認知)，以致解題錯誤。

類型 5: 基準量不斷改變的情境，未察覺最後的基準量是 1.035，不是 1。

類型 6: 計算無章法，或未作答。台灣的師資生有 27 位師資生，大陸師資生只有 6 位

分比? 假設六月 gold price x

六月: x

七月: $x + \frac{15x}{100}$

八月: $x + \frac{15x}{100} - \frac{1}{10} \left(x + \frac{15x}{100} \right)$

九月: x

$$x + \frac{3}{20}x - \frac{1}{10}x - \frac{3}{20}x$$

$$= x + \left(\frac{15}{100}x - \frac{10}{100}x - \frac{6}{100}x \right)$$

$$= x - \frac{1}{100}x$$

A. 下降 1%

圖 9: TW4-2 無章法的計算過程

此生(TW4-2)設定六月為 X ，七月為 $X + 15X/100$ (應該寫 $1.15X$)，八月列出了四項(可以 $1.15X \times 0.9 = 1.035X$)，最後也用錯了基準量(不是 X ，而是 $1.035X$)(見圖 9)，可見此生計算能力與概念性知識都不足。

又有一位師資生(TW4-3)有好多步驟的處理，例如六月設為 X ，七月份 $X + 0.15X = 1.15X$ 、八月 $1.15X - 0.115X = 1.035X$ (應該 1.15 直接乘以 0.9)，可見該生沒用百分率相乘，他的概念性知識可能不充足。

另有一位(TW4-4)的答案很特別(下降 5%)，其中一位認為六月到七月上升 15%，七月到八月下降 10%，合起來上升 5%，九月應是下降 5%，才回到六月的水準。此生想法很特別，各月份不斷改變，他不是採用百分率乘法，而是相加減，可見該生的乘法概念發展並未周全。

伍、結論與討論

一、結論: 先針對四個問題的解題表現與與答對率做簡要的總結，並找出幾個解題錯誤中的現象。

(一)在題目(一)、基準量指認情境中，較不易察覺基準量的改變，必須知道冰融成水後的基準量是誰。未能指認出題目的基準量改變，以致無法正確解題，台灣師資生有 15 位(大陸 6 位)。答對率台灣 41.2%(大陸 88.6%)。

(二)在題目(二)，奶粉加量不加價，或減量不加價，要能洞察以比率(單價)進行比較；也就是利用原始的單價，與改變後的單價進行比較，得知改變後為減少或增加多少百分比。但是列式困難，無法跨越障礙，或沒有作答，台灣多達 13 (大陸 7)位。答對者 52 人，答對率只有 35.3%(大陸 65.8%)。

(三)在題目(三)，特別是起始與最終的基準量都未知，有 57 位學生能從二月找一月的基準量，三月找四月的最終量，而成功解題。更重要考驗學生可否聚焦：既然連續增加相同量，可用比值連乘法解決問題，可惜台灣與大陸僅有 5 位使用此策略，此題答對者台灣師資生答對率 55.9%(大陸 78.5%)。

(四)在題目(四)，此題解題過程中牽涉到多次基準量的改變，考驗解題者能否從題意中辨識出最後問題的基準量。此題台灣師資生計算無章法，以致無法克服解題障礙，或未做答者，多達 27 位(大陸只有 6 位)。台灣師資生解題正確人數為 23 位(大陸 53)，答對率 33.8% (大陸 67.1%)。

以上四題，答題正確的方法與預試時的發現並無差異，大致分成代數法、假設基準量為 1、與特殊數值帶入法，此三種方法是否有高下與程度之分？以第三題為例，設六月基準量為 1(七月為 1.15，八月為 1.15×0.9)，這是基準化成功的表現，不是類變數思考(quasi variable thinking)(Fujii & Stephens, 2008)，更不能說是算術法；至於特殊數值帶入法，學生利用關鍵數值，省下了繁瑣的計算，可謂洞察力的展現。因此本研究對於師資生以上三者方法，並沒有高下之分的結論。

從答對百分率與上述的分析，台灣師資生的解題表現不理想(33.8%-55.9%)，比大陸地區低落，值得數學教育界關切，此外本文也指出以下幾個現象的差異。

1. 相較大陸師資生，台灣師資生對於任務單的問題，指認基準量上有困難的比率比較高(第(一)、(二)與(四)題，表2、3與6)。
2. 相較大陸師資生，台灣師資生，計算到一半，無法克服解題困難的比率比較高(第(二)、(四)題)。
3. 相較大陸師資生，台灣學生不會解題，留下空白的比率比較高(第(一)題、表2)。
4. 相較大陸師資生，台灣師資生，概念性知識與程序性知識不足的比率比較高(第(二)與(四)題，表3與6)。

二、討論: 又分成二部分，討論(一) 解析簡潔的解題策略與(二) 討論解題失敗的因素

討論(一) 解析簡潔的解題策略

1. 洞察到特殊數值，以解答問題

在題目(一)，假設水的體積為 11，改變後的體積為 12，與題目(二)中，也

有學生洞察到將基準量假設為特殊數值(價格 100 元, 重量 100 克)進行解題, 希望所代入的數能讓運算簡單, 因此將數值假設為易算之特殊數值。

Lamon(1995)的研究發現, 16 盎司(ounce)的穀物早餐盒價格 3.36 美金, 與 12 盎司(ounce)的穀物早餐盒價格 2.64 美金, 買哪一種比較划算的問題? 有些學生發現, 為了比較方便計算, 捨掉價格除以 16 與 12 盎司的計算, 直接分別除以 4 與 3 來比價; 此洞見(以特殊數值解決問題)建立在單位量的改變(reuniting)的能力已發展成功(Lamon,1999)。如果教學者發現學生有此創造的表現時要表揚這些提出洞見者, 以鼓勵更多學生勇於創造另類解法。

關於洞察到特殊數值, 在李佩樺與劉祥通(2008)的例題: “林家三姐妹, 每個月零用錢的總和為 6600 元; 已知大姐零用錢的二倍是二姐零用錢的三倍, 二姐零用錢的四倍是小妹零用錢的五倍。請問大姐每月零用錢有多少元?”。一位資優生巧妙地將二姐假設為 10 份, 則大姐為 15 份, 小妹是 8 份, 順利找出三者之間的關係, 總共 33 份相當於 6600 元, 得到大姐 3000 元、二姐 2000 元與小妹 1600 元。此乃洞察到特殊數值滿足題目的數量關係, 成功解題的例子。

可見洞察到問題的線索, 以特殊數值求解為有效率的解題策略, 但是成年人學了許多的公式與約定俗成的方法, 往往失去了洞察力, 也耗費很多解題時間。洞察到特殊數量, 可以簡化解題步驟或減低計算的冗長。

2. 採用比值連乘法, 壓縮過程, 快速解題

透過簡化(curtail)數學的過程, 力求清晰晰(clarity)、簡潔(simplicity, economy)且合理的解法, 這是資優生(尖子生)用此壓縮(curtailment)的方法解題(Krutetskii, 1976)。在題目(三)中, 台灣與大陸師資生, 各有 5 位採用此簡潔的方法解「比值」連續相乘之問題。

連續三個比值相乘可以得到前後四個月的比值, 這是簡化的壓縮過程; 解題者在解題當下往往沒有察覺到最簡潔的方法, 但是教師如果在解題教學時, 督促學生反思, 壓縮過程的解法是可以被理解的; 其次, 教師如果沒有充裕的時間可以給時間反思, 請這些學生分享他們的方法, 如此也算是一種鷹架(腳手架)(scaffolding)的教學法, 可以擴大學習效果。

Hiebert 等人(1997)主張: 學習任務單應該鼓勵花時間反思(reflection)與溝通, 研究者也認同此主張。Hiebert 等人(1997)認為數學系統充滿了關係的連結, 任務單是聚焦學生的注意力在關係的連結, 關係的連結不是一蹴可及的任務, 因此任務單應該留下殘餘物(residue), 所謂的殘餘物就是給學生繼續理解這些關係。

關於壓縮過程, 也有小學生會自發的使用「比值」連續相乘。李佩樺與劉祥通(2008)的例題: “林家三姐妹, 每個月零用錢的總和為 6600 元。已知大姐零用錢的 2 倍是二姐零用錢的 3 倍, 二姐零用錢的 4 倍是小妹零用錢的 5 倍。請問大姐每月零用錢有多少元?”。有一位資優生(尖子生)假設大姐為 1, 二

姐為 $\frac{2}{3}$ 份，小妹為 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ ，利用比值連乘法。上述大姊的 1，可以說是「單位一」，二姊的 $\frac{2}{3}$ 與小妹的 $\frac{8}{15}$ 是份數比，此『份數比』的說法呼應劉玲(2001)的用詞。

討論(二):討論解題失敗的關鍵因素。

1. 基準量指認

在題目(一)中，錯誤類型大多數人以水為基準量，而直接寫下減少 $\frac{1}{11}$ 作為答案，而正確應該是以冰的體積當作基準量進行解題，最簡易的途徑是：假設水的體積為 11，則冰的體積為 12，所減少體積 1 為冰體積的 $\frac{1}{12}$ ，台灣師資生的答對率 41.2%(大陸 88.6%)。以上是有問題情境的文字題，師資生難免犯錯，劉玲(2001)所舉的例子「8 比 9 少 $\frac{1}{9}$ ，此 8 是比較量，9 是標準量(基準量)，9 是單位 1，此 $\frac{1}{9}$ 是份數比」，相較於題目(一)，此例子少了情境的搭配，對於小學生更是難以理解，小學教師教學時對於基準量的指認，需注意比較量與基準量的對比，也須注意到單位量轉換的問題。

同樣也是基準量指認的問題，王仁郁(2019)的例題：“如果 1984 年的總收入減少 10% 為 1985 年，如果 1986 年和 1984 年一樣，請問 1985 到 1986 年間總收入上升或減少多少百分比？”。研究中十二位小學高年級資優生(尖子生)，解此題的答對者僅有 2 位(16.6%)，沒有意識到新的基準量是 1985 年(90%)，比較量為 1986 年(100%)，所以上升了 $\frac{1}{9}$ (約 11%)，此乃基準量指認錯誤而導致解題失敗。

2. 以價錢與容量的比率(單價)當作對照的依據

在題目(二)中，對於“加量不加價，省下多少百分比的問題?” 解題者需要跳過價錢與容量，洞見到隱藏的“單價”，否則難以克服解題障礙。Haylock(1995)以促銷方案的單價對照于原方案的單價，探討省下多少百分比。此種洞見的能力可謂問題整合(problem integration)的能力(Mayer, 1992)。如同下一個問題：在兩次行駛中，二次行駛距離相等，但是第二次的行駛時間比第一次增加 10%，請問第二次的速率比第一次改變了多少百分比? 解題者要運用兩次的距離除以時間之比，以求得速率之比。

從問題結構的觀點來看，以上二種問題是同構的(isomorphic)的問題(Reed, 1987;1999)。解上述兩個問題考驗學生是否能用整合題目中的資訊，以洞察出隱藏的量。

3. 未發揮後設認知(元認知)功能，以監控答案的合理性

解題目(三)時，台灣有 18 位(大陸 7 位)師範生解題錯誤，認為因業績增長

率相同，所以一月到四月的業績成長率依然為 15%，直接將單次的增長率視為一月到四月連續改變的增長率。這樣的迷思概念出乎研究者的預期，似乎看成是“斜率(slope)”的概念，沒有聯結到複利增長的觀念。後續研究可以追問學生的想法。有 10 位學生只求出一月與四月的業績，未檢視題目的要求，此類型可說是未發揮後設認知(元認知)監控的功夫，以致未竟全功。

解題目(四)時，台灣有 15 位(大陸 9 位)認為答案是上升 3.38%(應是下降 3.38%)，也是未發揮元認知的功能，以核對答案的合理性。另一種假設，如果題目中有提供折線圖，劃出六月 100%、七月 115%、八月 103.5%、九月 100%(與六月同)的相對位置，答錯的人數可能會降低。此折線圖可幫助理解題意，或可減輕認知負荷，進而影響解題表現。

以上是學生解題疏失或未回顧答案是否合理的例子，在經由解題的教學的論述理，Van de Walle(2004)強調學生解題後，回顧策略是必要考慮的；建議教師幫助學生學習監控解題進展，以及發展元認知的習慣。Van de Walle (2004)進一步強調發展後設認知(元認知)的能力，也是必須發展後設認知的習慣(metacognitive habits)，不只是在學校如此，校外的問題解決也要時時提醒自己。

4. 計算求解的困擾，概念性的理解不足，以致未能克服解題障礙

Wathall(2016)提出知識的結構(structure of knowledge)與過程的結構(structure of process)，此二種結構都強調概念(concepts)的支撐，有概念為基礎，才能產出原則的一般化(principle generalization)。例如，解題目(二)題促銷奶粉省下多少百分比？一位學生已列出：原奶粉單價 $(a)/(b)$ 元/克，促銷奶粉為 $a/(1.1b)$ 元/克；後續的計算過程繁瑣，以致答案錯誤。其實，只要有“單價比”的概念，後者(促銷單價)除以前者，即可得到 $1/1.1=90.9\%$ ，省下 9.1%，無須在繁分數中相減，而造成計算錯誤。而此題受計算困擾，或概念性知識不足，無法克服解題障礙的師資生，台灣高達 13(大陸 6)位。

美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)強調：達到計算的精準與流暢，雖是程式性的知識，要有概念性的理解作為基礎，才能有計算精準的表現(NCTM, 2014)。例如，解題目(四)，到八月份已計算出成長 1.035，九月份成長率為 p 回到原點，設 $1.035p=1$ ， p 即為所求，無須複雜計算。因此，追本溯源，概念性的理解是基礎功夫，是不可忽視的一環，缺乏此基礎，無法達到成功的解題。

致謝：感謝三位審查委員的卓見與用心，提供了很多寶貴的建議，使得本文得以有較完美的風貌以饗同道，在此致上萬分的謝意。

[參考文獻]

- [1] Armstrong, B. E. & Bezul, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. In J. T. Sowder & B. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp.167-198). Albany, New York: State University of New York Press.
- [2] Barton, M. L., & Heidema, C., & Jordan, D. (2002). Teaching reading in mathematics and Science. *Educational Leadership*, 60(3), p. 24-28.
- [3] Boaler, J. (2015). *What's math got to do with it? How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success*. New York: Penguin.
- [4] Cuoco, A. (2008). Introducing extensible tools in high school algebra. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 51-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [5] Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.
- [6] Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp.127-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [7] Harel, G. (1995). From naïve-interpretist to operation-conserver. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 143-165). Albany, NY: State University of New York Press.
- [8] Kouba, V. L., Zawojewski, J. S., & Strutchens, M. E. (1997). What do students know about numbers and operations? In P. A. Kenny & E. A. Silver (Eds.), *Results from the six assessment of educational progress* (pp. 87-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [9] Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Translated from the Russian by Joan Teller, edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirzup. Chicago: The University of Chicago Press.
- [10] Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 131 - 156). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- [11] Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany: NY, State University of New York Press.
- [12] Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany, NY: State University of New York Press.
- [13] Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170-193.
- [14] Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content

- knowledge and instructional strategies for Teachers. Mahwah, New Jersey :Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- [15] Lamon, S. J. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. (pp. 79-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [16] Lester, F. K. & Kroll, D. L. (1990). Assessing student growth in mathematical problem solving. In G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics* (pp. 53-70). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- [17] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New York: Routledge.
- [18] Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition (pp.458-460). New York: Freeman.
- [19] National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [20] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [21] Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.
- [22] Reed, S. K. (1987). A structure -mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 7, 102-115.
- [23] Reed, S. K. (1999). *Word problems: Research and curriculum reform*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- [24] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic.
- [25] Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [26] Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying and dividing schemes: An overview. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning I the learning of mathematics* (pp. 3-39). Albany, New York: State University of New York Press.
- [27] Thompson, P. W. (1995). Notation, convention, and quantity in elementary mathematics. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp.199-219). Albany, New York: State University of New York Press.
- [28] Usiskin, Z., Peressini, A. L., Marchisotto, E., & Stanley, D. (2003). *Mathematics for High School Teachers: An Advanced Perspective*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- [29] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2004). Developing assessment problem on percentage. In T. A. Romberg (Ed.), *Standard-based mathematics assessment in middle school* (pp. 83-99). New York, NY: Teacher College Press.
- [30] Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, N. van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5, and 6*. The Netherlands: Sense publishers.

- [31] Wathall, J. (2016). *Concept-based mathematics: Teaching for deep understanding in secondary classrooms*. Thousand Oaks, California: Corwin.
- [32] 王仁郁(2019). 小學高年級資優生在資料分析問題的解題表現。國立嘉義大學碩士論文(未出版)。
- [33] 朱建正(1997). 國小數學課程的理論基礎. 臺灣科技單位 1996 年度國小數學教師培育級檢定模式研究:子計畫三-國小數學課程的數學理論基礎研究之成果報告.
- [34] 李佩樺、劉祥通(2008). 分析小學資優生解連比問題之自發性策略[J]. 資優教育季刊, 2008, 106(2), 8-17.
- [35] 林錫麟(2007). 提問教學促進數學學習成效之研究-以國一學生分數基準化為例. 國立嘉義大學碩士論文(未出版)。
- [36] 黃武雄(1995)。臺灣教育的重建：面對當前教育的結構性問題. 臺北: 遠流出版社。
- [37] 廖姍雯、劉祥通(2013)。小教師資生在分數數線問題的解題表現[C]. 中華民國科學教育學會與彰化師範大學科學教育研究所主辦“第 29 屆科學教育研討會”，2013。
- [38] 劉玲(2001)。比較類型應用題的分析. 赤峰教育學院學報, 2001 年的 1 期, 84 頁。
- [39] 劉祥通(2007)。分數與比例問題解題分析：從數學提問教學的觀點。臺北：師大書苑（增定一版）。

The Performance and Comparison of Problem-Solving on the Norming Problems from
Pre-service Teachers of Taiwan and mainland China

《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過
2019.05.25 編輯委員會會議修訂通過
2020.05.編輯委員會會議修訂通過
2020.11.14.編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

- 一、實徵研究：中文文稿以8000字為原則、英文文稿以4000字為原則。
- 二、實務分享：中文文稿以2000~3000字為原則、英文文稿以2000~3000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
- 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文或英文撰寫。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文或英文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中英文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Editorial Board

Chief Editor | Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education)

Vice Chief Editor | Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education)

Editorial Panel | Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei)
Yung-Chi Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Tsing Hua University)

Su-Wei Lin (Department of Education, National University of Tainan)

Wei-Min Hsu (Department of Education, National Pingtung University)

Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education,
National Changhua University of Education)

Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education,
National Taipei University of Education)

Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli)

Hui-Yu Hsu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Tsing Hua University)

Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)

Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City)

Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research)

Chia-Jui Hsieh (Department of Mathematics Education and Information Education,
National Taipei University of Education)

International Editorial Panel | Cheng-Yao Lin (Department of Curriculum and Instruction,
Southern Illinois University)

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"

TEL | 886-2-7734-6576

FAX | 886-2-2933-2342

E-mail | tjmtedit@gmail.com

Website | <http://tame.tw/news/news.php?class=204>

1 數學探究教學對國中學生數學理解之研究

/ 吳韶康、柳賢、洪振方

A study of Mathematics inquiry-Based Teaching on Eighth Grade students' Mathematics Understanding / Shao-Kang Wu、Shian Leou、Jeng-Fung Hung

15 以鈕扣拼拼樂遊戲為例融入國小五年級數學教學之研究

/ 吳宜洵、梁淑坤

A study on using Button Fighting game as an example to integrate mathematics games in fifth grade mathematics teaching / I-Hsun Wu、Shuk-kwan S. Leung

29 五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究

/ 廖倩廷、林原宏

Application of Open-ended Assessment on the Instruction of Factors and Multiples for Fifth Graders / Qian-Ting Liao、Yuan-Horng Lin

57 國小數學素養評量 - 試題編製經驗談

/ 謝闔如

Experience of Test Construction of Mathematics Literacy in Elementary School / Kai-ju Hsieh

75 兩岸師資生解基準化問題的表現與分析

/ 劉祥通、章勤瓊

The Performance and Comparison of Problem-Solving on the Norming Problems from Pre-service Teachers of Taiwan and mainland China / Shiang-tung Liu、Qinqiong ZHANG

