

ISSN 2312-7716  
DOI 10.6610/TJMT

第 37 卷第 2 期  
二〇一六年十月  
VOL. 37 NO. 2  
October 2016

# 臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

**發行單位** | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

## 編輯委員會

主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	林碧珍	國立新竹教育大學數理教育研究所
	李源順	臺北市立大學數學系
編輯委員	林素微	國立臺南大學教育學系
(依姓氏筆劃排序)	徐偉民	國立屏東大學科普傳播學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	廖惠儀	高雄市大仁國民中學
	劉祥通	國立嘉義大學數理教育研究所
	鄭章華	國家教育研究院
	鍾靜	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

---

<b>地址</b>	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
<b>電話</b>	886-2-7734-6576
<b>傳真</b>	886-2-2933-2342
<b>電子郵件</b>	tjmtedit@gmail.com
<b>網址</b>	<a href="http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&amp;fid=74">http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&amp;fid=74</a>

---

## 附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

---

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

2015-2016 年審查委員  
2015-2016 Editorial Review Board

王美娟 Mei-Chuan Wang

臺北市立大學數學系  
Department of Mathematics,  
University of Taipei

左太政 Tai-Cheng Tso

國立高雄師範大學數學系  
Department of Mathematic,  
National Kaohsiung Normal University

左台益 Tai-Yih Tso

國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

吳昭容 Chou-Jong Wu

國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系  
Department of Educational Psychology and Counseling,  
National Taiwan Normal University

易正明 Zheng-Ming Yi

私立敏惠醫護管理專科學校  
Center of General Education,  
Min-Hwei Junior College of Health Care Management

林勇吉 Yung-Chi Lin

國立清華大學數理教育研究所  
Graduate Institute of Mathematics and Science,  
National National Tsing Hua University

林素微 Su-Wei Lin

國立臺南大學教育學系  
Department of Education,  
National University of Tainan

林曉芳 Hsiao-Fang Lin

明道大學課程與教學研究所  
Graduate Institute of Curriculum and Instruction,  
MingDao University

施皓耀 Haw-Yaw Shy

國立彰化師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Changhua University of Education

袁媛 Yuan Yuan

中原大學教育研究所  
Graduate School of Education,  
Chung Yuan Christian University

高志誠 Chih-Chen Kao

國立臺東大學應用數學系  
Department of Applied Mathematics,  
National Taitung University

張宇樑 Yu-Liang Chang

國立嘉義大學教育行政與政策發展研究所  
Graduate Institute of Educational Administration and  
Policy Development, National Chiayi University

陳埤淑 Ching-Shu Chen

台南應用科技大學師資培育中心  
Teacher Education Center,  
Tainan University of Technology

陳嘉皇 Chia-Huang Chen

國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

陳榮治 Jung-Chih Chen

國立嘉義大學應用數學系  
Department of Applied Mathematics,  
National Chiayi University

黃一泓 Yi-Hung Huang

國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

2015-2016 年審查委員 ( 續 )  
2015-2016 Editorial Review Board (continued)

**黃幸美 Hsin-Mei Huang**

臺北市立大學學習媒材與設計學系  
Department of Learning and Materials Design,  
University of Taipei

**楊晉民 Jinn-Min Yang**

國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

**楊凱琳 Kai-Lin Yang**

國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

**楊德清 Der-Ching Yang**

國立嘉義大學數理教育研究所  
Graduate Institute of Mathematics and Science  
Education, National Chiayi University

**鄭章華 Chang-Hua Chen**

國家教育研究院  
National Academy for Educational Research

**謝名娟 Ming-chuan Hsieh**

國家教育研究院  
National Academy for Educational Research

**謝如山 Ju-Shan Hsieh**

國立臺灣藝術大學藝術與人文教學研究所  
Graduate School of Art and Humanities Instruction,  
National Taiwan University of Arts

**謝進昌 Jin-Chang Hsieh**

國家教育研究院  
National Academy for Educational Research

**魏士軒 Shih-Hsuan Wei**

國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

## 主編的話

---

本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，本次發行為第37卷第2期。由於研究探討與實務印證是知識紮根的必要關鍵，因此本期刊是數學教育研究與實務論文發表與交流的重要園地，逐漸引起數學教育研究者與數學教師的共鳴，期能將數學教育研究落實於數學教學實踐。

本期論文共有三篇，第一篇是黃珣懿、鍾靜所發表之〈用繪本學數學——以中年級為例〉，透過數學繪本且搭配教科書課本，發現能夠強化國小學童數學概念連結，活化教學並統整數學知識的學習。時值國內即將實施十二年國教之際，數學繪本閱讀能做為教學材料參考。第二篇是來自香港的黃德華所發表之〈「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現〉，根據香港教育學院的「課堂學習研究」(learning study)流程與架構，透過行動研究，發現確能提升數學教師的數學知識和數學教學知識，此發現值得我國推動數學教師備課、觀課與議課的教學專業發展參考。第三篇是黃國綸、許慧玉所發表〈幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之研究〉，這篇研究以國中生為研究對象，採取實驗研究法，設計幾何圖形例子分類活動，發現對於學生的四邊形包含關係概念有正面影響。上述這三篇的研究分別涵蓋數學內容材料、教師專業精進和數學教學活動設計等主題，值得讀者品味與參考。

本期刊能順利出版完成，需衷心感謝所有審查委員審查論文並提供審查意見，讓論文品質更臻完善。同時也非常感謝兩位副主編和編輯委員會委員的協助，以及編輯助理的辛勞，大家無私並鼎力協助本期刊的發展，方能維持本期刊品質。最後，尚祈各界先進能繼續支持本期刊，讓我們能在數學教育研究與實務交流的園地中不斷精進成長。

《臺灣數學教師》主編

林原宏 謹誌



# 臺灣數學教師

第 37 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2016 年 10 月出刊

---

## 目錄

- |   |    |
|---|----|
| 用繪本學數學—以中年級為例<br>／黃珣懿、鍾靜                              | 1  |
| 「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之<br>探究：判定「全等三角形」新發現<br>／黃德華 | 17 |
| 幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之<br>研究<br>／黃國綸、許慧玉           | 50 |

# Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 37 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2016

---

## CONTENTS

- Using Picture Book to Teaching middle grand mathematics 1  
/ Shu-Yi Huang 、 Jing Chung
- Exploring the Effect of Improving Teachers' Subject Knowledge and Subject Content Knowledge via a Learning Study : New Discovery in Determining Congruent Triangles' Conditions 17  
/ Tak-Wah Wong
- A study on classification of geometric diagram examples to 8th grade students' learning of inclusion relations in quadrilaterals 50  
/ Guo-Lun Huang 、 Hui-Yu Hsu

黃珣懿、鍾靜（2016）。  
用繪本學數學—以中年級為例。  
臺灣數學教師，37（2），1-16。  
doi: 10.6610/TJMT.20160506.01

## 用繪本學數學—以中年級為例

黃珣懿<sup>1</sup> 鍾靜<sup>2</sup>

<sup>1</sup>臺北市文山區武功國民小學教師

<sup>2</sup>國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

數學繪本又稱為「數學圖畫書」，透過繪本的文圖布置情境脈絡以傳達數學的概念知識，可使讀者獲得數學知識或應用數學知識。筆者嘗試於中年級數學的教材範圍內，搭配數學單元內容，選擇適用的數學繪本，設計關鍵佈題及使用策略，進行數學繪本閱讀教學，藉以延伸課本內容，強化數學概念，以達到加深加廣的學習。「用繪本學數學」的教學設計特色有：數學概念的連結、活化數學教學-創造數學價值及在對話中以學生為中心合作學習。從學生學習成果可以發現：「用繪本學數學」不僅統整數學知識之學習、還促進數學概念學習的躍進、更可以增進孩子數學學習的自信心及正向學習態度。

**關鍵詞：**數學繪本；數學繪本教學；數學教學

## 壹、緒言

這幾年，各學校都如火如荼的推廣閱讀；閱讀的範疇，也從語文類逐步擴展至各領域。順著孩子愛聽故事的天性，筆者利用數學繪本的閱讀活動包裝著數學知識，讓孩子潛移默化的接受數學、喜歡數學。而數學繪本獨特的知識性，需要靠教師安排適切的教學活動，才能引導孩子在閱讀過程中發現數學、在情境中完成數學解題。

### 一、數學繪本能吸引孩子喜愛數學

數學繪本中蘊含的數學知識，可讓孩子以柔軟、有趣的方式來接觸與認識數學。荷蘭的真實數學（Realistic Mathematics Education [RME]）提出：數學必須連接現實世界，貼近孩子的生活經驗與社會相關，以具備人類的價值，且強調數學是一種人類的活動，數學課應該給學生引導，藉著操作再創造數學；並且要提供學生所能夠理解的情境，這情境不一定狹隘的限制在現實世界中，而是在學生心理能製造真實畫面的素材，這樣的情境脈絡雖然不見得是會真實發生的，但卻是在學生腦中真實的（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）。數學繪本的故事情節與畫面提供孩子一個可想像的情境，讓數學的觀念或想法能以故事脈絡、呈現圖片，更多非正式或學生熟知的語言表達（Ward, 2005）。當孩子隨著故事情境的脈絡從事解題活動，「做數學」自然就有趣了起來。更可以讓孩子感知數學知識與能力可運用於日常生活中（鍾靜，2012a）。

### 二、透過教學活動引導孩子對話進而發現數學

Whitin 與 Wilde 認為兒童文學能成為提供有意義的學習數學脈絡的工具，能幫助學習者重視數學，鼓勵學習者成為數學問題解決者，為兒童提供數學溝通的有意義脈絡，支持學習者以合理推論來探究各種數學的主題（Shatzer, 2008）。然而，有別於語文類的閱讀策略，數學繪本融合了故事和數學知識，如果讓年幼的孩子自己閱讀，往往孩子看到的是「故事」，而非「數學」。筆者曾嘗試選用大量數學繪本，在中低年級以班書輪讀的方式進行閱讀活動，結果發現：孩子自行閱讀數學繪本，對隱含在故事背後的數學概念理解成效不彰。

因此，「對話」是閱讀數學繪本時的關鍵，不論是師生間的對話，還是學生彼此間的對話，都需要學生「放聲思考」。教師在班級中有計劃、有步驟的引導討論，才能促

使學生真正理解故事背後所隱含的數學知識。

為了讓學生能愛上數學、理解數學，筆者嘗試於中年級數學的教材範圍內，搭配數學單元內容，選擇適用的數學繪本，設計並進行數學繪本閱讀教學，藉以延伸課本內容，強化數學概念，以達到加深加廣的學習。

## 貳、「用繪本學數學」教學設計特色

數學繪本是什麼？數學繪本又稱為「數學圖畫書」，顧名思義，就是文圖並茂的繪本中傳達了數學的概念知識，可使讀者獲得數學知識或應用數學知識。當柔性的數學繪本融入有系統性的數學教學，使得數學就像包著甜甜的糖衣，讓學生喜歡並且好入口，幫助學生汲取數學的養分。

用繪本學數學的教學設計，強調數學概念的連結，讓學生透過數學繪本的教學活動，達到水平的數學化和垂直的數學化（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）；教學活動的設計跳脫課本習題的練習，活化了數學課堂；教學活動的安排係以學生為中心的合作學習，不時可見學生在概念學習的「躍進」；歷時兩年，在中年級進行了 18 本數學繪本的教學，挑選搭配課程的相關概念繪本當做題材，運用多元的閱讀策略來幫助學生學習；透過繪本深入或淺出的引導，亦可複製這些閱讀策略於低年級及高年級年段。鍾靜（2012a）提出數學繪本的價值和特質為：一、具有親和力且輕鬆的數學教材；二、加強數學概念溝通討論的工具；三、連結數學概念和生活情境的教材；四、提供傾聽、寫作及討論數學概念的機遇；五、在有意義的情境中運用數學知識；六、改變學童對數學的看法；七、擴展學童的數學知識。參考這些觀點，在此教學設計中，用繪本學數學想呈現的最關鍵特色有三：

### 一、數學概念的連結

Hellwig 等人（2000）提出圖畫書在數學教育上顯著的貢獻是提供動人的場景讓學生感受到數學是如何存在我們的世界裡。數學繪本的故事情境能貼近孩子的生活經驗，在課堂中給予學生引導，藉著數學繪本中數學概念的操作，再創造數學，將數學看成一場動態的人類活動。「水平的數學化」是指幫助學生從生活中的世界進入符號世界（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）。數學繪本所建構的情境，讓學生在此情境下以數學符號解題。「垂直的數學化」是符號世界內的轉移（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）。數學繪

本提供的數學概念，可以串聯課本單元中過去學過的概念、現在該單元數學概念、以及未來將學習的概念，提供學生將不同數學概念連結和運用的機會。而繪本的故事編排，提供孩子一個可理解的情境。因此，使用數學繪本融入數學教學，正可以體現荷蘭真實性數學教育的精神。

美國數學教師協會（National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]）在 1989 年所頒布《學校數學課程和評鑑標準》（Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics）（NCTM, 1989）列出數學學習的過程目標「連結」（mathematics as connection），包含強調各標題間的數學概念、相同數學概念及概念、過程間的數學內部連結，以及數學與其他領域、日常生活、社會活動等外部的連結。NCTM 也提倡在 K-8 教室整合兒童文學，透過童書，使用閱讀為一種溝通的形式時，學生在不同文章脈絡中看到數學的存在（Ward, 2005）。

九年一貫課程綱要中「連結」指標包含了「察覺」、「轉化」、「解題」、「溝通」、「評析」（教育部，2003），希望能藉此培養學生欣賞數學的能力和態度，並且能建立新知識於舊經驗之上、參與知識形成的過程。使用數學繪本進行教學，可以透過故事幫助孩子察覺生活中與數學相關的情境，並把情境中相關的數、量、形析出，再利用觀察、分類、歸納、演繹類比的方式，多層面的理解生活中的數學問題，選擇合適的表徵，以數學語言來說明解題的過程，並嘗試不同的解法，用解題的結果來闡釋原來的問題情境。由此可見，進行數學繪本融入數學教學可以培養學生數學連結的能力。

例如：在進行繪本《遊樂嘉年華》時，在遊樂園的情境中，學生很容易理解一群人要如何平分座位？剩下幾個人？剩下幾個座位？學生自然會想出用除法和減法來解決問題，也會用算式和圖示表徵題目，到了繪本最後 11 人平分 14 個座位時，儘管心理衝突：被除數怎麼少於除數？也能回到算式的意義而進行解題，整個教學，就是一場連結已知知識和外未知知識的過程。

## 二、活化數學教學-創造數學價值

在傳統課室中教數學，不外乎拿出課本，教師講解後，開始做習題。老師在台上講得口沫橫飛，但是學生卻漸漸視數學為畏途，越來越沒有學習興趣。使用數學繪本教學，是從學生的心理狀態為考量，從學生有興趣的故事著手，將數學融入在故事情境中，不知不覺中思考數學解題。再以多元的方式將圖畫書融入數學教學，將可提供兒童傾聽、寫作及討論數學概念的機會（Gaily, 1993）。

Kinniburgh 與 Byrd (2008) 指出兒童文學作品整合於數學課程中，能讓數學課非常的生動，好的文學作品能創造積極的數學學習環境，也能在課堂中結合生活經驗。在數學課教學前，可以使用數學繪本來當做引起動機，在數學課程進行中，可於某個段落中安插數學繪本的閱讀來強化數學概念的學習，甚至直接運用數學繪本來教授數學概念，補充或應用課本的概念；當單元課程進行後，可以安排數學繪本教學做為數學概念之鞏固與迷思概念的澄清。也可以利用閱讀課時間，純粹只是數學繪本的閱讀教學，不用介意搭配什麼課程，也能達到拓展學生知識領域之效果。

例如：在進行四年級面積與周長單元的教學時，如果只是拿著課本不斷的要求學生套用公式計算面積、計算周長，學生不僅覺得枯燥，而且無法深刻的區辨面積與周長兩個概念。筆者搭配繪本《義大利麵與肉丸子》，順著繪本情境，讓學生計算桌數和座位，學生自己在點數的過程中察覺到正方形的桌數就是面積概念、繞桌子四周的座位就是周長概念。該繪本呈現出面積相同、周長不同的概念，教師佈題時，增加讓學生思考如果在座位數量不變的情況下，桌數可以如何改變，學生透過方塊教具，小組合作拼排並討論，學生覺得自己不是在算數學，卻一點一滴累積了數學概念，感受到原來課堂中教的數學是有用的，可以幫他解決生活中的問題。換個方式教數學，可以讓學生覺得耳目一新，又能達到數學概念學習的效果，讓數學課堂活了起來，並且創造了數學學習的價值。

### 三、在對話中以學生為中心合作學習

整個繪本教學的哲學觀就是以課程為中心。站在學生的立場，為學生挑選合適的繪本；站在學習的立場，提供一個可想像的解題情境；站在學生的立場，安排貼近學生生活經驗的活動，並且讓學生主動學習，主動思考。

在介紹繪本故事時，主要以師生對話為主，教師一邊說故事，一邊提問讓學生思考，提示學生注意到繪本中的數學概念。因為繪本中非例行性題目的設計，安親班不曾教過、參考書不曾算過，孩子自然而然想要和同學討論，小組合作學習也就油然而成，同學間的對話聚焦在討論解題、合作與分享。

Martinez 和 Martinez (2001) 認為利用兒童圖畫書作為工具，可以加強兒童數學的溝通能力，更有助於兒童對數學概念的瞭解，並提升解題的自信心。不論平時數學成就低、中、高不同能力的學生，在討論繪本時都是平等的。因為繪本故事人人都理解，而延伸出來的佈題沒有那麼多的轉折與陷阱，有時只是「想到」與「想不到」的差別，低成就者有時反而因為沒受框架限制而能想出好辦法。有時繪本佈題的設計強調創造與發

現，沒有對錯之分，讓每一位孩子都能輕鬆的看待數學，並且提高正向的學習態度與學習興趣。

例如：在繪本《呀！怪物別跟我》中，讓學生挑選七巧板中的四片圖形拼成一個正方形，光是要挑哪幾片？就讓學生討論很久，有些形狀是否永遠不可能用到？為什麼？這都是小組之內的對話。在繪本《螞蟻搬東西》中，學生會提出：看不懂台上同學所寫的數列關係，於是有人主動上台補充說明。這些台上台下的語言流動，都是自然發生，教師只須站在旁邊引導即可，「學習」，回到學生身上，是學生想學而發生的。因此，使用數學繪本教數學，提供課堂中對話的機會，以學生為中心，建立合作學習的模式。

### 參、數學繪本教學規畫

數學繪本閱讀不單單是說故事，教學規劃主要先製作繪本內容 PPT，再以投影的方式由老師說故事，由老師掌握繪本的進度，決定何時該停下來討論。故事本身是為了提供情境，數學概念才是討論重點。

數學繪本教學規畫的流程如下圖 1：



圖 1 數學繪本教學規劃流程

#### 一、審視教材概念重點

本教學規劃配合本校數學課程之教材，以三上、三下、四上、四下數學課本內容單元為主要考量。

#### 二、尋找合適的數學繪本

鍾靜（2012a）提出選用數學繪本的重點有：1.數學的概念或程序有效呈現、2.圖文可讓讀者看到數學、3.提供充足的資訊讓讀者探索數學、4.數學概念符合讀者身心發展、5.故事情節和數學相輔相成、6.支持讀者數學性思考和臆測、7.幫助讀者使用或應用數學、8.建立讀者對於數學和文學的鑑賞。

筆者除根據上述原則，加上個人教學經驗，從數學繪本中，先搜尋相關分類，再仔

細閱讀繪本內容，檢視是否切合該課程的教學目標，有時同一本繪本因為佈題及引導方式的不同，可適用於不同年級或單元。例如：《門鈴又響了》可於二年級教平分概念、也可在三年級教等分除概念，在此則是運用於四年級的分數概念。同一本繪本也可能因為內容廣泛，不一定要整本閱讀。例如本教學規劃中《直線、線段、多邊形》在三年級閱讀前半部，介紹線段、頂點可組成多邊形；在四年級則閱讀後半部，利用鐘面認識不同類型的三角形。因此，繪本的使用會因教學目標而彈性變化。

### 三、規劃繪本現身的時機

袁媛（2006）指出數學繪本可使用的時機為：1.發展先備概念或技能、2.發展概念及技能、3.提供回顧概念的情境，有些書的內容可以使用於不同的年齡層，只是在教學時強調重點、呈現方式可能不同。例如：《門鈴又響了》一書，用於低年級可做為發展先備概念或技能，使用於中年級則可做為發展概念及技能。

筆者在操作數學繪本教學時，如果繪本概念較該單元課程簡單，可作為引起動機或複習舊經驗之用，在課程進行前，利用晨光閱讀時間進行教學；如果繪本概念與該單元課程相符，可作為概念介紹、鞏固或迷思澄清之用，可安排數學課進行教學；如果繪本概念較該單元課程進階，可作為加深加廣之用，於課程進行後，可利用晨光閱讀時間進行教學。

在本教學設計中，從課程單元的內容檢視繪本的概念點，進而決定該繪本是於教學前、教學中或教學後使用。

### 四、設計關鍵佈題及使用策略

數學繪本有別於一般繪本，在於故事內容傳達的是數學概念，教師必須透過發問，讓學生察覺當中的數學概念，而發問的問題也就是關鍵佈題，必須是從文字或圖畫中能帶領學生找到線索的問話，藉由佈題讓學生得以思考和討論。每一本繪本實施時，問話模式也不盡然都相同，必須針對教學目標，提出有意義的問話，最終目的即是要確保教學目標的達成。

數學繪本閱讀的使用策略目的在幫助學生理解繪本內容而能進行解題，鍾靜（2012b）根據數學繪本有別於一般文本的特性，提出數學繪本應用在教學時的解題策略有：猜測與嘗試、模擬與操作、畫圖或製表、舉例或類比、尋找樣式或規律、推理（含反推）、歸納或演繹、其他等八種。根據筆者的教學習慣及繪本特性，較常使用的是模擬與操作、

尋找樣式或規律、歸納或演繹。

在進行數學繪本教學時，搭配多元的教學策略，可幫助學生概念理解。例如：一、教具操作：使用小積木、色紙等操作繪本內容；二、電腦功能應用：以電腦軟體 Microsoft Word 的複製功能展現倍數的威力；三、以 iPad APP 電子釘板做資訊融入：讓學生在電子釘板中操作幾何構圖；四、實測活動：讓學生實測球場周長；五、模擬操作：按照繪本情境與方法製作長條圖；六、戲劇演出：分組演出繪本內容；七、繪本解題：故事中關鍵問題的解題與討論，都能以深化學生的學習，讓數學課程的概念更加鞏固。

## 五、進行數學繪本教學

Schiro (1997) 認為教學過程中可藉由改寫部分圖畫書中的內容，以充分應用兒童圖畫書學習數學。他建議改寫圖畫書的具體方法包括：本文的語意澄清與說明、編修本文中不正確的數學概念、在適當的內文中加上方程式及算式、在插畫上補強數學概念、增加頁次補充內容、為不足的資訊加上註解、加入可操作的教具以幫助兒童了解數學概念的意義及獲得數學技能、修正書中的數據以適應不同年齡學生的閱讀、製作問題答案的摺頁 (flap) 或答案卡以使兒童獲得答案的資訊、加上書末註解(主要在提供老師或家長了解如何引導兒童閱讀此書的資訊、提供相關的學習活動或丟出問題供兒童探索學習)、使用魔術白板 (magic slates) 供兒童記錄或計算結果。

筆者在進行數學繪本教學時，以全班共讀繪本為主，穿插關鍵佈題，有時可針對重要的文字、算式或圖片做放大，以便於討論時的聚焦。有時增加符合單元教學目標的佈題，讓單元學習更完整，或調整數字以貼近單元教學之目標，進行全班討論或分組討論，探討繪本中的解題活動，隨繪本內容搭配適當教學策略，如戲劇表演、實測活動、教具操作等，提供模擬操作的機會，幫助學生概念理解與應用。進行數學繪本教學時，如果手邊有書本，也可在課後留給學生閱讀，學生反覆再三的翻閱，也就是再三回顧相關的數學概念。從教材概念重點出發，尋找合適的繪本，規劃繪本現身的時機，設計關鍵佈題及使用策略到最後進行數學繪本教學，就可以幫助教師有意義、有目的的進行數學繪本教學活動；例如：要在三年級時進行分數單元，其單元重點是初步認識分數，了解分數的意義、單位分數及分數數詞序列，挑選內容可結合分數圖形表徵的繪本《噢！披薩》，決定單元課程進行前，作為分數教學第一節，透過剪貼等分的圓形，認識分數概念，隨著故事內容設計關鍵佈題：「披薩被平分成幾份？其中的一份是多少個披薩？兩份呢？三份呢？……」讓學生操作分數圖卡並記錄在學習單上，最後討論：為什麼披薩老爹沒

辦法為宇宙來的客人，做一份特製的披薩？讓學生明白分數的前提是要先知道平分成幾份。整個繪本教學活動的進行，以分數的基本概念為核心，以繪本情境為背景，有意義、有目的的建構學生的數學概念。

## 肆、「從數學繪本學數學」活動設計

數學繪本教學操作方便，學生接受度亦高，期望「透過數學繪本學數學」的活動進行，擴展學生閱讀視野，提供未來學習的鷹架，增加學生數學學習動機、培養正向數學學習習態度，而達到提高數學學習成就的目標。

繪本的安排，係以課程單元搭配坊間的繪本，因此並非每個單元皆能涵括。使用繪本進行教學時，針對不同繪本及不同的教學單元的特性，教學策略亦會有所不同，中年級繪本使用情形彙整如下表 1：

表 1

中年級繪本使用情形彙整表

年級	序號	數學繪本 (出版社)	重點概念	搭配教材單元	繪本現身 時機	教學活動 方式
三 上	1	噓！螞蟻搬東西 (遠流)	多位數乘以一位數 直式計算	乘法	教學後	電腦功能 應用
	2	直線、線段、多 邊形(漢聲)	認識角及正方形、長 方形的組成要素	角、正方形和長 方形	教學後	電子釘板
	3	遊樂嘉年華 (臺灣麥克)	除法算式的認識	除法	教學中	教具操作
	4	噢！披薩 (遠流)	單位分數及分數數 詞序列	分數	教學前	教具操作
	5	自行車環行賽 (臺灣麥克)	認識周長並測量周 長	周界和周長	教學前	實測活動
三 下	1	起床上學囉！ (臺灣麥克)	用線段表示時間	時間	教學前	模擬操作
	2	夢想家的披風 (遠流)	無縫隙拼接的面積 概念	面積	教學前	繪本解題
	3	A Remainder of One (Scholastic)	除法的意義及算式 記錄	除法	教學中	戲劇表演
	4	給我一半 (臺灣麥克)	分數加法算式	分數的加減	教學前	繪本解題

表 1 (續)

四 上	1	地球日，萬歲 (臺灣麥克)	認識位值及位名	一億以內的數	教學後	繪本解題
	2	門鈴又響了 (遠流)	分數單位的轉換	分數	教學後	繪本解題
	3	直線、線段、多 邊形(漢聲)	認識直角、正、等 腰、等腰直角三角形	三角形	教學後	創造解題
	4	呀！怪物別跟我 (遠流)	七巧板的應用	統整活動	教學中	教具操作
四 下	1	郊狼四處竄 (臺灣麥克)	認識四捨五入法	概數	教學中	繪本解題
	2	檸檬汁大拍賣 (臺灣麥克)	認識長條圖	統計圖表	教學後	模擬操作
	3	義大利麵與肉丸 子(遠流)	面積與周長	周長和面積	教學後	教具操作
	4	足球大賽 (臺灣麥克)	計算時間經過	時間的加減	教學後	繪本解題
	5	比百萬更大的數 (小魯)	大數十進位制及數 的幕次表示	一億以上的數	教學後	繪本解題

在數學課本單元教學前，教師可以數學繪本做概念的引入。以繪本《自行車環形賽》為例，在課本周長單元教學前，初步介紹周長概念並計算周長。教師帶領學生閱讀繪本，依繪本故事佈題：「請你算算看運動場（動物園、環行公路）周長是多少？你是怎麼算的？」請學生記錄在白板上，並上台發表解題策略。接著讓學生分組，拿 100 公分尺，實地量量看籃球場的周長有多長？完成後，分組上台發表。

在數學課本單元教學中，教師先進行課本內容的一部分，再以繪本做概念的講解、澄清或熟練。以繪本《遊樂嘉年華》為例，學生已經隨著課本教學，認識了除法算式。接著由教師帶領學生閱讀繪本，發給學生每人 11 個白色積木，用來表示繪本中的 11 個人，搭配繪本 P.7、P.13、P.18 佈題：「用積木排排看，有 11 人，2 (3、4、14) 人一個座位，可以坐滿幾個座位，剩下幾個人？要再幾個人才能坐滿座位？將結果用除法算式記錄在小白板上。」學生以教具操作的方式請學生上台發表除法算式中各個數字所代表的意義，藉此讓學生熟練用除法算式來記錄兩數相除的結果。在 P.24 中 11 不夠除 14，學生回到除法算式的意義來思考如何列式，幫助學生鞏固概念。

在數學課教學單元後，教師可以數學繪本做概念的深化、鞏固與延伸。以繪本《檸

《檸檬汁大拍賣》為例，學生已經從課本教學中認識長條圖與折線圖，依繪本情境佈題，全班討論，以了解長條圖的繪製與解讀：(1)P.7 佈題：「長條圖橫軸和縱軸分別表示什麼？」，(2) P.10 佈題：「如何知道每天賣的檸檬汁數量？」，(3) P.18 佈題：「當檸檬汁數量沒有剛好在整十的線上，要怎麼畫？」，(4)P.30 佈題：「檸檬汁的數量超過原畫好的格子，怎麼辦？」「能知道五天來，檸檬汁的銷售數量變化情形如何？接著，延伸佈題：「如果將檸檬汁銷售數量的長條圖改成折線圖，可以嗎？為什麼？有什麼不同？」讓學生討論長條圖與折線圖的意義與使用時機。最後，請學生調查本校四年級學生早餐食用種類，並和自己班級做比較，製作成複雜長條圖，做為該單元的延伸學習活動。

## 伍、學生學習成果

從數學繪本學數學，提供學生從另一個角度來看待數學課，從學生的反應與回饋中可以發現，學生喜愛上數學繪本課，而且覺得用繪本學數學好簡單，更從學生的參與過程中，教師會驚覺：學生學習概念的「Jump」，原來就是這麼無所不在。

### 一、數學知識統整學習

由於數學繪本的進行可在教學前，幫助孩子串聯以前學過的概念；可在教學中，將該節課重要的概念，做加深加廣的學習；或於教學後，引導學生整理重要概念，甚至鋪陳未來會學習到的相關概念，做下一階段學習的墊步，孩子就會發現：「原來數學並不難！」。以下圖 2 是二位學生分別在《直線、線段、多邊形》、《門鈴又響了》繪本相關學習之後，所寫的學習心得：

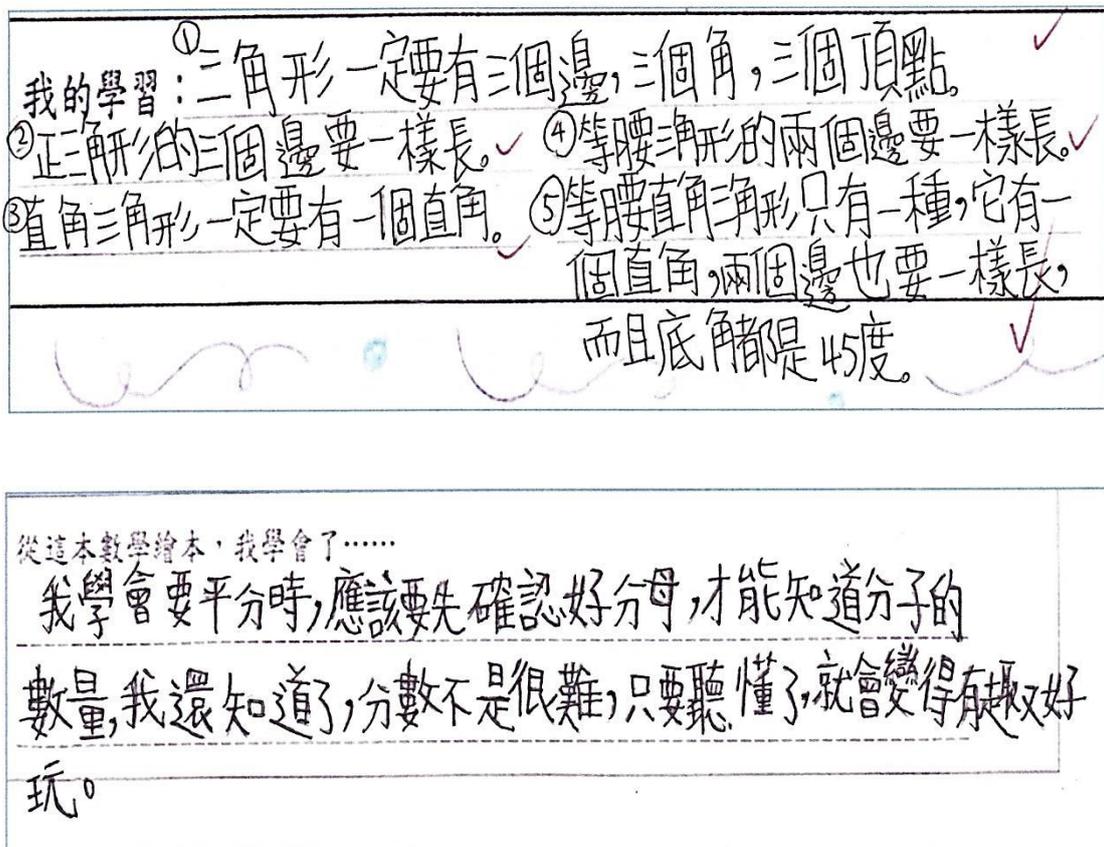


圖 2 學生繪本閱讀學習心得

例如：在《檸檬汁大拍賣》中，模擬繪本情境，讓學生調查全校四年級學生早餐食用種類，到各班調查數據、製作統計表，最後繪製複雜長條圖，比較自己班和全四年級的不同。過程中，學生會仔細思索如何分類、橫軸、縱軸、標題的訂定、表格間距的配置、最後根據統計圖推論可得訊息。這一連串的活動，雖然超出課本僅報讀長條圖的範圍，但因為貼近學生的生活經驗，學生均能在輕鬆的氣氛下完成任務，並瞭解長條圖在生活中的意義。

## 二、促進數學概念學習的躍進

透過繪本非例行性題目的佈題，會刺激孩子主動的思考與討論，搭配小組的座位安排，常可以見到學生自動兩兩湊在一起討論，而討論出的結果也常讓筆者驚艷，例如：在《義大利麵與肉丸子》中，最後讓學生思考面積和周長的關係，在  $32$  個人都有座位的情況下，有幾種桌子的數量組合，也就是在周長相同，面積可以是多少？

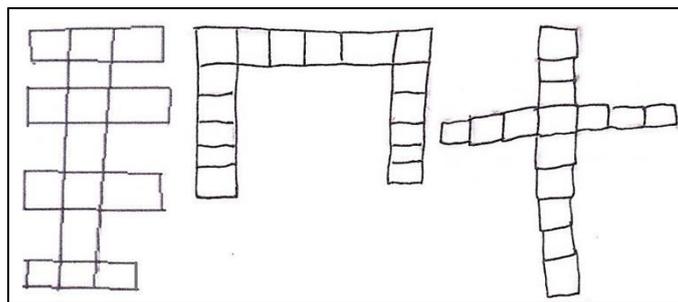


圖 3 《義大利麵與肉丸子》繪本延伸解題活動：周長相同，面積可以是多少？

讓學生四人一組用教具排列時，孩子一開始很有創意，發散式的思考，創造出許多特別的圖形（如圖 3），後來加上限制：一定要拼成長方形，學生在開始聚斂，嘗試了幾個後，因為放學時間不得不暫停，隔天來到學校，有孩子說他一直想一直想，想出了 3 個，令人高興的是這個孩子一直以來數學成就並不高，有學生在和同學討論後漸漸發現規律，能按規律重新用方塊排出解答，也有學生能用表格窮盡所有答案，最後發表時，都能有條理的歸納及說明，看到孩子能有數學概念學習的躍進，身為老師無不欣喜；正如圖 4 某位學生的學習心得：

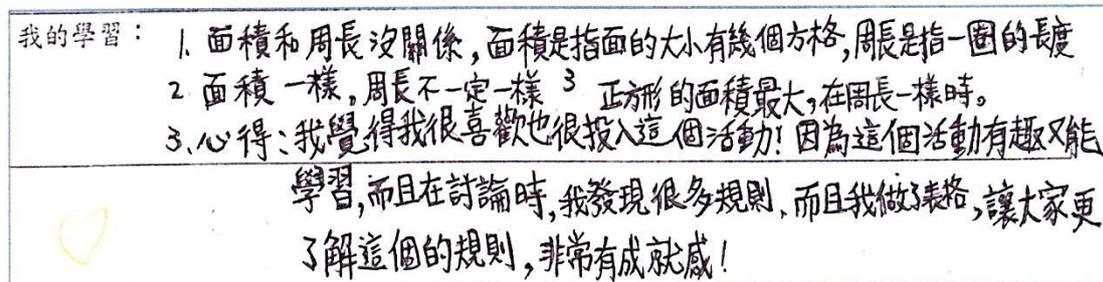


圖 4 《義大利麵與肉丸子》繪本學習心得

### 三、增進孩子的自信心及正向學習態度

只要筆者桌上擺著數學繪本，學生就會迫不及待的問：「什麼時候要上這一本？」當孩子興致高昂的上完一本數學繪本時，總是一直追問老師：「下次還要上哪一本？」我們都用數學繪本上數學好不好？」透過數學繪本學數學，學習成就高的孩子，因為接觸的是從沒看過的佈題，解題起來充滿挑戰感，程度中等的學生，能從繪本中學習到數學概念；而平時成就較低的學生，因為繪本的趣味性及較簡化的數字計算，提高孩子的成就感，孩子們覺得學起數學來沒有壓力，就能愛上數學，進而增進每位孩子的自信心和培養正向的學習態度。有些學生的學習感想如下圖 5：

我平常很不喜歡算數學，可是我在寫的時候完全不記得我在算數學，只要趕快算出答案，也學到很多課本上沒教的事。

我喜歡這個繪本，因為裡面教除法的方法比較有趣，如果每天上繪本的話，我就可以了解更多，然後仔細聆聽，數學就可以變好。

心得：上這繪本時我完全投入裡面，完全忘記我在上數學課，因為用繪本上數學課，不但很有趣，而且也讓我們上課專心，因為用繪本的話，我就會很想知道下一個，所以，我希望可以多多用繪本上數學。

題目

我的感想

我覺得上數學繪本比只用數學課本教學有趣多了，而且以繪本來協助教學不但可以加深教過的數學概念，加深印象，還可以學到一些從課本裡延伸的概念，讓我們可以比其他班學得更廣泛，更輕鬆，真是一舉兩得呢！✓

圖 5 學生用數學繪本學數學之感想

## 陸、省思

使用數學繪本來學數學，不僅可以複習舊經驗、拓展學習視野、提供有趣多元的學習情境，更重要的是提高孩子閱讀數學的興趣。在班級中，不論成就高、中、低的學生都能從中學習數學概念並獲得成就感，進而建立學習數學的自信心，不時還可以看見學習共同體理念下學生數學概念學習的躍進。

進行數學繪本閱讀教學時，選擇的繪本概念內容搭配課程的進度，並利用晨光時間進行閱讀教學，不論是引起學習動機，還是澄清概念，或是加深加廣延伸學習，都和課本教材之學習相輔相成，可解決教學節數不足的困境。

當筆者在觀察學生作業情形，發現學生普遍具有某些迷思概念時，也可利用繪本作概念的澄清之用，如果拿相同的題目一再重複講解，學生意興闌珊，且迷思依然固著，成效不彰；然而透過數學繪本，可以從另一個角度切入，較能有效的進行補救教學。

以數學繪本進行數學閱讀教學，除了搭配課程，也可單獨挑選學生可理解的內容來進行。筆者曾嘗試利用聯經出版社《魔法學校發生的事》，引導學生認識對稱概念，經驗中發現，透過繪本輕鬆而有情境的鋪陳，學生很容易接受新的數學概念，這些都可成為學生未來學習數學的基礎。

## 參考文獻

- 袁媛 (2006)。圖畫故事書融入國小數學學習的教學研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫期末報告，計畫編號：NSC 94-2521-S-026-001。桃園：中原大學。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部
- 鍾靜 (2012a)。數學繪本的閱讀與教學。國民教育，52 (3)，39-48。
- 鍾靜 (2012b)。運用數學圖畫書進行連結主題教學之研究 (3/3)。國科會 101 年度專題研究計畫成果報告，計畫編號：NSC 99-2511-S-152-004-MY3。
- Gailey, S. K. (1993). The mathematics-children's literature connection. *The Arithmetic Teacher*, 40(5), 258-261.
- Hellwig, S. J., Monroe, E. E., & Jacobs, J. (2000). Making informed choices: Selecting children's trade books for mathematics instruction. *Teaching Children Mathematics Journal*, 7(3), 138-145.
- Kinniburgh, L. H., & Byrd, K. (2008, January/February). Ten black dots and September 11: Integrating social studies and mathematics through children's literature. *The Social Studies*, 33-36. doi: 10.3200/TSSS.99.1.33-36
- Martinez, J. & Martinez, N. C. (2001). *Reading and writing to learn mathematics: a guide book and a resource book*. Needham Height, MA: Allyn & Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards*

*for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Schiro, M. (1997). *Integrating children's literature and mathematics in the classroom: children as meaning makers, problem solvers, and literary critics*. New York, NY: Teachers College Press.

Shatzer, J. (2008). Picture book power: Connecting children's literature and mathematics. *The Reading Teacher*, 61(8), 649-653. doi: 10.1598/RT.61.8.6

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Ward, R. A. (2005). Using children's literature to inspire K-8 preservice teachers' future mathematics pedagogy. *The Reading Teacher*, 59(2), 132-143. doi: 10.1598/RT.59.2.3

黃德華 (2016)。

「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現。

臺灣數學教師，37 (2)，17-49。

doi: 10.6610/TJMT.20160629.01

## 「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現

黃德華<sup>1</sup>

<sup>1</sup>香港教育大學數學與資訊科技學系

本文透過分析專業數學教師的基本條件，利用一個「課堂學習研究」的實例，帶出「課堂學習研究」確實能夠有效提升數學老師的「本科知識」與「教學內容知識」，從而提升數學的教學的效益。是次研究選取的課題是中學一年級判斷「全等三角形的條件」。這個研究課主要教授學生了解『SAS 和 SSA』之差異，並找出『RHS 與 SSA』的關係。在實踐這個「課堂學習研究」，老師和研究員一起分析和討論教授這課題所需要的「本科知識」與「教學內容知識」。從討論中，發現了判斷「全等三角形」的新條件『SSO』-- O 是鈍角，並找得判斷「全等三角形」的新方法。這些新教材和新教學方法反映了「課堂學習研究」確實能有效提升老師的「本科知識」和「教學內容知識」，從而令數學老師更專業化。

**關鍵詞：**本科知識；全等三角形條件；教學內容知識；課堂學習研究

## 壹、緒論

### 一、研究背景

香港中學數學教學內容和教學模式，大多是參照教科書，以教科書內容和教學策略為中心的。所以一般香港中學數學老師的教學模式是變化不多的。因此，老師的教學成效大部份是依賴教科書內容和學生的個人質素。所以若老師的教學單依照教科書內容，依書直說，集中以單向的「講授方式」(Lecture Method) 教學，即俗語所為的「Chalk and Talk」教學，再配以大量的操練，而較少透過討論活動誘導學生探究、了解數學概念；這樣黑板乏味的教學方法，試問又如何能培養出學生的學習興趣？如何能令他們喜愛數學？因此老師應該明白「理解」遠勝於「強記」、多樣化教學方法遠勝於獨孤一味的「Chalk and Talk」教學。正如課程發展處(1999)在《中學課程綱要－數學科(中一至中五)》第五章[教學建議]中清楚說明為準備學生面對二十一世紀的挑戰，中學數學的教學策略必須著重：

- (一) 學習過程；
- (二) 照顧學習差異；
- (三) 適當運用資訊科技去學習及施教；
- (四) 適當運用各式各樣的教學資源(38頁)。

因此，為使學生能夠清楚了解學習的數學知識、有效掌握解難方法、培養正確的數學態度，老師的教學必須是多樣化的；如透過具趣味的數學活動、探究討論、科技應用等等，鼓勵學生多參與，多表達個人意見，從而達至培養學生的「傳意」、「探究」、「歸納」及「推理」等能力。

故筆者認為老師應該多分析教學內容、多就學生的能力決定教學內容的深淺及範圍的多寡。老師不應單單依循學校用的教科書之單一內容作教學安排，應考慮所教學生的質素；若學校採用的教科書的內容和教學策略未能配合自己所教的班別的[學與教]的要求，老師就應多參考書籍，進行課程調適。

### 二、研究動機

美國史丹福大學舒文教授(Shulman, 1987)認為作為專業教師，不應單具備良好的本科內容知識，更應兼備優秀的教學內容知識。筆者極同意舒文教授的分析。筆者也

以香港數學教師為研究對象，探研得要成為一個專業數學教師應具備以下列足夠的知識和正確的教學態度（Wong, 2002）：

- (一) 數學本科知識（Subject Content Knowledge）
- (二) 數學教學內容知識（Pedagogical Content Knowledge）
- (三) 數學教學態度（Attitude toward Math Teaching）

### 1. 數學本科知識

Schofield（1981），Shulman（1987）和 Ball（1991）都認為數學本科知識泛指在大學、中小學所修讀的數學課程的知識；這些知識也被學校廣泛地用來量度數學老師的數學成就（mathematics achievement）。

### 2. 數學教學內容知識

Ball（1991）和 Shulman（1986）認為數學教學內容知識是指老師在中小學用來教授數學給學生所用到的教學知識。它包括：了解中小學數學課程的知識、編寫教案、設計教具、設計問題... 等等知識；這些知識也被學校用來量度數學老師的教學成效（mathematics teaching performance）。

### 3. 數學教學態度

香港教育學院的學校體驗視導評核表中也有教學態度評核這一欄；目的在評核實習老師的教學熱誠與投入；它包括評核他們喜歡數學和教數學嗎？有愛心和有耐性教學生嗎？

### 4. 教育改革及課程研究

近年，香港教育界進行了很多不同的教育改革及課程研究，目的都是為了改善教學質素，提升「學」與「教」的成效。惟這些改革和研究的成效都不十分理想。究其原因，大多是它們都未能直接針對影響上述「學」與「教」的三大因素。最近十年，筆者參加了由前香港教育學院（現為香港教育大學）盧敏玲教授負責策劃的香港『課堂學習研究』（learning study）。從筆者參與了的十多個中小學數學科的『課堂學習研究』的成果中，筆者十分認同盧敏玲（2002）說：『課堂學習研究』是一種透過提升老師的「本科知識」、「教學內容知識」和「教學態度」而提升教學成效的實際『行動研究』（action research）。香港教育大學的「課堂學習研究」是有別於日本的「授業研究」或「課堂教學研究」（Lesson Study）。它和日本的「授業研究」的主要分別是「課堂學習研究」是以 Marton

(1997)的「變易學習」理論作為教學設計的基礎。「變易學習」理論的詳細內容見下文研究方法中的理論架構內文。

根據 Calhoun (1993)所說,行動研究主要有三種:個人的行動研究(individual action research)、協同行動研究(collaborative action research)和全校性行動研究(school-wide action research)。香港『課堂學習研究』是屬於協同行動研究。它不是一般的『集體備課』、『集體編寫教案』;它主要是由一群教授相同科目的老師和大學導師,透過選擇了的課題,分析老師和學生在「學」與「教」的過程中所遇到的困難,從而分析該課題的關鍵特徵;經過深入的協同討論,找出能夠幫助老師和學生「學」與「教」的有效方案。因此『課堂學習研究』是能夠直接提升「教」與「學」的內容和方法;更透過溝通、討論、交流和分享,大大提升了老師的「本科知識」、「教學內容知識」和「教學態度」。這正正與舒文所提及的三大影響「學」與「教」的因素吻合。

### 三、研究目的

本文目的是透過一個中學一年級的數學科『課堂學習研究』的個案,說明『課堂學習研究』是一種有效提升教師的「本科知識」、「教學內容知識」的行動研究。希望藉著這個實例,能讓老師明白要成為一位專業的數學老師,「本科知識」、「教學內容知識」和「教學態度」是缺一不可的。

## 貳、研究方法

### 一、理論架構

是次研究主要是根據香港教育學院的「課堂學習研究」(Learning Study)的流程及理論架構進行的。圖 1 展示了整個研究架構和運作流程。在整個研究流程中,主要涉及三個層面的探究和分析:

- (一) 教材層面:分析現有教材,優化研究課題的教學內容和教學模式;
- (二) 老師層面:探討既科學又可行的教學模式,切實地提高教學質素;此外透過同儕研討、大學導師的交流,提升教師的專業「本科知識」和「教學內容知識」。
- (三) 學生層面:探究學生的學習興趣和學習能力能否藉着教材和教學方法的優化,從而得到提升(黃德華,2011)。

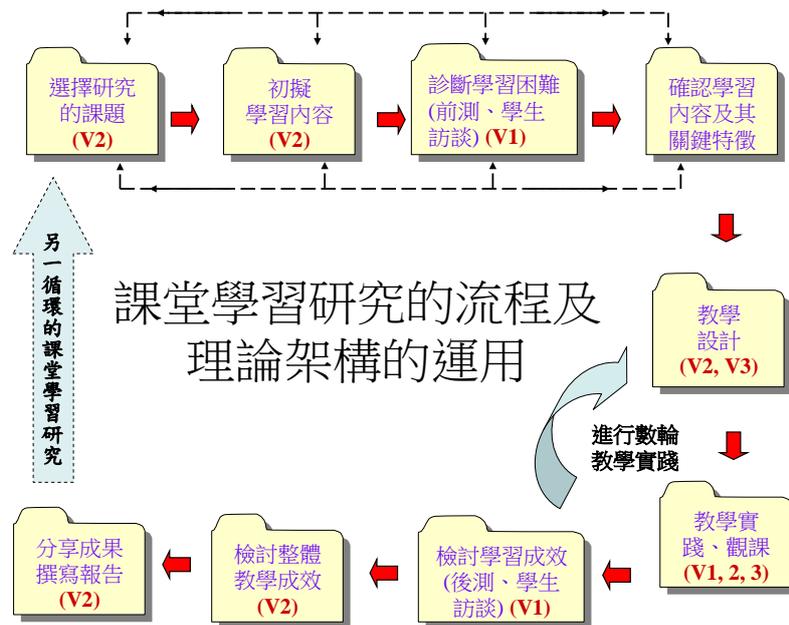


圖 1 「課堂學習研究」的流程及理論架構

此外在圖 1 的運作流程中，每一環節都會涉及人物（包括老師和學生）對事物（包括教材和教學方法）的認知和了解。由於不同人物對事物都在認知和了解能力上上有所差異，所以 Marton（1997）透過他的「變易學習」理論，把這些變易（variations）分為三個不同的變易：

第一個變易（Variation 1, V1）是指不同的學生對學習內容都有不同的見解。Marton 強調若老師能洞悉學生對學習內容的不同見解，從而加以分析，找出不同學生的不同學習問題，然後作出教學上的調適，這樣教學效益便能大大提升。

第二個變易（Variation 2, V2）是指不同的老師對同一的教學內容、教學重點都有不同的見解及處理的方法。Marton 認為若老師能相互溝通、分享教師心得，抱著「捨短取長」的心態，這樣便能設計出更有效益的課堂教學計畫。

第三個變易（Variation 3, V3）是指利用恰當的「變易圖式」作為指導教學設計的工具。Marton 強調基於老師對 V1 和 V2 的認知程度，透過分享、交流意見，老師可利用「變易圖式」，編寫或修訂教學計畫。因此，「變易圖式」的運用，主要集中在教學設計中。例如，原文參照，老師可以利用變易圖式設計不同的繪圖練習，讓學生明白判定全等三角形的其一正確條件 SAS 是不會受「角」的大小改變（變：銳角、直角、鈍角）而改變其恰當性的（不變：仍只能繪畫得一個三角形）。詳細內容見研究結果中的原文：教學設計與變易圖式的運用。

由於是次研究只集中討論 如何提升老師對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」的認識，所以本文只集中討論圖 1 理論架構的首五個環節：

- (一) 選擇研究的課題 (V2)
- (二) 初擬學習內容 (V2)
- (三) 診斷學生學習困難 (V1)
- (四) 確認學習內容及其關鍵特徵 (V2)
- (五) 教學設計 (V2、V3)

上述五個環節的特徵及進行過程，將透過是次研究課題「判定全等三角形條件」作深入解說。詳文見研究結果內文。

## 二、研究對象

是次研究是以香港某中學中一年級全部四班學生，共 123 人為對象。由於這是一個行動研究，目的在於提高老師和學生的「教」與「學」的效益，所以並沒有如一般傳統研究般設立實驗班及對照班。參與是次研究的中學老師有四人，另香港教育大學派出的數學科導師有一人（筆者本人），研究顧問有一人。老師們的背景資料見下表 1：

表 1

老師們的背景資料

老師	教授科目	職位	教學年資
甲	高中數學	數學科主任	二十多年
乙	初中數學	訓導主任	二十多年
丙	主教初中科學 兼教初中數學	永久編制老師	二十年
丁	初中數學及初中電腦	合約老師	三年

從上表得知，老師甲和乙都是資深數學老師，教授數學有二十多年了；老師丙主教初中科學兼教初中數學，也教了二十年。老師丁最年輕，主修物理，他只教了初中數學及初中科學三年。下文是是次研究，經過六次會議（每次開會大約兩小時多），研究員和老師經過深入的討論後所得的結果。

## 參、研究結果

下文所述內容，涉及各老師和筆者參與的每次「課堂學習研究」會議和個人自修的內容；經過討論、歸納，而取得各環節的共識和研究結果。這些結果，包含了老師們在討論和總結的過程中，不自覺地提升了他們對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」的認識。

由於是次研究只集中討論如何透過「課堂學習研究」提升老師對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」，所以下文只集中討論「課堂學習研究」的首五個環節所獲得的豐盛成果，並付以該環節增長了老師甚麼知識。

### 一、選擇研究的課題(V2)--- 「教學內容知識」

於中學芸芸課題中，值得老師探討的課題甚多，如演繹幾何、概率概念、面積公式、函數圖像等等。筆者在與老師作第一次會議前，要求老師們事前需考慮選擇哪一課題作為是次的研究課。在決定課題前必須提供選擇該課題的原因。以下是老師們選擇中學一年級判定「全等三角形的條件」的原因：

#### (一) 屬香港中學文憑考試數學必修部分，公開試的常見題目

根據《中學課程綱要 – 數學科（中一至中五）》（1999），課程發展處建議學校安排中一至中三年級分十四課節完成《全等與相似》課題；其中涉及全等三角形的有以下幾個學習重點。

1. 認識全等三角形及相似三角形的性質；
2. 探究全等三角形及相似三角形所需具備的條件；
3. 認識固定一個三角形的起碼條件；
4. 能列舉簡單理由判定兩個三角形是屬於全等三角形或是相似三角形（第 22 頁）。

於香港中學數學課程綱要，建議學生應掌握探究全等三角形所需具備的條件；並能列舉簡單理由判定兩個三角形是屬於全等三角形。研究課的老師任教的中學為全香港級別二的中文中學（香港中學水平分三級，一級最佳，三級最差），學生普遍數理能力較一般，大部分學生：

1. 能夠了解全等三角形的特性及其中三個條件（SSS、ASA/AAS、RHS）；
2. 部分學生混淆了 SAS 和 SSA，認為 SSA 也是全等三角形的其中一個條件。

此外在中學文憑考試，初中的判斷全等三角形所佔的分數雖然不多，但這幾分較容

易取得，也對級別二的學生於數學必修部分拿取第二或三級成績甚為重要(成績分五級：一級最差，五級最佳；五級又細分五、五\*、五\*\*)。考入香港各大學，數學最低要求是二級)，因此實不容忽視。

## (二) 教科書內容不足

1. 教科書並沒有向學生解釋 SAS 和 SSA 的分別。此外，探究活動也不足夠，學生不明白為何 SAS 是全等三角形的其中一個條件，但 SSA 卻不是；也不知道 RHS 是 SSA 的特殊例子 (Exceptional case)。

2. 教科書也沒有說出 SSA 和 RHS 的關係。

## 二、初擬研究課的學習內容 (V2) -- 「本科知識」和「教學內容知識」

根據老師們的初步選題，確定了是次研究以中學一年級判斷「全等三角形」的條件作為這個研究課的課題。後經導師和老師們的討論和交流，決定了以下三個教學重點為這個研究課的學習內容有：

- (一) 了解『SAS 和 SSA』之差異；
- (二) 找出『RHS 與 SSA』的關係；
- (三) 探究除了 SSS、ASA、SAS、RHS 還有新的判定「全等三角形」的條件嗎？

## 三、診斷學生學習問題 / 困難 (V1) -- 「教學內容知識」

為了確實判斷該校學生在依以往教學，學習了這單元後，是否真的會出現上述學習問題，研究員編寫了一份測驗卷給予中學二年班同學試做。目的是利用中二學生的表現作為評估中一學生的表現之參照。並據此結果，擬定是次研究課的教學內容。在是次研究，稱這份測驗卷為教學前測卷。當中一學生上完研究課後，他們會做同一份測驗卷(我們稱它為後測卷)。然後利中一和中二同學的成績作比較，這樣便可得知經「課堂學習研究」設計得的教材和教學方法是否真的能提升教學效益。教學前測卷題目內容見附件 1。以下表 2 展示了中二同學解答前測卷的結果及分析。

表 2

## 前測卷結果及分析

部分	分析	參考題號	答對率(%)
前置知識	<ul style="list-style-type: none"> <li>絕大部分學生未能了解全等圖形的基礎概念</li> </ul>	Q1	20%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>大部分學生了解全等三角形的特性及其中三個條件 (SSS、ASA/AAS、RHS)</li> </ul>	Q2 及 Q3	70%
研究課 重心	<ul style="list-style-type: none"> <li>大部分學生認識全等三角形的第四個條件 SAS</li> </ul>	Q4、Q5 及 Q9 (a)	60%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>大部分學生未能按照對應角的次序寫出全等三角形的名稱</li> </ul>	Q4、Q5 及 Q6	30%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>大部分學生認為 SSA 是全等三角形的其中一個條件</li> </ul>	Q7 及 Q8	70%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>部分學生能辨別全等三角形的其中兩個條件 --- SAS 與 RHS</li> </ul>	Q7 及 Q8	40%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>部分學生能辨別全等三角形的正確條件 SAS 與不正確條件 SSA</li> </ul>	Q7 及 Q8	30%
	知識轉移	<ul style="list-style-type: none"> <li>絕大部分學生能掌握非圖形及文字性問題</li> </ul>	Q9 (b)、Q10 及 Q11

前測後，研究員亦訪問了三位不同數學程度的中二學生。訪談內容分為三部分：前置知識、全等三角形的第四個條件 SAS 及探究 SAS 與 RHS / SSA 及 SAS 之分別。表 3 展示了訪談結果及分析，整體上大致與前測卷結果吻合。

表 3

## 前測後訪談結果及分析

部分	分析
前置知識	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 所有受訪學生均能指出 <math>SSS</math>、<math>ASA</math> 及 <math>RHS</math> 是全等三角形的其中三個條件。</li> <li>• 三位同學都指出 <math>AAS</math> 是全等三角形的其中一個條件。</li> <li>• 所有受訪學生都明白 <math>R</math>、<math>H</math> 及 <math>S</math> 的意思。</li> <li>• 最差程度的受訪學生將相似及全等的條件產生混淆。</li> <li>• 所有受訪學生均表示 <math>SSS</math> 代表三邊相等，即三對對應邊相等。</li> <li>• 所有受訪學生都知道直角的對邊稱為斜邊。</li> </ul>
全等三角形的第四個條件 $SAS$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 只有一位學生未能指出 <math>SAS</math> 是全等三角形的其中一個條件。</li> </ul>
探究 $SAS$ 與 $RHS$ / $SSA$ 及 $SAS$ 之分別	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 所有受訪學生均對 <math>RHS</math>、<math>SAS</math> 及 <math>SSA</math> 產生混淆</li> <li>• 除了程度最好的一位學生能指出 <math>SSA</math> 不是全等三角形的其中一個條件，其餘兩位同學皆以為 <math>SSA</math> 也不是全等三角形的其中一個條件。他們認為 <math>SSA</math> 與 <math>SAS</math> 是相同條件。</li> <li>• 全部同學都不明白這些條件是怎樣得來的。</li> <li>• 他們說祇靠死記哪些條件是對，哪些是不對的。</li> </ul>
前置知識	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 所有受訪學生均能指出 <math>SSS</math>、<math>ASA</math> 及 <math>RHS</math> 是全等三角形的其中三個條件。</li> <li>• 三位同學都指出 <math>AAS</math> 是全等三角形的其中一個條件。</li> <li>• 所有受訪學生都明白 <math>R</math>、<math>H</math> 及 <math>S</math> 的意思。</li> <li>• 最差程度的受訪學生將相似及全等的條件產生混淆。</li> <li>• 所有受訪學生均表示 <math>SSS</math> 代表三邊相等，即三對對應邊相等。</li> <li>• 所有受訪學生都知道直角的對邊稱為斜邊。</li> </ul>

整體而言，學生前測和訪談的結果及分析都與老師們選擇研究課課題所列出的學習問題和困難非常吻合。所以是次研究課的課題便可確定，其學習內容( Object of Learning, OL) 也就確定如下：

#### 四、確認學習內容 (OL) 及其關鍵特徵 (Critical Feature, CF):

##### (一) 確認學習內容 (OL)

1. 教授全等三角形的第四個條件 SAS；
2. 探究 SAS 與 SSA 的分別；
3. 探究 RHS 與 SSA 的關係；
4. 探究可有第五個判定全等三角形的條件。

因此，在上研究課前，各老師也就需要完成以下各教學要點，使它們成為研究課的前置知識。

1. 全等圖形的基礎概念
2. 全等三角形的特性及其中三個條件：
  - A. SSS
  - B. ASA/ AAS
  - C. RHS

##### (二) 關鍵特徵 (Critical Feature CF) -- 「本科知識」和「教學內容知識」

探討教授上述學習內容所涉及的關鍵特徵及教學設計，正正也涉及老師個人的「本科知識」和「教學內容知識」的認知，這也正是本文的主要研究目的。主因筆者希望透過這個中學『課堂學習研究』的個案，說明『課堂學習研究』是一種有效提升數學教師的「本科知識」、「教學內容知識」的行動研究。希望藉著這個實例，能讓數學老師明白要成為專業的數學老師，「本科知識」、「教學內容知識」是缺一不可的。以下是筆者在和老師們在進行教學設計的多次會議中，討論得的結果：

##### 1. 關鍵特徵 (CF):

- (1) 已知一個三角形有三條邊、三隻角；當兩個三角形是全等時，它們的相對邊、相對角都必定相等。但要判斷兩個三角形是否全等三角形，我們並不需要知道全部三對對應邊、三對對應角是否全部相等；我們只要知道其中的三對相等便可以了。但哪三對？它們的位置有關係嗎？
- (2) 當已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等時：
  - A. 若兩組對應邊的夾角相等，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 SAS；
  - B. 若該組對應角並不是夾角，但是直角時，該兩個三角形便是全等三角形，

條件是 RHS ；

- C. 若該組對應角並不是夾角，也不是直角時(或鈍角--課本內容沒有提及)，該兩個三角形便不一定是全等三角形。因此，判定全等三角形並沒有 SSA 這個條件。

## 2. 關鍵問題 (Key Questions) :

因此，當已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角是相等時，它們是否全等？答案可以是全等，也可以不是全等。關鍵是看：

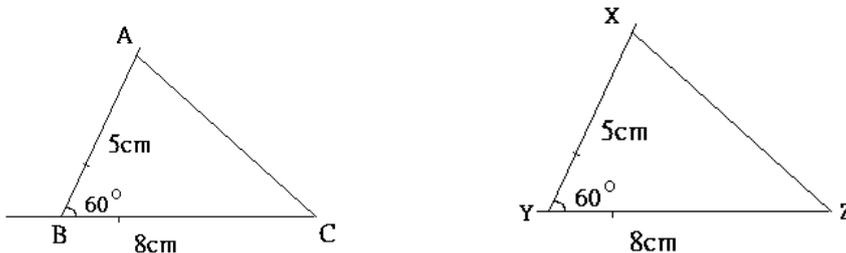
- (1) 該對對應角是否是該兩組對應邊的夾角？
- (2) 若不是夾角時，它是否是一直角（或一隻鈍角）？

看以下例子：

(1) 條件是正確的：

若兩組對應邊及它們的夾角相等，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 SAS。

例如：



$$\triangle ABC \cong \triangle XYZ \text{ (SAS)}$$

(2) 條件是錯誤：

若該組對應角並不是夾角或直角時，該兩個三角形便不一定是全等三角形；

SSA 不是判定全等三角形的其中一個可行的條件。

例如：

已知在  $\triangle IJK$  和  $\triangle YXZ$  中， $IJ=XY$ ， $JK=YZ$ ， $\angle K = \angle Z$ 。

$\triangle IJK$  和  $\triangle YXZ$  不是全等的

**問題：**SAS 和 SSA 有甚麼分別？它們都是已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等，為甚麼 SAS 是全等，SSA 不是全等？

**關鍵是：**

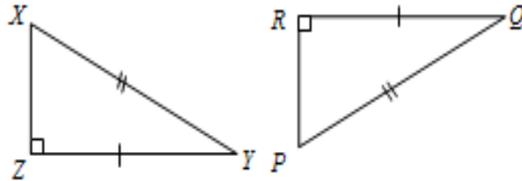
- SAS 是兩組對應邊及它們的夾角相等；A 在兩組相等對應邊中。

- SSA 是該組對應角 A 並不是夾角，不是在兩組對應邊中間。

(3) 條件是正確：

若該組對應角並不是夾角，但是直角時，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 RHS。

例如：



$$\Delta PRQ \cong \Delta XYZ \text{ (RHS)}$$

**問題：**RHS 不是和 SSA 一樣嗎？它們都是已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等，但該組對應角並不是夾角（角不是在兩組對應邊中間）嗎？但為甚麼 SSA 不是全等，RHS 卻是全等？

**關鍵是：**

- SSA 的 A 不是直角，所以 SSA 不是判斷全等三角形的其中一個條件。
- RHS 的 R 是直角，所以 RHS 是判斷全等三角形的其中一個條件。
- 因此，RHS 是 SSA 的一個特殊例子 (Exceptional case)。
- SSA 除了 RHS 還有其它特例嗎？有當 A 是鈍角。

註：我們可以透過很多不同的教學方法，讓學生明白 SAS、SSA 和 RHS 的關係。並讓他們了解、知道 SAS 和 RHS 都是判定全等三角形的正確條件，而 SSA 則不是。這留待另兩次的教學設計會議中進行討論。利用不同老師的意見 (V2)，考慮不同學生的學習及認知能力 (V1)，而結合設計得適合該校學生的教學內容、教學設計成果 (V3) (見以下部份)。

## 五、教學內容、教學設計成果 (V3) --提升了老師的「本科知識」和「教學內容知識」

老師們和筆者在教學內容會議中分享了各老師教授此課題的經驗及意見，從中大家歸納結集得以下結果：

- (一) 以往的教學，大多著重於將判斷全等三角形的四個條件 (SSS、SAS、ASA/AAS、

RHS) 逐一獨立解說，很少強調它們之間的關係，(例如：探究 SAS 和 SSA 的分別；RHS 和 SSA 之分別)；

(二) 以往的教學，大多以老師常用的 chalk and talk 直接解說，甚少讓學生自己作探究。因此學生會不明白 SAS 和 SSA 的分別，也不知道 RHS 是 SSA 的特例。

(三) 教學流程：今次研究課的上課模式是透過老師誘導學生作繪圖探究，讓學生自己探究得 SAS 是判定全等三角形的其中一個條件、SSA 不是判定全等三角形的條件，但 RHS 是 SSA 的特例，也是判定全等三角形的其中一個條件。

(四) 教具：除圓規直尺作繪圖外，老師也可考慮以幾何條及兩腳釘或電腦作輔助教學。

以下是在教學設計會議中，老師和筆者的談話，討論解說 SAS、RHS 是判定全等三角形的條件，但 SSA 不是判定全等三角形的條件。

筆者：你們以往是怎樣教授學生判斷全等三角形的條件的？

老師丁：大多依照教科書，告訴他們SSS、ASA、RHS和SAS是判定全等三角形的條件；

然後透過例題，告訴他們判斷的步驟。

筆者：那麼你怎樣知道SSS、ASA、RHS和SAS是判定全等三角形的正確條件？怎樣說服及讓學生明白它們是正確的？有甚麼方法嗎？

老師丁：中學一年級只學應用。我沒考慮過。

老師乙：對，中二有用繪圖方法讓學生明白，若提供的三個已知量度（兩邊一角或兩角一邊或三邊），各同學們都只能繪畫得一個相同的三角形，則哪便是正確的條件。

老師丁：我沒有教中學二年級，我只知應用。

筆者：那麼你們覺得把繪圖法和應用結合一拼讓學生在中一學習是不是更好嗎？

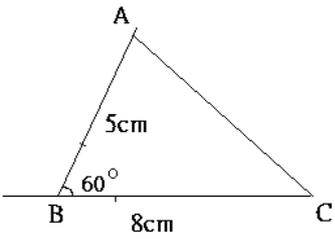
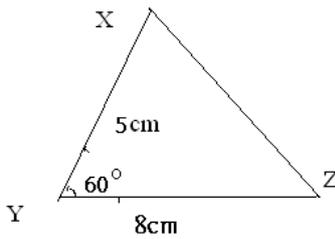
老師們和筆者都同意並集體設計教學活動。 以下是利用繪圖方法解說 SAS 是判定全等三角形條件和 SSA 不是判定全等三角形條件的教學設計例子。

### (一) 教學設計與變易圖式的運用（筆者和老師合作設計的）

#### 1. 教學內容一：透過繪圖方法認識判定全等三角形的其中一個條件：兩邊及夾角相等 (SAS)

活動一：學生以兩人為一組，一人繪畫  $\triangle ABC$ ，另一人繪畫  $\triangle XYZ$ 。

已知在  $\triangle ABC$  和  $\triangle XYZ$  中， $AB=XY=5\text{cm}$ ， $BC=YZ=8\text{cm}$ ， $\angle B=\angle Y=60^\circ$ 。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 。	
繪畫 $\triangle ABC$ ， 其中 $AB$ 長 $5\text{cm}$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $BC=8\text{cm}$ 。 完成後，嘗試量度 $AC$ 的長度。  $AC$ 的長度是： $7\text{cm}$ 觀察全班每一位同學所繪畫的 $\triangle ABC$ 是否全等？（是）	繪畫 $\triangle XYZ$ ， 其中 $XY=5\text{cm}$ ， $\angle Y=60^\circ$ ， $YZ=8\text{cm}$ 。 完成後，嘗試量度 $XZ$ 的長度。  $XZ$ 的長度是： $7\text{cm}$ 觀察全班每一位同學所繪畫的 $\triangle XYZ$ 是否全等？（是）
觀察你們每組繪畫的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ ，把它們剪出來，它們是否全等？（是）	
我們也可以用 $SSS$ 判定它們是全等，試在_____上填上適當線段或數字。 因為我們量度得： $AC=\underline{XZ}=7\text{cm}$ （量度得）； $\underline{AB}=XY=5\text{cm}$ （已知）； $BC=\underline{YZ}=8\text{cm}$ （已知） 所以 $\triangle ABC$ 全等 $\triangle \underline{XYZ}$ （ $SSS$ ）	

老師可以利用以下的變易圖式設計不同的繪圖練習，讓學生明白  $SAS$  是不受角的大小影響的。

### 2. 變易圖式

判斷全等三角形的條件	變	不變	審辨
<b>SAS</b>	角的大小 （鈍角→直角 → 銳角）	兩對對應邊 的長度	當對應角是夾角時，無論角是鈍角或直角或銳角，該兩個三角形都是全等三角形， <b>SAS</b> 是判斷全等三角形的正確條件。

## 3. 練習

(1) 已知在  $\triangle ABC$ ， $AB=5\text{cm}$ ， $BC=8\text{cm}$ ，角  $B=90^\circ$ 。繪畫  $\triangle ABC$ 。

(2) 已知在  $\triangle ABC$ ， $AB=5\text{cm}$ ， $BC=8\text{cm}$ ，角  $B=120^\circ$ 。繪畫  $\triangle ABC$ 。

你和同學畫得的  $\triangle ABC$  是一樣的嗎？

## 4. 結論

由此活動，學生明白若兩邊及夾角相等，只能繪畫得一個三角形。因此，若兩個三角形有同等的兩對對應邊及同等的一對對應夾角，它們就一定是全等三角形。所以 SAS 是正確判定全等三角形的條件。

## 活動二：

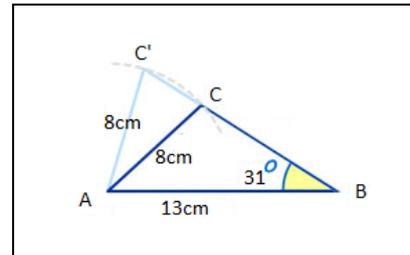
目的：解說 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。

若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對同等的對應夾角，但該對對應角並不是夾角，則該兩個三角形便不一定是全等三角形（因該對應角可以是銳角），所以 SSA 不是正確判定全等三角形的條件。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫  $\triangle ABC$ 。

繪畫  $\triangle ABC$ ，步驟：

- (i) 先利用直尺和量角器畫角  $B=31^\circ$  ；
- (ii) 畫  $AB=13\text{cm}$
- (iii) 利用 A 作圓心，半徑是  $8\text{cm}$ ，作一弧；  
使弧和角 B 的另一臂產生兩個交點；命名為 C 和 C'。  
完成後，連接 AC 和 AC'， $AC=AC'=8\text{cm}$ （半徑）。



每組同學，一個剪出繪畫得的  $\triangle ABC$ ，另一個剪出繪畫得的  $\triangle ABC'$ 。

把它們重疊一起， $\triangle ABC$  和  $\triangle ABC'$  是否全等？（不是）。

因此，我們可以判斷得：若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對對應夾角，但該組對應角並不是夾角，該兩個三角形便不一定是全等三角形，所以 SSA 不是正確判定全等三角形的條件。

## (二) 繼續進行教學內容、教學設計討論 (V2)、(V3)

其後，筆者引導老師自己發現 RHS 和 SSA 的關係；並發現 RHS 是 SSA 的特殊例子 (Exceptional case)。跟着，也有老師發現若 SSA 中的角 A 是一鈍角，則 SSO (O 是鈍角) 也 SSA 的特殊例子。

筆者：你們可有發現 RHS 和 SSA 有甚麼相同和相異的地方？

老師乙：它們同是有同等的兩對對應邊及一對對應夾角，該組對應角並不是夾角；但

RHS 是判斷全等三角形的條件，而 SSA 不是正確判定全等三角形的條件。

老師丁：除了 RHS 是 SSA 的特殊例子，還有其它嗎？

老師甲：有，若 SSA 中的角 A 是一鈍角，則它也 SSA 的特殊例子。

筆者：那麼，你們覺得我們有需要教授這些課本以外的知識給我們的學生嗎？

各老師皆同意。他們更強調有些公開考試也有考課程以外的延伸知識呢！下文便是透過「課堂學習研究」的「變易圖式」，讓學生探究得上述的「SSA 的特殊例子」---「RHS」，亦即「SSR」和「SSO」，O 是鈍角。

## (三) 變易圖式

SSA：判斷全等三角形的條件	變	不變	審辨
<p style="text-align: center;"><b>SSA</b></p> <p>註：在 SSA 中，A 代表任何角；因此，我們不知道 A 是銳角，還是直角？還是鈍角？</p>	<p>角的大小 (銳角→直角→鈍角)</p>	<p>有兩對對應邊及一對對應角 (不是夾角)</p>	<p>當對應角不是夾角時，該角由銳角改為直角或鈍角，我們仍會像活動二繪畫得該兩個大小不相同的三角形？</p>

活動三：

目的：解說 RHS 是判斷全等三角形的正確條件；它是 SSA 的特例 (Exceptional case)。

RHS 亦即 SSR (A → R)。

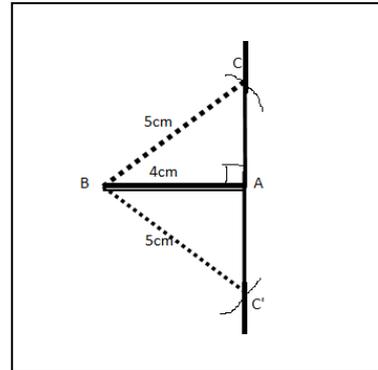
每個學生獨自繪畫  $\triangle ABC$ 。

已知在  $\triangle ABC$  中， $AB=4\text{cm}$ ， $BC=5\text{cm}$ ， $\angle A=90^\circ$ 。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫  $\triangle ABC$ 。

繪畫  $\triangle ABC$ ，步驟：

- (i) 先利用直尺和量角器畫  $\angle A=90^\circ$ （直角）；
- (ii) 畫  $AB=4\text{cm}$
- (iii) 利用  $B$  作圓心，半徑是  $5\text{cm}$ ，作一弧；  
使弧和角  $A$  的一臂產生兩個交點；命名為  $C$  和  $C'$ 。  
完成後，連接  $BC$  和  $BC'$ ， $BC=BC'=8\text{cm}$ （半徑）。



觀察同學所繪畫的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 是否全等？（是）

因此，若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對對應角，雖然該組對應角並不是夾角，但若它是一直角，則繪畫得的兩個三角形也是全等的，所以 **RHS** 是正確判定全等三角形的條件。  
**RHS** 亦即 **SSR** ( $A \rightarrow R$ )，**SSA** 的特例。

活動四(新發現):

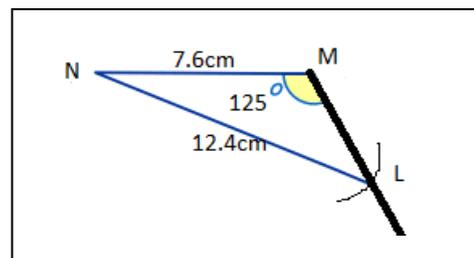
目的: 解說 **SSO** ( $O$  是一鈍角) 也是判斷全等三角形的正確條件；它也是 **SSA** 的特例。  
每個學生獨自繪畫  $\triangle LMN$ 。

已知在  $\triangle LMN$  中， $MN=7.6\text{cm}$ ， $LN=12.4\text{cm}$ ，角  $M=125^\circ$ 。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫  $\triangle LMN$ 。

繪畫  $\triangle LMN$ ，步驟:

- (i) 先利用直尺和量角器畫 角  $M=125^\circ$  ；
- (ii) 畫  $MN=7.6\text{cm}$
- (iii) 利用  $N$  作圓心，半徑是  $12.4\text{cm}$ ，作一弧；  
使弧和角  $M$  的另一臂產生一個交點；  
命名為  $L$ 。  
完成後，連接  $LN=12.4\text{cm}$ （半徑）。



我們只能繪畫得一個三角形  $LMN$ 。因此有同等的兩對對應邊及一對對應角，雖然該組對應角並不是夾角，但若它是一鈍角時，則繪畫得的三角形也是全等的，所以 **SSO** 也是正確判定全等三角形的條件。

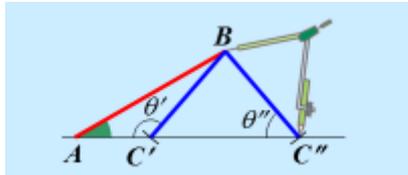
(四) 再繼續進行教學內容、教學設計討論 (V2)、(V3)

其後，筆者再引導老師自我發現得除了用「繪圖法」，也可以用「邏輯推論」用來說明「RHS 和 SSO」是「SSA」的特殊例子(Exceptional case)，「RHS 和 SSO」是正確判定全等三角形的條件。

下文是筆者和老師們利用「邏輯推論」說明 RHS(亦即 SSR,  $A \rightarrow R$ )和 SSO( $A \rightarrow O$ , O 代表鈍角)是判定全等三角形的正確條件，亦即是 SSA 的特殊例子。

1. 利用「邏輯推論」判定全等三角形條件

下圖是前文的繪圖法，用來解釋 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。



$\angle A$  是一銳角 (已知);  $\angle BC'C'' = \theta''$  (isos.  $\Delta$ )

$\therefore \theta''$  一定是銳角 (因為  $\Delta BC'C''$  是不可能有三個內角的)

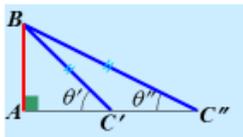
從上解，可繪畫得以下兩個三角形， $\Delta ABC'$  和  $\Delta ABC''$ ;

所以，SSA 不是判定全等三角形的正確條件。

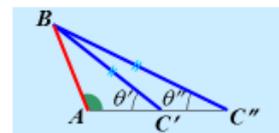
現再慮另外兩個情況：

情況一 (Case1):  $\angle A$  是一直角 和 情況二 (Case2):  $\angle A$  是一鈍角。

我們可假設能夠繪畫得以下兩圖：



Case 1:  $\angle A = 90^\circ$



Case 2:  $\angle A = \text{鈍角}$

探究問題：

問題 1：在上述兩個情況， $\theta''$  是一銳角，還是一鈍角呢？Case1 和 Case2 的圖有可能繪畫得嗎？

問題 2：在上述兩個情況，它們能夠繪畫得兩個三角形 ( $\Delta ABC'$  和  $\Delta ABC''$ ) 嗎？

情況一 (Case 1): 已知 $\angle A=90^\circ$ ; 因此,  $\angle ABC'$ 和 $\theta'$ 一定小於 $90^\circ$

$\therefore \angle BC'C'' = 90^\circ + \angle ABC'$  (三角形外角)

$$\angle BC'C'' > 90^\circ$$

$\therefore \angle BC'C''$  是一鈍角。

$\therefore \angle BC'C'' = \theta''$  ( $BC' = BC''$ , isso.  $\Delta$ )

$\therefore \Delta BC'C''$  是一定不能繪畫得的(因不可能有任何三角形, 它的內角和大於 $180^\circ$ )。

因此, 我們只能繪畫得一個三角形 $ABC'$ 。

再者, 由於給定的兩條邊長之長邊一定是給定的直角 (Right angle (R)) 的對邊; 因此該長邊必定是直角三角形的斜邊 (Hypotenuse (H)), 而另一給定的短邊則為直角三角形的其一邊 (Side (S)); 所以得出 RHS (亦即 SSR,  $A \rightarrow R$ ) 是判定全等三角形的正確條件, 亦即是 SSA 的特殊例子。

同理, 情況一 (Case 2):

$\therefore \angle BC'C'' = \text{鈍角} + \angle ABC'$  (三角形外角)

$$\angle BC'C'' > 90^\circ$$

$\therefore \angle BC'C''$  是一鈍角。

$\therefore \angle BC'C'' = \theta''$  ( $BC' = BC''$ , isso.  $\Delta$ )

$\therefore \Delta BC'C''$  是一定不能繪畫得的(因不可能有任何三角形, 它的內角和大於 $180^\circ$ )。

因此, 我們只能繪畫得一個三角形 $ABC'$ 。所以, SSO ( $A \rightarrow O$ , O 代表鈍角) 是判斷全等三角形的正確條件, 亦即是 SSA 的特殊例子。

## 2. 利用「解三角」判定全等三角形條件 (V2)、(V3)

在和老師們討論教學設計的過程中, 我們發現「解三角」也可以說明 SSA 不是判定全等三角形的正確條件, 而 SSO 和 RHS 卻是 SSA 的特例, 它們都是判定全等三角形的正確條件。

筆者: 老師們, 我們都知道若果兩個三角形是全等的, 則它們的三對對應邊、三對對應角必定是相等的。對嗎?

老師們齊齊點頭, 並說對。

筆者: 你們記得甚麼叫做「解三角」 (Solving Triangle)? 可以利用它判定全等三角

形條件嗎？

老師甲：我在高中班級有教「解三角」，我們可以用 **Sine Rule**（**正弦定律**）解得給定的兩邊一角或兩角一邊的三角形的其餘未知邊和未知角的數值。

老師乙：對，若解得的三角形的角和邊的數值，連給定的邊和角，多於三隻角、三條邊；那即代表給定的兩邊一角或兩角一邊能出現在兩個不一樣的三角形上，所以它不是正確判定全等三角形的條件。

老師丁：我也明白了！若解得的三角形的角和邊的數值，連給定的邊和角，只有三隻角、三條邊的數值；那即代表給定的兩邊一角或兩角一邊只能出現在一個三角形上，所以它是正確判定全等三角形的條件。

老師甲：對！我在高中教「解三角」，忘記告訴學生解三角形有這樣的作用。

老師丙：啊！我也明白了！那麼我們也可以用「畢氏定理」和「三角函數」解給定一直角和兩條邊的值的直角三角形，說明 **RHS** 是判定全等三角形的正確條件。

經過討論，筆者和老師們清楚知道利用「解三角」判定全等三角形條件，即是利用計算出三角形的餘下所有未知角、未知邊的值，判斷給定的兩邊一角或兩角一邊能否出現在兩個不一樣大小的三角形上？若能，即表示給定的條件不是正確判定全等三角形的條件。反之，若不能，即表示給定的條件是正確判定全等三角形的條件。

以下例子是筆者和老師們利用「解三角」說明 **SSA** 不是判定全等三角形的正確條件，**SSO** 是判定全等三角形的正確條件。

例一：已知  $\triangle ABC$ ， $AB=6\text{cm}$ ， $BC=4\text{cm}$ ， $\angle A=30^\circ$ ；

- (i) 解  $\triangle ABC$ ，
- (ii) 根據解得 (i) 的結果，給定的  $AB=6\text{cm}$ ， $BC=4\text{cm}$ ， $\angle A=30^\circ$  能否出現在兩個不全等的三角形上呢？
- (iii) 根據 (ii) 的結果，說明 **SSA** 是判定全等三角形的正確條件嗎？

解：

- (i) 利用正弦定律 (**Sine Rule**):

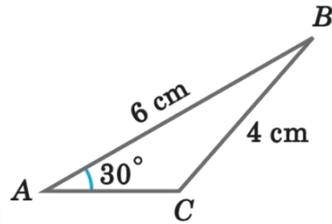
$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C}$$

$$\frac{4 \text{ cm}}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \text{ cm}}{\sin \angle C}$$

$$\sin \angle C = \frac{6 \sin 30^\circ}{4}$$

$$\angle C = 48.590^\circ \text{ or } 180^\circ - 48.590^\circ$$

$$= 48.6^\circ \text{ or } 131^\circ, \text{ cor. to 3 sig. fig. } \square$$



$$\angle B = 101.4^\circ \text{ 或 } \angle B = 19^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)}$$

$$\frac{AC}{\sin 101.4^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \quad \text{或} \quad \frac{AC}{\sin 19^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ}$$

$$AC = 7.84 \text{ cm}$$

$$AC = 2.60 \text{ cm} \quad \text{cor. to 3 sig. fig.}$$

(ii) 根據解得 (i) 的結果，我們可以得到以下兩個大小不一樣的  $\triangle ABC$ 。

第一個  $\triangle ABC$

$$AB = 6 \text{ cm}$$

$$BC = 4 \text{ cm}$$

$$AC = 2.60 \text{ cm}$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\angle B = 19^\circ$$

$$\angle C = 131^\circ$$

第二個  $\triangle ABC$

$$AB = 6 \text{ cm} \quad (\text{給定})$$

$$BC = 4 \text{ cm} \quad (\text{給定})$$

$$AC = 7.84 \text{ cm}$$

$$\angle A = 30^\circ \quad (\text{給定})$$

$$\angle B = 101.4^\circ$$

$$\angle C = 48.6^\circ$$

因此，給定的  $AB = 6 \text{ cm}$ ， $BC = 4 \text{ cm}$ ， $\angle A = 30^\circ$  (SSA) 是可以出現在兩個不一樣大小、不全等的三角形上的。

(iii) 根據 (ii) 的結果，說明給定的 SSA 的值能夠出現在不一樣大小的兩個三角形上。因此若有兩個三角形都有這樣的給定 SSA 值，它們就不一定是一模一

樣的全等三角形。所以 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。

例二：已知  $\triangle ABC$ ， $BC=7.6\text{cm}$ ， $AC=12.4\text{cm}$ ， $\angle B=125^\circ$ ，

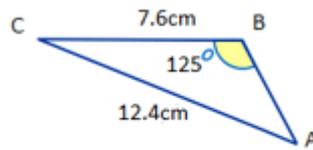
- (i) 解  $\triangle ABC$ ，
- (ii) 根據解得的 (i) 的結果，給定的  $BC=7.6\text{cm}$ ， $AC=12.4\text{cm}$ ， $\angle B=125^\circ$  會否出現在兩個不全等的三角形上？
- (iii) 根據 (ii) 的結果，說明 SSO (O 代表鈍角) 是判定全等三角形的正確條件嗎？

解：

- (i) 利用正弦定律 (Sine Rule)：

$$\frac{\sin(\angle A)}{7.6} = \frac{\sin 125^\circ}{12.4}$$

$$\frac{\sin(\angle A)}{1} = \frac{7.6 \times \sin 125^\circ}{12.4}$$



$$\sin(\angle A) = 0.502$$

$$\angle A = 30.1^\circ \quad \text{or} \quad 149.9^\circ$$

$\because \angle B = 125^\circ$  (已知)  $\angle A$  不可以等於  $149.9^\circ$ . (三角和不可大於  $180^\circ$ )

$$\angle C = 180^\circ - 125^\circ - 30.1^\circ$$

$$\angle C = 24.9^\circ$$

$$\frac{\sin(\angle C)}{AB} = \frac{\sin 125^\circ}{12.4}$$

$$\frac{\sin 24.9^\circ}{1} = \frac{AB \times \sin 125^\circ}{12.4}$$

$$AB = 6.37\text{cm}$$

- (ii) 根據解得 (i) 的結果，我們只找得以下一個  $\triangle ABC$ 。

$$AB=6.37\text{cm} \quad BC=7.6\text{cm} \quad (\text{給定}) \quad AC=12.4\text{cm} \quad (\text{給定})$$

$$\angle A=30.1^\circ \quad \angle B=125^\circ \quad (\text{給定}) \quad \angle C=24.9^\circ$$

- (iii) 根據 (ii) 的結果，說明給定的 SSO 的值只能夠出現在一個三角形。因此若

有兩個三角形都有這樣的給定的  $SSO$  值，它們就一定是一模一樣的全等三角形。所以  $SSO$  是判定全等三角形的正確條件。

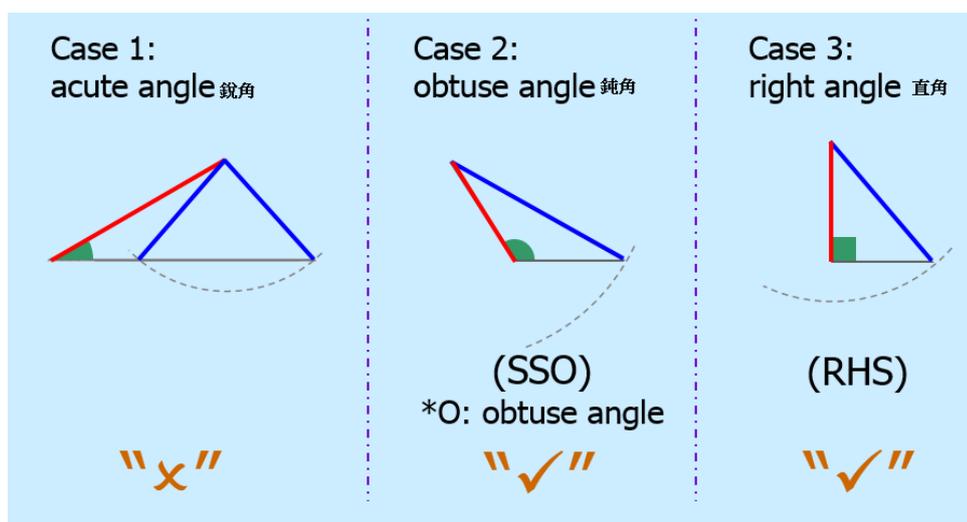
以下練習題可以利用 **Sine Rule**、畢氏定理和三角函數解得直角三角形；從而說明 **RHS**（亦即 **SSR**， $A \rightarrow R$ ）亦是判定全等三角形的正確條件。解直角三角形留待讀者作練習吧！

練習：已知在  $\triangle ABC$  中， $AB=4\text{cm}$ ， $BC=5\text{cm}$ ，角  $A=90^\circ$ 。

- (i) 解  $\triangle ABC$ 。
- (ii) 根據解得的 (i) 的結果，給定的  $AB=4\text{cm}$ ， $BC=5\text{cm}$ ，角  $A=90^\circ$  會否出現在兩個不全等的三角形上？
- (iii) 根據 (ii) 的結果，說明 **RHS** 是判定全等三角形的正確條件嗎？

總結：筆者和老師經過多次教學設計的會議，我們發現以下的結果：

- (i) 當已知一個三角形給定的兩邊及一個非夾角的大小時，**SSA** 不是判定全等三角形的正確條件；**RHS** 和 **SSO** 是 **SSA** 的特例，它們都是判定全等三角形的正確條件。



- (ii) 在說明這些判定全等三角形的條件，老師可以根據學生的能力及就讀年級，決定以哪一方法（可以多於一種）教導學生。是次研究，共探究得以下三種方法：

- A. 利用「繪圖法」判定全等三角形條件
- B. 利用「邏輯推論」判定全等三角形條件
- C. 利用「解三角」判定全等三角形條件

## 六、「課堂學習研究」與老師的「本科知識」和「教學內容知識」的提升

是次研究，老師和筆者在分析教學內容及設計教學活動的多次會議中，經過深層次的討論和分析教授此課題所需要的「本科知識」和「教學內容知識」。老師們都十分認同「課堂學習研究」確實提供了一個平台，讓他們有機會和不同背景和經驗的同工和大學導師一同做研究，讓他們認識了許多教科書以外的「本科知識」和「教學內容知識」；讓他們深入學習了不同級別的中學數學課題的內容和了解到它們的關連性。是次研究更讓他們學習了很多不一樣的教學方法。例如，老師們學習了利用變易圖式設計教學活動或練習、學會運用不同的方法教學。在這研究中，他們等別深徹體會到探究式教學的好處。從他們的交談中，知道他們都十分認同探究式教學不單能提升學生的學習興趣，更能提升學生的數學思維能力。因此，老師們都深覺「課堂學習研究」確實能提升他們的專業成長。表 4 撮述了老師們在是次研究增長了的主要「本科知識」和「教學內容知識」。

表 4

老師們的主要新增「本科知識」和「教學內容知識」

主要新增「本科知識」	主要新增「教學內容知識」
1. RHS ( $A \rightarrow R$ ) 是 SSA 的特例	1. 認識課題的關鍵特徵及學習難點
2. SSO ( $A \rightarrow O$ ) 是 SSA 的特例	2. 利用變易圖式設計練習
3. 利用「圓規繪圖」判定全等三角形條件	3. 設計探究活動，探究 SAS 與 SSA 的分別
4. 利用「邏輯推論」判定全等三角形條件	4. 設計探究活動，探究 RHS 與 SSA 的關係
5. 利用「解三角」判定全等三角形條件	5. 設計探究活動，探究 RHS 與 SSA 的關係

## 七、前後測成績的比較

鑑於是次研究，主要目的是指出「課堂學習研究」確實能夠有效提升數學老師的「本科知識」與「教學內容知識」。因此，文章並沒有太多著墨於學生在課堂上的學習情況，也沒有詳細介紹研究課的具體教案及教具設計。但為了反映是次研究課的教學成效，以下表 5 展示了前後測成績的比較；根據數據比較，確實能夠反影得是次「課堂學習研究」

是成功的，是有效提升了是次教學的效益的。

表 5

前後測卷成績比較

部分	內容	題號	前測答對率(%)	後測答對率(%)
前置知識	<ul style="list-style-type: none"> <li>了解全等圖形的基礎概念</li> </ul>	Q1	20%	80%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>了解全等三角形的特性及其中三個條件 (SSS、ASA/AAS、RHS)</li> </ul>	Q2	70%	90%
		Q3	70%	90%
研究課 重心	<ul style="list-style-type: none"> <li>認識全等三角形的第四個條件 SAS</li> </ul>	Q4	60%	90%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>按照對應邊和角的次序寫出全等三角形的名稱</li> </ul>	Q5	30%	80%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>判定 SSA 不是全等三角形的其中一個條件</li> </ul>	Q6	60%	80%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>辨別全等三角形的其中兩個條件：SAS 與 RHS</li> </ul>	Q7	70%	80%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>辨別全等三角形的正確條件 SAS 與不正確條件 SSA</li> </ul>	Q8	40%	80%
知識轉移		Q9	80%	90%
	<ul style="list-style-type: none"> <li>掌握非圖形及文字性問題</li> </ul>	Q10	80%	80%
		Q11	80%	90%

## 肆、結論

從是次研究，筆者發現大部份數學老師的「本科知識」是很不錯的；五位老師中有三位在大學是主修數學的。即使是兼教中學一年級數學的那位年輕老師，他也能理解中五的「解三角」數學問題。這也許由於他是理科出身，在大學是主修物理，因此數學基礎也不弱吧！

但「教學內容知識」方面，則略覺他們差了一點。也許由於香港的中學數學課程的內容過多，而編排上課的節數又不足夠，所以他們大多只能依書直說，集中以「講授方式」教學，使教學能趕上進度。從老師交流中，得知大部份老師都很少藉著參考其它外國數學教學書籍或數學論文，提升他們的「教學法」和「教學內容知識」。他們也較少實踐香港教育局總課程發展主任（數學）吳少階（2011）所說的「新課程內增設了的「數學的進一步應用」和「探索與研究」兩類活動」。這兩類活動目的是作為學生的延展學習，也讓學生欣賞數學。這兩類活動大多以作業（task）形式，進行一些探究性學習。目的是希望學生能在活動的過程中，把知識應用於另一知識層面或具體生活事情上。吳少階（2011）更強調「數學的進一步應用」更應橫跨數個數學課題，看學生是否能融合貫通。是次研究正實踐了課程的要求。例如探索 SSA 的特例：RHS（SSR）和 SSO；探索「解三角」、「畢氏定理和三角函數」與判定「全等三角形」的關係，這正突顯學生是否能融合貫通，了解這些橫跨數個數學課題的知識的關係。

因此，筆者極之認同 Shulman（1987）所說：一個專業的數學老師，單有良好的「本科知識」，仍是不夠的；優良的「教學內容知識」也是不可缺的。

從這次「課堂學習研究」中，老師經過集體研究、討論，對判定『全等三角形』條件的教學認識加深了。而且各中一班學生在後測的表現比前測中二班的成績有明顯的進步，這都強化了老師對「課堂學習研究」的信念。所以，老師在課研後進行檢討，都認為多元化教學確實能夠提升學生對抽象的數學概念的學習興趣和理解。透過具體探究活動，確實能夠使他們更易於明白其中的抽象數理。整體而言，老師和教育大學導師們對是次「課堂學習研究」都抱正面的應同，認為是研究並不是集體備課（group lesson preparation），它包含了專業發展（staff development）、個案研究（case study）的元素。所以課堂學習研究是具探究性（exploratory）和描述性（descriptive）的。因此，是次課堂學習研究，確實能為老師們提供一個正確的、新穎的教學方向，並能讓老師們認識及體會課堂學習研究的運作模式及了解其內在的功能。是次研究，更讓老師們擴闊了個人

的視野，並藉著匯集各人的長處，在集思益廣的有利環境下提升了教師的專業知識。

## 參考文獻

- 吳少階 (2011)。強調批判解難，結合知識生活。星島日報，教育版。日期：2011年9月1日，香港。doi: 10.9747/jars.18.1\_53
- 香港課程發展議會 (1999)。中學課程綱要－數學科(中一至中五)。香港：政府印務局。doi: 10.6610/ETJMT.20070301.02
- 香港課程發展議會 (2000)。數學教育學習領域：數學課程指引(小一至小六)。香港：政府印務局。doi: 10.6173/CJSE.2007.1505.05
- 黃德華 (2011)。香港數學課程改革與課堂學習研究。梁玉麟、勞傳燕華、江巧妍，數學課堂學習研究實踐與數學基本概念的教學，頁 3-32。安徽：安徽教育出版社。doi: 10.6610/ETJMT.20090601.02
- 盧敏玲 (2002)。課堂學習研究，院校協作與教學實踐發展中心通訊：香港：香港教育學院。doi: 10.6222/pej.3803.200509.0906
- Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, Vol. 2, pp. 1 - 48. Greenwich, CT: JAI Press. doi: 10.1016/S1479-3687(01)80021-3
- Calhoun, E. F. (1993). Action research: Three approaches. *Educational Leadership*, 51 (2), 62-65. doi: 10.4135/9781483329369.n12
- Fullan, M. (1997). The complexity of the change process. In M. Fullan (Ed.), *The challenge of school change*. Illinois: Skylight Training and Publishing. doi: 10.4135/9781452218991.n2
- Schofield, A. H. (1981). 'Teacher effects on cognitive and affective pupil outcomes in elementary school mathematics'. *Journal of Educational Psychology*, 73, 462-471. doi: 10.1037//0022-0663.73.4.462
- Shulman, I. S. (1986). 'Those who understand: Knowledge growth in teaching'. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004
- Shulman, L. S. (1987). 'Knowledge and teaching: Foundations of new reform'. *Harvard*

*Educational Review*, 57(1), 1-22. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Wong, T. W. (2002). Competency in Mathematics Teaching: Subject Content knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Attitudes Toward Teaching Mathematics. *Doctoral dissertation*, University of Leicester. doi: 10.1016/j.tate.2014.11.004

# 附件一

## 中一級數學科前測卷

時間： 25 分鐘

班別： F. 1 ( )

姓名： \_\_\_\_\_ ( )

1. 在下列哪種情況下，肯定圖形是全等的？

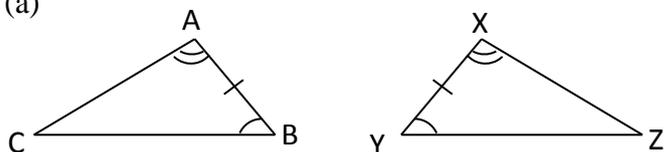
- I. 它們相似。
- II. 它們的對應角相等。
- III. 它們的面積相等。

- A. 只有 I
- B. 只有 II
- C. 只有 III
- D. I 及 III

**D**

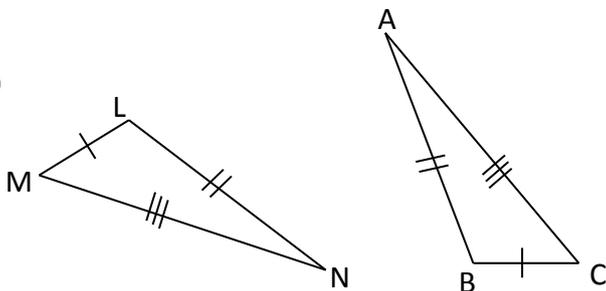
2. 試判斷下列每組三角形是否全等。若是，則寫下理由。

(a)



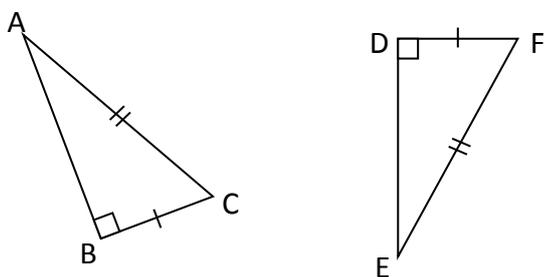
是 理由： ASA  
 不是

(b)



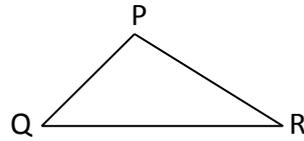
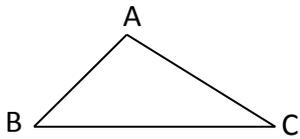
是 理由： SSS  
 不是

(c)



是 理由： RHS  
 不是

3.

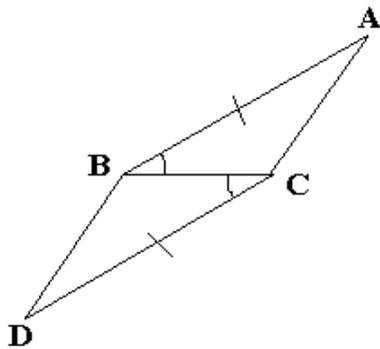


已知 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ，則

- (a)  $\angle A = \underline{\angle P}$     (b)  $\angle C = \underline{\angle R}$     (c)  $\angle Q = \underline{\angle B}$   
 (d)  $\underline{AB} = PQ$     (e)  $BC = \underline{QR}$     (f)  $AC = \underline{PR}$

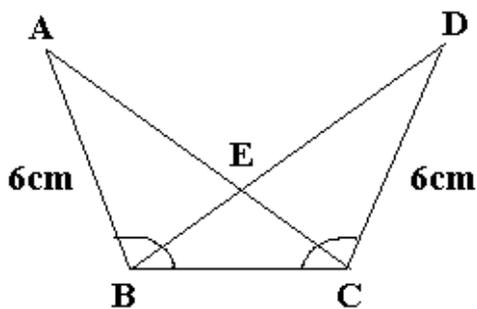
題 4 至題 6。觀察附圖，你能否在圖中找到兩個全等三角形？若能夠，請在 \_\_\_\_\_ 上填上三角形的名稱，並於( )內寫上全等的理由。

4.



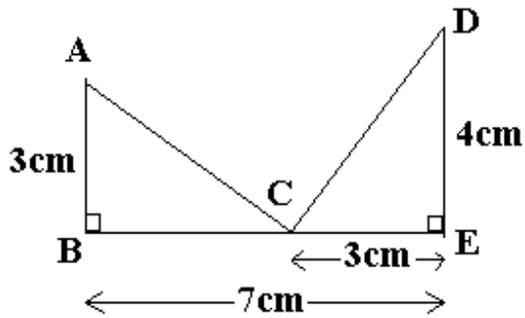
- 能  $\triangle ABC \cong \underline{\triangle DCB}$  (SAS)  
 否

5.



- 能  $\triangle ABC \cong \underline{\triangle DCB}$  (SAS)  
 否

6.



能  $\Delta ABC \cong \Delta CED$  (SAS)

否

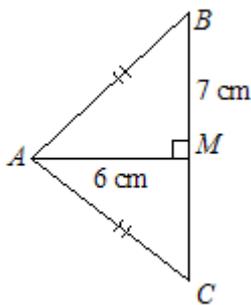
題 7 至題 8。選出正確的答案。

7 已知在  $\Delta IJK$  和  $\Delta YXZ$  中， $IJ = XY$ 、 $JK = YZ$ 、角  $K =$  角  $Z$ 。

- A.  $\Delta IJK$  和  $\Delta YXZ$  不是全等的
- B.  $\Delta IJK \cong \Delta YXZ$  (SSA)
- C.  $\Delta IJK \cong \Delta YXZ$  (AAS)
- D.  $\Delta IJK \cong \Delta YXZ$  (ASA)

A

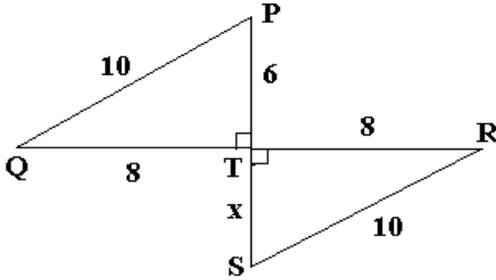
8.



- A.  $\Delta ABM \cong \Delta AMC$  (RHS)
- B.  $\Delta ABM \cong \Delta ACM$  (SAS)
- C.  $\Delta MBA \cong \Delta MCA$  (SSA)
- D.  $\Delta ABM \cong \Delta ACM$  (RHS)

D

9. 已知  $\triangle PQT \cong \triangle SRT$ , 且  $PTS$  及  $QTR$  都是直線。請寫出它們全等的理由及找出圖中的未知量  $x$ 。



(a)  $\triangle PQT \cong \triangle SRT$  的理由：( **RHS** )

(b)  $x = 6$

10. 已知  $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ 。判斷下列句子是否正確。「 $\surd$ 」表示正確的，「 $\times$ 」表示錯誤的。

- (a)  $\triangle PQR$  和  $\triangle XYZ$  的所有對應角相等。   **$\surd$**
- (b)  $\triangle PQR$  和  $\triangle XYZ$  的所有對應邊相等。   **$\surd$**
- (c)  $\triangle PQR$  和  $\triangle XYZ$  的周界是相等的。   **$\surd$**
- (d)  $\triangle PQR$  和  $\triangle XYZ$  的面積是相等的。   **$\surd$**

11. 判斷下列句子是否正確。「 $\surd$ 」表示正確的，「 $\times$ 」表示錯誤的。

- (a) 任何兩個周界相等的三角形均是全等的。   **$\times$**
- (b) 任何兩個面積相等的三角形均是全等的。   **$\times$**
- (c) 所有直角三角形均是全等的。   **$\times$**

黃國綸、許慧玉 (2016)。  
幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之研究。  
臺灣數學教師, 37 (2), 50-71  
doi: 10.6610/TJMT.20160930.01

# 幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形 包含關係之研究

黃國綸<sup>1</sup> 許慧玉<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 新竹市立建華國民中學數學教師

<sup>2</sup> 國立新竹教育大學數理教育研究所

本研究旨在探討分類活動對提昇國中生判斷四邊形包含關係的成效。幾何的包含關係是由幾何性質之間的上下關聯性所形成的集合概念，分類活動提供學生在給定的幾何圖形分類時，觀察圖形隱含的性質，且在命名時掌握圖形的定義，逐漸理解及判斷包含關係。本研究以前實驗設計法 (pre-experimental design) 之架構，採單組前後測量設計 (one-group pretest-posttest design)，研究結果發現 (1) 八年級學生在教學前對四邊形包含關係的迷思概念有以下三種：第一、學生習慣注意矩形和正方形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。第二、學生的典型 (prototype) 心像容易導致無法接納非典型圖形。第三、學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難。(2) 學生經過圖卡分類教學介入後在正方形與菱形的包含關係之後測表現與成效為最好，81.7%；在菱形與箏形的包含關係之後測表現最差，只有 63.3%，成效也最差，僅進步 30.0%；梯形與平行四邊形互斥關係的後測表現，達 60.0%。(3) 無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別，但教學介入後包含關係的難易度沒有太大改變。根據研究結果，我們最後提出四邊形包含關係教學設計的相關建議，可供教師參考。

**關鍵詞：**分類；四邊形；包含關係；幾何

## 壹、緒論

### 一、研究動機

分類是人類基本的認知功能之一。西方最早的分類概念，源自亞里斯多德的範疇主張，範疇是一種概念分類的工具，而概念的分類是一種基本且普遍的認知形式，影響人類的學習，如國外學者 Bruner、Goodnow 與 Austin (1956) 認為透過分類的活動可以幫助學生進行概念的學習。人們用某種方式對事物加以分類之前，必須知道這些事物所具有的屬性 (Bruner 等, 1956)。例如，一般轎車都有四個輪子，所以五個輪子的車子不能歸入「轎車」這個類別。因此，學生對概念學習的重點在於能否找出概念的關鍵屬性。此外，分類也根植於人類的生活經驗當中，例如在日常生活中，我們常對周圍的事物採取階層的分類，例如將「垃圾」區分為「資源垃圾」、「廚餘」及「一般垃圾」等三個類別，其中「資源垃圾」又可分成「紙類」、「鐵類」、「鋁類」、「玻璃類」、「塑膠類」等不同的「子類別」。

Ausubel (1968) 將概念視為一個有層次的結構，居於結構上層稱為要領概念 (superordinate concept)，意即個人對事物整體性概括的認識，而居於結構下層者稱為附屬概念 (subordinate concept)，意即個人對事物的特徵較細微特殊的記憶。「包含關係」正是架構在這樣有層次結構的分類上，其涉及相關的上層與下層概念之理解，其中下層概念是包含於上層之內，下層概念除了與上層概念有共同屬性之外，又有其他非共同屬性 (De Villiers, 1994)。因此，看見事物的屬性並依照其屬性將其歸類固然重要，但分類後根據該類別進行推理以形成概念的結構更是不可忽視。

舉例來說，平行四邊形與菱形皆為兩雙對邊分別平行的四邊形，但菱形又有四邊等長的性質，因此菱形可視為四邊等長的平行四邊形，亦即平行四邊形的下屬概念為菱形，也就是說菱形是平行四邊形的一種「特例」；用集合的語言來說就是平行四邊形包含菱形，而菱形包含於平行四邊形。惟在國中階段的「平行四邊形」單元的教學目標中，主要是希望學生能透過分析四邊形的性質，藉由邏輯演繹的方式來理解四邊形的分類概念，從而判斷不同圖形間的「包含關係」。若以判斷菱形和平行四邊形的包含關係為例，首先學生需要能從菱形定義於「四邊等長的四邊形」出發，並理解平行四邊形的判別性質，再根據其定義判斷菱形是兩雙對邊分別相等的四邊形，接著由平行四邊形的判別性質推論菱形也是平行四邊形。我們可以看見其中至少涉及兩個步驟的推理認知，因此該包含

關係的判斷對一些中小學生而言可能略顯複雜。

研究指出學生說明定義的表現優於辨識出符合對應此定義的各種幾何圖形 (Fischbein & Nachlieli, 1998)。學生並不了解定義規範了圖形的建構以及其可能變化的範疇。大多數的概念雖透過定義習得，但學生自己對該概念所反映的案例可能仍與數學定義不一致，甚至可能與他們自己所提出來的定義不一致 (Wilson, 1990)。學生對於幾何定義概念與圖形案例之間產生的不一致，亟需教學上的設計與處理。

就幾何四邊形來說，倘若學生未能理解四邊形的定義與相關性質，以及此定義與性質對圖形變化的影響，便無法理解不同四邊形之間的包含關係。近幾年來，國內有許多關於中小學生學習四邊形概念的現況研究，再再顯示中小學生在學習四邊形的包含關係出現諸多困難或迷思概念。例如，陳明新 (2015) 的研究指出國小四年級的多數學童存在長方形鄰邊不相等的迷思概念，無法認為正方形是長方形的一種。楊忠璇 (2013) 的研究發現五年級學童在包含關係概念調整時有一些不正確的思考方式，譬如否認正方形是長方形的一種。林柏嘉 (2009) 整理國中學生在四邊形辨識迷思的類型有典型例類型、空間視覺類型、語意類型、以及互斥思維類型。

雖然國內有不少學者對四邊形包含關係作了寶貴的研究，但是在包含關係的認知發展路徑、教學序列、或各包含關係難易度的比較這些部分卻鮮少有進一步的探討。反觀國外已有研究發現一些常見之幾何形狀認知發展的路徑，例如 Vinner 與 Hershkowitz (1980) 對鈍角和直角、直角三角形、與三角形的高，研究出共同的認知發展路徑。Nakahara (1995) 在日本的小學生關於基本四邊形之研究，也發現一種常見的認知發展路徑：平行四邊形→菱形→梯形。Heinze 與 von Ossietzky (2002) 研究發現八年級學生在四邊形分類的表現上出現缺陷，在數學語言與思考理解有所困難。甚至在包含關係難易度的比較方面，Fujita 與 Jones (2007) 也對此作了初步的探討。

Fujita 與 Jones (2007) 認為理解四邊形的包含關係，其中可能存在不同的困難等級順序，也就是有些包含關係比較容易，有些比較困難。例如理解菱形和平行四邊形的包含關係可能比理解正方形和長方形的包含關係還容易，菱形被辨識為平行四邊形比正方形被辨識為長方形還容易，因為菱形「看起來像」平行四邊形，正方形「看起來不像」長方形。但是正方形和長方形的包含關係對學生之所以困難，未必僅是看起來像不像的問題，或許是因為受到典型心像的因素，學生可能認為正方形根本是與長方形互斥。

相較之下，從四邊形包含關係的認知發展路徑、教學策略、以及各包含關係難易度之間的比較來看，目前國內對這方面的研究似乎有所不足，這些方面皆值得更深入探究。

因此，本文擬先從文獻開始，回顧中、小學生在四邊形包含關係上的迷思概念，並從文獻挖掘有效的教學策略，希望能從中分析其對包含關係認知歷程，再透過教學實驗的結果，探討各包含關係難易度的比較，以提供日後四邊形包含關係教學設計之參考。

綜上所述，本研究擬將探究下列兩個研究問題

- (一) 中學生對四邊形包含關係的迷思概念為何？
- (二) 本文的教學實驗對國中生學習四邊形包含關係的表現與成效為何？

## 貳、文獻探討

包含關係是指集合和子集合間存在一般化與特例的關係，這種關係涉及將某概念從一般到特殊分成不同層次組別的階層分類(hierarchical classification)，De Villiers(1994)曾使用「描述性(descriptive)」分類和「建構性(constructive)」分類來描述理解包含關係的不同方法，其中「建構性」分類係指一般化和特殊化的數學歷程被應用在形成新概念，而「描述性」分類係指當概念已經徹底被檢查後，概念的分類才會被理解。因此「描述性」分類涉及從已存在的一組命題選擇屬性好為建立包含關係，而在「建構性」的分類方法中，當一個概念的某些性質將被刪除而導致更一般的概念形成時，數學歷程中的一般化才會發生，例如正方形是四角相等且四邊等長的四邊形，假若把「四角相等」的屬性刪除，便形成「四邊等長」的四邊形概念，也就是菱形。另外，數學歷程中的特殊化，意指增加一些新的屬性或取代一般概念中原有的屬性，進而形成新概念的的特殊性，例如，在平行四邊形中限制一內角為直角時，形成平行四邊形的一種特例—矩形。

一般而言，包含關係的認知會隨著年齡而發展，如 Gelmann 與 Baillargeon (1983)認為學童若能找到一個恰當的分類架構，就能根據此標準做有系統的歸類，將基本的分類邏輯應用到屬性組成更複雜的事務上。文獻上已有許多學者對學生學習四邊形包含關係提出學生學習困難及學生容易存在的迷思概念，內容詳述如下。

### 一、四邊形包含關係的迷思概念

#### (一) 正方形與長方形之間的包含關係

矩形(長方形)是四個內角皆是直角的四邊形，但是不少學生受到語意的影響將正方形排除在矩形之外。陳明新(2015)應用動態幾何軟體以瞭解國小四年學童拖曳圖形對四邊形包含關係認知情形，研究顯示國小四年級多數學童因長方形鄰邊不相等的迷思

概念，無法認知正方形是長方形的一種。Lin 與 Yang (2002) 為探討定義，而作一個從非形式到形式論證的數學活動，對兩個七年級學生在非正式論證的形式下重新建構矩形的定義，研究發現參與者在心像的刻畫和定義的歷程中，由於英文的 *rectangle*，是被翻譯為「長方形」或「矩形」，在兩位參與者中，有一位對矩形的心像為一邊長需要比其鄰邊還要長。何敏華 (2005) 的教學活動歷程也發現七年級學生受長方形字面意義的影響，認為長方形長寬應是一邊長而另一邊短，導致學生有「正方形不是長方形」的迷思概念。總結來說，正方形與長方形之間的包含關係學習困難大致包含了語意的影響、長方形鄰邊不相等的典型心像。

## (二) 正方形與菱形之間的包含關係

黃志祥 (2003) 發現國小六年級學生在四邊形幾何圖形的概念心像上普遍有包含性不足的情況，也就是有些圖例被錯誤地排除，例如學童以為斜擺的正方形是菱形，但不是正方形，此一現象可能是受正方形的典型心像所影響，導致無法理解正方形與菱形的包含關係。Leung (2008) 利用電子白板「動畫點播 (animation-on-demand)」的效果，在電子白板上同時呈現五個不同角度的菱形，其中也包含直角的菱形，研究結果顯示九歲的學童在經過三次這樣的教導後，可以瞭解菱形的必要屬性是四邊等長並判斷正方形是菱形的一種。

## (三) 菱形與平行四邊形之間的包含關係

何敏華 (2005) 的教學活動歷程發現七年級學生對平行四邊形的認知會受一般繪圖時常用的大小、方位之影響，以致於產生長得瘦瘦長長的菱形不是平行四邊形的錯誤迷思。由此可知，學生可能受到菱形典型例的因素而將菱形排除在平行四邊形之外。

## (四) 長方形與平行四邊形之間的包含關係

Monaghan (2000) 也發現學生心中普遍存在平行四邊形的典型心像，所以容易認為長方形不是一個平行四邊形。另外，學生也可能將矩形概念過度外延至平行四邊形，亦即將平行四邊形納入矩形。Wilson (1990) 使用定義與圖例的研究中，大部分學生在描述矩形定義時，145 位八年級學生在定義中不強調矩形的直角屬性，有 61 位選擇沒有直角的平行四邊形作為矩形。由上所述，長方形與平行四邊形之間的包含關係學習困難也受到平行四邊形典型心像所影響。

## (五) 菱形與箏形之間的包含關係

文獻已指出，學生將菱形概念過度外延至箏形，亦即將箏形納入菱形。郭俊麟(2011)探討八年級學生對數學敘述及其逆敘述的辨識現象，在有效樣本 127 人中，對複句句法有約六成的學生認為「因為菱形的兩雙鄰邊等長，所以菱形是箏形」的敘述及其逆敘述意思相同，由此可知部分學生可能因為菱形的兩雙鄰邊等長，所以誤認菱形是箏形。另外，學生可能受到箏形的典型心像而將菱形或旋轉過的箏形排除在箏形之外。例如 Currie 與 Pegg (1998) 的研究指出學習者在定義和分類有困難，這種困難是因學生不能理解類包含的關係，如菱形是箏形的一種。由於箏形的定義可能有不同的解讀，謝堅、朱建正、魯炳寰與廖淑麗 (2006, 頁 30) 認為箏形定義為相鄰兩邊分別相等的四邊形，這樣的邊長關係在描述上對國小學童相當困難。此外，在圖形的辨識上，只要把箏形轉個方向，學生可能就無法辨識出來。Fischbein 與 Nachlieli (1998) 研究九至十一年級學生，共兩百一十八位受試者，要求他們指出下圖中對應於定義的圖形。研究結果發現圖 a 被辨識為一箏形者，只佔受試者總數的 66%。

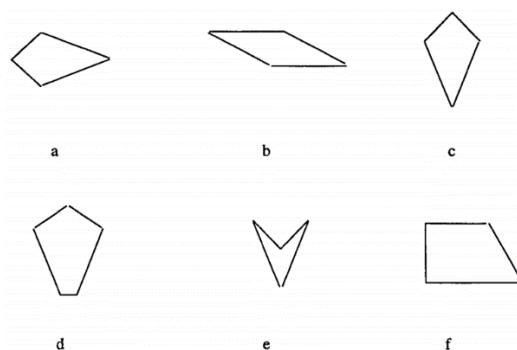


圖 1 箏形的辨識研究。 “Concepts and figures in geometrical reasoning,” by Fischbein, E., & Nachlieli, T, 1998, *International Journal of Science Education*, 20(10), p. 1202

#### (六) 梯形與平行四邊形的互斥關係

梯形和平行四邊形在定義上是彼此互斥的，但是常有學生將平行四邊形概念過度外延至梯形，亦即將梯形納入平行四邊形。謝堅等人 (2006, 頁 31) 指出我們在溝通梯形的定義時，常常省略「恰」字，而將梯形的定義說成「有一雙對邊平行的四邊形」，這種「有一雙對邊平行的四邊形」的說法很容易產生文字意義上的混淆，例如：解讀成「至少有一雙對邊平行」時，平行四邊形也是梯形，但若解讀成「恰有一雙對邊平行」時，平行四邊形則不是梯形。

由上所述，文獻探討中列出六種關於四邊形包含關係常見的迷思概念，似乎發現學生判斷錯誤的原因大都在於受到語意或圖形的典型心像所致。然而，如何打破學生對圖形的典型心像，使其看見圖形的關鍵性質，接著又能利用圖形的關鍵性質或定義來判斷四邊形的包含關係呢？本文試以陳創義（2006）的「分類教學」為例，分析其對四邊形包含關係學習有效因素。

## 二、分類教學概念的設計理念

陳創義(2006)依據荷蘭發展現實數學教育(Realistic Mathematics Education, [RME])的經驗觀點，亦即教學理論是教育研究與教學實作長期互動的產物，基於學生對圖形的辨識的認知，發展一個分類的教學方案來進行教學實驗，來瞭解對學生在與概念瞭解是否有所幫助。陳創義（2006）針對三角形的分類提出強化管理路的分類教學，也就是對於分類的對象之形成與界定以及分類準則的功能意義，做適當的描述及進行，讓學生可以瞭解其理路，以及對各類別作適當的命名或表徵。因此，學生在分類教學下，對於概念分類的範圍界定與其理路的釐清會有幫助，且對分類準則的性質的強調，可以增進概念的理解，進而正確判斷圖形的包含關係。倘若教師能做好分類教學，應可解決學生在圖形辨識上大部分的問題，諸如：語意問題，可透過分類時的命名讓學生區辨生活語言的含意及數學名詞之間的異同；典型例問題的解決，可藉由分類教學歷程中可以經驗許多的非典型例；此外，互斥思維及空間視覺問題的解決，可透過分類範圍的界定以及強調分類準則中圖形所具有的屬性。

陳創義（2006）的分類教學的實驗有三個發現：第一、強化管理路的數學分類概念教學有助於概念的學習。第二、在國中實施強化管理路的數學分類概念教學是可行的。第三、強化管理路的數學分類概念在數學的後續發展是很重要的。此後，林柏嘉（2009）探討改善四邊形辨識迷思的教學策略，所提出的兩種策略之中有一者亦為分類教學策略，研究結果發現兩種策略均幫助學生改善四邊形辨識的迷思，惟分類教學策略有效的原因，在於學生進行分類操作時，注意力由圖形輪廓進入了圖形結構，分類所完成的結果，提供學生命名的脈絡與包含關係的理解。

上述分類教學概念整體而言，包含關係是涉及某概念從一般到特殊分成不同層次的階層分類，其概念的發展是建立在逐步幫助學生排除圖形辨識的認知障礙；而分類教學之所以能夠做到這一點，是因為學生在圖形分類的歷程中，首先會把注意力集中在圖形的性質，再者命名時掌握圖形的定義，至終在判斷包含關係時，藉由將一個概念的某

些性質刪除而導致更一般的概念形成，或藉由增加一些新屬性或取代概念中原有的屬性而形成特殊性，因此分類教學會對學生在四邊形包含關係學習有效。

### 三、本研究進行之教學實驗的教學模式

本研究參考陳創義（2006）與林柏嘉（2009）的分類教學實驗，利用圖卡分類設計成如下的教學模式，如圖 2：

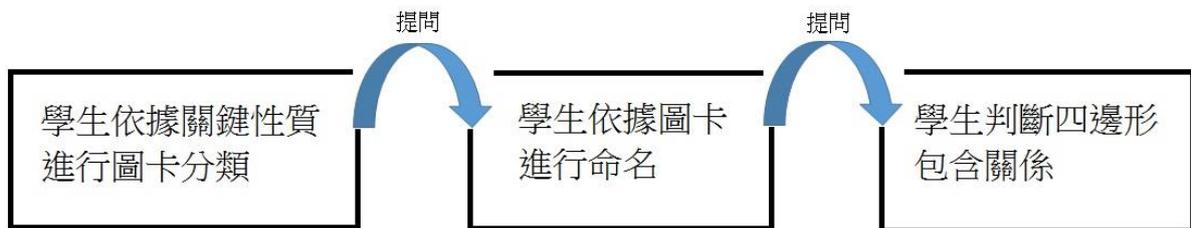


圖 2 研究進行教學活動流程圖

上圖含示，分類活動的主要目的是為了打破學生對各種四邊形的典型心像，使學生不是藉由圖形的外觀來辨識圖形，而是透過分類準則中的關鍵性質來辨認圖形的特徵，並發現某一分類群體中共有的性質或規則。在關鍵性質方面（如表 2），本研究再細分單準則與雙準則兩類。單準則是指分類時僅用到某一幾何性質，諸如活動一到四（如表 2）分別用到四邊形的對邊平行性質、四內角皆為直角、四邊等長以及按相等邊長數目等單準則性質，惟正方形不僅四內角相等，其四邊亦等長，亦即具有兩種幾何性質，由於在正方形的辨識上需要觀察到兩個性質，因此本研究安排活動五依雙準則性質來分類。

此教學模式中「提問」的主要目的是橋接分類與命名兩個教學活動。當圖卡分類活動後，教師藉由「提問」鷹架學生進行圖形命名，教師引導提問的問題例子可以是「你們覺得有四個直角的四邊形可以叫作什麼？」當學生能夠對圖形命名，釐清圖形的概念定義後，教師再經過「提問」，讓學生利用定義思考圖形之間的包含關係，引導的問題可以是「正方形算不算長方形的一種呢？為什麼？」

結合分類活動與命名活動，並輔以引導提問，鷹架學生從幾何定義與性質出發，觀察符合定義的各種圖形案例，並由定義與性質來思考不同圖形之間的關係。而引導提問的主要用意是讓學生在利用幾何性質分類之後，能夠連結分類與命名之間的關聯性，並以此關聯性來思考包含關係。

綜合上述觀點，四邊形包含關係的認知關鍵在於學生能否打破四邊形的典型心像或

語意影響，進而看見圖形的內在關鍵性質。當學生進行圖卡分類時，注意力由圖形輪廓進入了圖形性質，教師的引導提問扮演輔助之角色，幫助學生利用圖形性質思考判斷並促進其對包含關係的理解。因此，圖卡分類對於包含關係的學習能夠產生效果的關鍵因素，應是讓學生的注意力進入圖形的性質，也就是說，看不見圖形的關鍵性質，就不可能學好包含關係。惟有當學生看見關鍵性質，才有機會學習如何正確判斷包含關係。

## 參、研究方法

本研究採前實驗設計法 (pre-experimental design)，以單組前後測量設計 (one-group pretest-posttest design)，參與者為新竹市立某國中八年級學生，教學者為本文第一作者，研究主要探討以分類為本的教學活動是否能提昇學生判斷四邊形包含關係的成效。

### 一、研究設計

本研究是以分類為本的教學活動作為教學介入，其理念乃參考陳創義 (2006) 與林柏嘉 (2009) 的分類教學實驗，結合命名活動，幫助學生澄清包含關係。本研究也採單組前後測量設計，對學生學習成效進行分析，如表 1 所示。

表 1

單組前後測量設計表

前測	教學介入 (以分類為本的教學活動)	後測
O1	X	O2

註：O1 表示學生在教學介入前的「四邊形包含關係評量表」的表現；X 表示教學介入；O2 表示學生在教學介入後的「四邊形包含關係評量表」的表現。

### 二、研究設計

研究對象為研究者任教的三個八年級班級，人數共八十位，而教學介入的節數共五堂課。由於實驗進行期間前後橫跨約四週左右，又適逢畢業典禮以及學校其他活動之因素，其中有二十位未能全程參與，故有效樣本人數僅存六十人可進行後續分析。此外，教學現場都是研究者全程進行教學，原則上教學流程的掌控會依據教案盡力維持相同步調，但班級間與班級內仍有相當程度之差異，所以教師提問的問題會隨著當時的情況臨

機應變而有所不同，惟可確定的是分類活動之流程是完全相同。

### 三、研究工具之發展

研究者為了解參與者對各種四邊形的想法，先將前測問卷設計成六個試題：請學生分別畫出一個正方形/長方形/菱形/平行四邊形/梯形/箏形，並說說你是怎麼知道所畫的是正方形/長方形/菱形/平行四邊形/梯形/箏形。接著，研究者以自編之「四邊形包含關係評量表」對參與者進行施測，以了解參與者對四邊形包含關係的判斷表現。前、後測工具的設計是根據教育部（2008）公佈的能力指標 S-4-03「能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。」以及八年級分年細目 8-s-18「能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。」例如：正方形和矩形的包含關係、矩形和平行四邊形的包含關係、菱形和平行四邊形的包含關係、菱形和箏形的包含關係。本研究也將正方形和平行四邊形的包含關係、正方形和菱形的包含關係納入前測試題。雖然梯形與平行四邊形彼此互斥，沒有包含關係，但本研究希望也能從前、後測看出學生是否能澄清兩者的關係為互斥，所以將梯形與平行四邊形的關係一併納入評量試題。

考量到包含關係涉及正命題和逆命題這雙重概念的理解，因此問卷試題設計每種包含關係都有兩小題是非題用來檢測學生是否真的理解包含關係。例如正方形和矩形的包含關係試題包含（1）正方形是長方形的一種，以及（2）長方形是正方形的一種。這份評量工具包含教學介入前的前測（O1），以及教學介入後的後測（O2），前、後測的問卷是完全相同，重複施測，本研究以此兩者施測結果的進步幅度作為以分類為本的教學介入之成效。

### 四、教學活動設計（以分類為本的教學活動）

#### （一）分類圖卡

考量到分類活動中需要經驗許多的非典型例，因此研究者針對正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形與箏形等不同形狀的四邊形，設計成以下二十八種圖卡，其中包含典型例與非典型例，每張圖卡均經過護貝再貼上磁鐵，如圖 3：

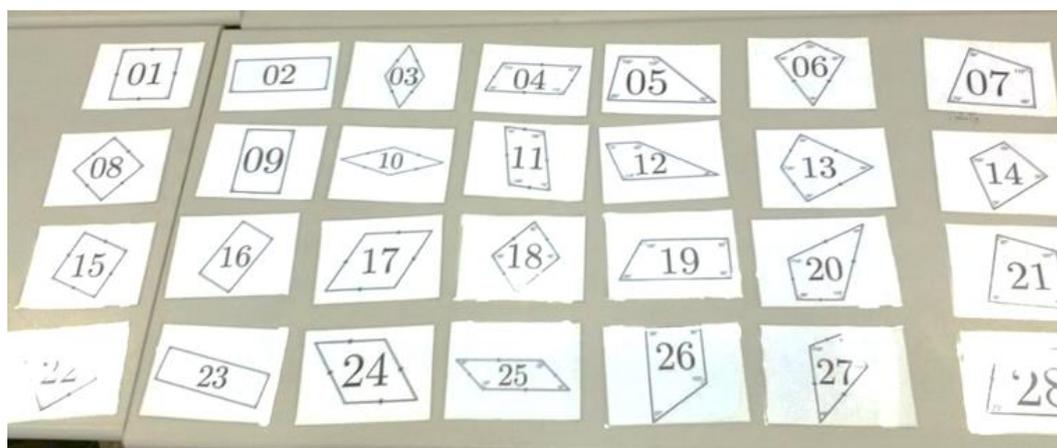


圖 3 本教學實驗所用的四邊形分類圖卡

### (二) 分類活動與準則

以分類活動為本的教學活動共五個（如表 2），每個教學活動流程大致相同，以活動二為例，首先是教師發給每位同學一人一張圖卡，提出：「請同學觀察圖卡上的四邊形有沒有四個直角？」的問題。教師將黑板分成兩個區域，一個區域是有四個直角的四邊形，另一個區域是沒有四個直角的四邊形。請學生將手上的圖卡完成分類，將圖卡按個人的判斷貼在黑板上的某一區域，最後請同學觀察每一張圖卡的分類是否正確無誤，如圖 4。



圖 4 活動二的分類結果

表 2

各分類活動的幾何性質準則與命名一覽表

活動 編序	準則數	各準則的關鍵幾何性質	命名
一	單準則	按四邊形對邊平行的組數分類： 1、有兩組對邊平行的四邊形。 2、只有一組對邊平行的四邊形。 3、沒有任何一組對邊平行的四邊形。	梯形與平行四邊形的命名
二	單準則	按四邊形的四個內角是否皆為直角分類： 1、四個內角皆為直角的四邊形。 2、沒有四個直角為內角的四邊形。	長方形的命名
三	單準則	按四邊形四個邊長是否皆相等分類： 1、四個邊長皆相等的四邊形。 2、沒有四個等長的邊的四邊形。	菱形的命名與菱形和平行四邊形的包含關係
四	單準則	按四邊形邊長是否相等分類： 1、恰有三個邊相等的四邊形 2、有兩組鄰邊分別相等的四邊形。 3、有兩組對邊分別相等的四邊形。 4、恰有兩邊相等，另兩邊不相等。 5、四個邊都不相等的四邊形。	箏形的命名
五	雙準則	按「四邊形四邊長是否皆相等」與「四邊形內角是否皆為直角」雙準則分成 1、四邊等長且四角都是直角的四邊形； 2、四邊等長且沒有四個直角的四邊形； 3、四內角皆為直角且沒有四等邊的四邊形； 4、沒有四等邊且沒有四個直角為內角的四邊形。	正方形的命名

分類活動結束後，教師藉由提問引導學生進行圖形命名，提問的問題可以是「你們覺得有四個直角的四邊形可以叫作什麼？」當學生能夠對圖形命名，釐清圖形的概念定義後，教師再次藉由提問，讓學生利用定義思考圖形之間的包含關係，提問的問題可以

是「根據這個定義，長方形的長與寬有沒有規定要不一樣長？」、「正方形算不算長方形的一種呢？為什麼？」、「長方形算不算正方形的一種呢？為什麼？」，最終再引導學生正確地判斷四邊形的包含關係。

## 肆、研究結果與討論

### 一、學生在四邊形概念的原始表現與迷思概念分析

#### (一) 學生在四邊形包含概念的原始表現

##### 1. 六大類包含關係的前測表現

六大類包含關係的前測表現皆不高，以正方形與長方形包含關係的答對率最高，為 48.3%，其次是正方形與平行四邊形的包含關係，為 45.0%。再依序是「菱形與平行四邊形」、「正方形與菱形」、「長方形與平行四邊形」、「菱形與箏形」。可見各大類包含關係的難易度是有差別的，其中「菱形與箏形」的包含關係的難度最高，如表 3：

表 3

六大類包含關係前測答對率一覽表 (N=60)

包含關係	是非題試題內容	各小題 答對率	兩小題皆正確 之答對率
正方形 與長方形	(1)正方形是長方形的一種。	53.3%	48.3%
	(2)長方形是正方形的一種。	83.3%	
正方形 與菱形	(1)正方形是菱形的一種。	75.0%	36.7%
	(2)菱形是正方形的一種。	46.7%	
菱形 與平行四邊形	(1)菱形是平行四邊形的一種。	55.0%	38.3%
	(2)平行四邊形是菱形的一種。	71.7%	
正方形 與平行四邊形	(1)正方形是平行四邊形的一種。	55.0%	45.0%
	(2)平行四邊形是正方形的一種。	81.7%	
長方形 與平行四邊形	(1)長方形是平行四邊形的一種。	60.0%	36.7%
	(2)平行四邊形是長方形的一種。	60.0%	

表 3 (續)

菱形	(1)菱形是箏形的一種。	71.7%	33.3%
與箏形	(2)箏形是菱形的一種。	48.3%	

## 2. 梯形與平行四邊形互斥關係的前測表現

梯形與平行四邊形互斥關係的前測表現也不高，答對率僅 33.3%，如表 4：

表 4

梯形與平行四邊形互斥關係前測答對率一覽表 (N=60)

互斥關係	是非題試題內容	各小題 答對率	兩小題皆正確 之答對率
梯形 與平行四邊形	(1)梯形是平行四邊形的一種。	58.3%	33.3%
	(2)平行四邊形是梯形的一種。	56.7%	

## (二) 學生在四邊形概念的迷思概念分析

研究者將參與者作答的部分內容節錄如下：

### 1. 正方形的描述

部分學生對正方形只強調邊長屬性，其描述為「四個邊的長度都相等」的四邊形(如圖 5)，鮮少去注意角度的屬性，例如內角為直角。由此也發現，學生習慣注意圖形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。

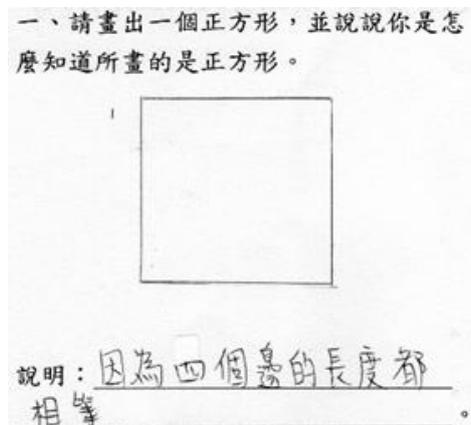


圖 5 學生對正方形描述

## 2. 長方形的描述

部分學生受到語意的影響，認為長方形必須是「長長的四邊形」，也就是長方形的鄰邊必須不等長（如圖 6）。

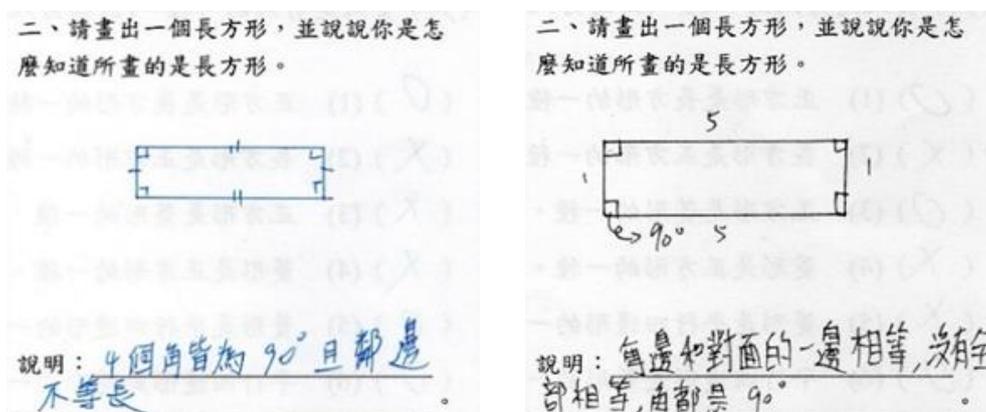


圖 6 學生對長方形的構圖與描述

## 3. 菱形的描述

部分學生受到典型心像的影響，認為菱形是斜擺的正方形，不接受內角都不是直角且四邊等長的四邊形為菱形。對菱形描述為「它和正方形一樣，四邊等長」，如圖 7；然而，也有學生對菱形的描述為「角度都不等於  $90^\circ$ 」，可能存在「正方形不是菱形」這種互斥的思維，亦即菱形的「低度外延」現象，如圖 8。

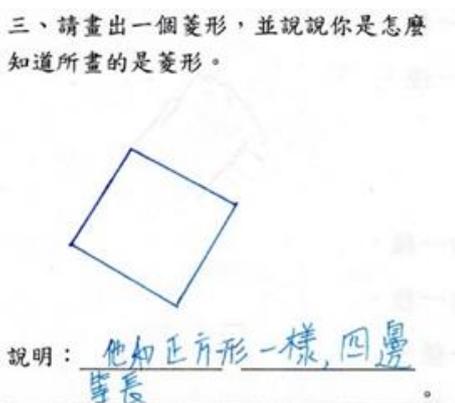


圖 7 學生對菱形的構圖與描述

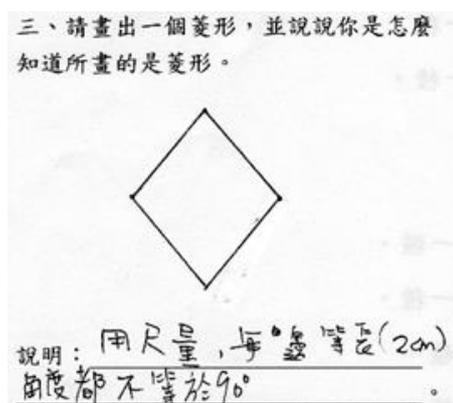


圖 8 菱形的低度外延現象

## 4. 梯形的描述

有些學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難，把梯形描述為「有一組對邊平行的四邊形」，解讀成「至少有一組對邊平行」的四邊形，導致有「平行四邊形也

是梯形」的迷思概念。另外，少數學生認為梯形是形狀長得像「梯子」的圖形如圖 9，惟學生所畫的梯形並不是一個「四邊形」。茲舉例如下：

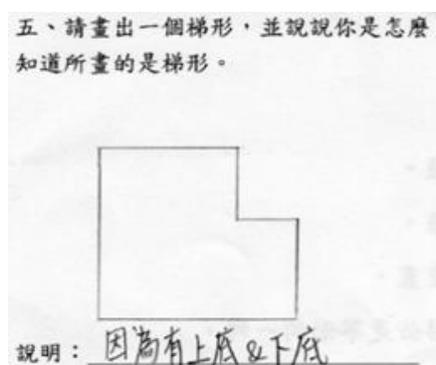


圖 9 學生對梯形的構圖與描述

### 5. 平行四邊形的描述

部分學生受到平行四邊形典型心像的影響，認為平行四邊形內角不可等於  $90^\circ$ ，不接受正方形或長方形為平行四邊形的一種，如圖 10。另外，有些學生對平行四邊形的描述為「兩雙對邊平行且鄰邊不等長」，可能存在「菱形不是平行四邊形」互斥的思維，如圖 11。

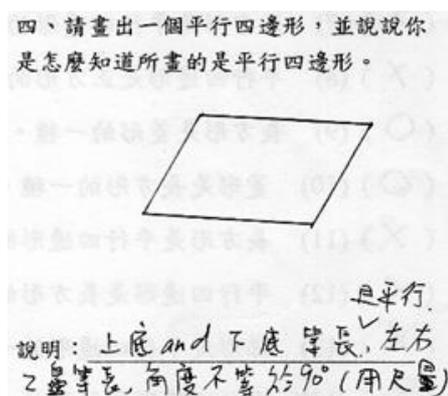


圖 10 學生對平行四邊形的構圖與描述

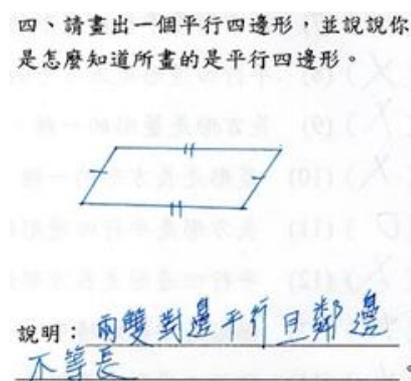


圖 11 平行四邊形的低度外延現象

### 6. 箏形的描述

學生的典型 (prototype) 心像容易導致無法接納非典型圖形，例如一些學生受到箏形典型心像的影響，認為箏形一組鄰邊和另一組鄰邊不等長 (如圖 12)，可能將「四邊等長」的四邊形排除在外，導致認為菱形不屬於箏形。此外，部分學生將箏形描述為「四邊相等」(如圖 13)，可能導致有「箏形是菱形」的錯誤認知。

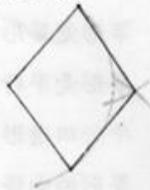
六、請畫出一個箏形，並說說你是怎麼知道所畫的是箏形。



說明：一鄰邊等長，另一鄰邊不等長。

圖 12 對箏形的典型心像

六、請畫出一個箏形，並說說你是怎麼知道所畫的是箏形。



說明：四邊相等

六、請畫出一個箏形，並說說你是怎麼知道所畫的是箏形。



說明：四邊相等對角相等

圖 13 學生對箏形的構圖與描述

## 二、以分類為本的教學活動對學生學習四邊形包含關係的表現與成效

六大類包含關係的後測表現，難易度也是有差別的，以「正方形與長方形」、「正方形與菱形」、「正方形與平行四邊形」的表現並列最優，答對率均為 81.7%，其次分別是「長方形與平行四邊形」、「菱形與平行四邊形」、「菱形與箏形」。可見經過教學介入後，「菱形與箏形」的包含關係難度仍是最高，「菱形與平行四邊形」的難度次之。

### (一) 正方形與菱形的包含關係之表現與成效為最好

從表 5 可以發現，學生經過教學介入後的表現與成效最好者，是正方形與菱形的包含關係，可能是因為其包含關係對國中生較為容易，這與陳明新（2015）利用動態環境下探討四邊形包含關係之認知情形的研究結果符合，其發現國小學童在認知上容易接受正方形是菱形的一種。

表 5

六大類包含關係評量前、後測答對率(N=60)的比較表

包含關係	是非題試題內容	各小題答對率		兩小題皆正確之答對率		
		前測	後測	前測	後測	進步
正方形 與長方形	(1)正方形是長方形的一種。	53.3%	85.0%	48.3%	81.7%	33.3%
	(2)長方形是正方形的一種。	83.3%	88.3%			
正方形 與菱形	(1)正方形是菱形的一種。	75.0%	96.7%	36.7%	81.7%	45.0%
	(2)菱形是正方形的一種。	46.7%	83.3%			
菱形 與平行四邊形	(1)菱形是平行四邊形的一種。	55.0%	83.3%	38.3%	76.7%	38.3%
	(2)平行四邊形是菱形的一種。	71.7%	81.7%			
正方形 與平行四邊形	(1)正方形是平行四邊形的一種。	55.0%	90.0%	45.0%	81.7%	36.7%
	(2)平行四邊形是正方形的一種。	81.7%	90.0%			
長方形 與平行四邊形	(1)長方形是平行四邊形的一種。	60.0%	90.0%	36.7%	80.0%	43.3%
	(2)平行四邊形是長方形的一種。	60.0%	86.7%			
菱形 與箏形	(1)菱形是箏形的一種。	71.7%	71.7%	33.3%	63.3%	30.0%
	(2)箏形是菱形的一種。	48.3%	78.3%			
平均		63.5%	85.4%	39.7%	77.5%	37.8%

### (二) 菱形與箏形的包含關係之表現與成效為最差

另外，本研究也發現菱形與箏形的包含關係的後測表現最差，只有 63.3%，成效也最差，僅進步 30.0%，這可能是由於箏形之定義對國中生而言是較難理解的，且學生對箏形的典型心像似乎難以打破，認為箏形是兩組鄰邊分別等長的四邊形，但限制「四邊必須不等長」，導致其認為菱形不屬於箏形。為何學生經過分類活動後，仍難以打破箏形的典型心像，或難以理解箏形的定義，這值得後續的研究探討。

### (三) 梯形與平行四邊形互斥關係的表現與成效

從表 6 可發現，學生經過圖卡分類後能理解梯形與平行四邊形互斥關係，從前測的 33.3% 進步到後測的 60.0%，這些學生能夠看見並非任意兩個四邊形都有包含關係，或許這也是圖卡分類教學的成效之一。

表 6

梯形與平行四邊形互斥關係評量前、後測答對率(N=60)的比較表

互斥關係	是非題試題內容	各小題答對率		兩小題皆正確之答對率		
		前測	後測	前測	後測	進步
梯形 與平行四邊形	(1)梯形是平行四邊形的一種。	58.3%	80.0%	33.3%	60.0%	26.7%
	(2)平行四邊形是梯形的一種。	56.7%	78.3%			

## 伍、結論與建議

### 一、結論

#### (一) 中學生對四邊形包含關係的迷思概念方面

本研究結果發現，中學生對四邊形包含關係的迷思概念有以下三種：第一，學生習慣注意矩形和正方形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。第二、學生的典型(prototype)心像容易導致無法接納非典型圖形。第三、學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難。

#### (二) 以分類為本的教學活動對國中生學習四邊形包含關係的表現與成效方面

##### 1. 成效方面

經過以分類為本的教學活動後，研究發現學生在長方形和正方形的概念與包含關係有一些改善，成效有明顯的進步，各大類包含關係兩小題皆正確的平均答對率由前測 39.7% 提升到後測 77.5%，且每大類包含關係後測的答對率皆不低於前測的答對率，可知學生的四邊形包含關係理解經過以分類為本的教學活動後，大都能有效地改善。

##### 2. 表現方面

正方形與菱形的包含關係之後測表現與成效為最好，菱形與箏形的包含關係之表現與成效為最差，梯形與平行四邊形互斥關係的後測表現，則達 60.0%。

##### 3. 包含關係的難易度比較

無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別，但教學介入後的難易度沒有太大改變。後測結果的難易度以「正方形與長方形」、「正方形與菱形」、「正方形與平

行四邊形」的表現並列最優，其次分別是「長方形與平行四邊形」、「菱形與平行四邊形」、「菱形與箏形」，菱形與箏形包含關係的難度維持最高。

## 二、建議

(一) 研究結果發現，菱形與箏形包含關係的難度維持最高，原因可能是箏形之定義對國中生而言是較難理解的，且學生對箏形的典型心像似乎難以打破，導致其認為菱形不屬於箏形。為何學生經過分類活動後，仍難以打破箏形的典型心像，或難以理解箏形的定義，這值得後續的研究探討。

(二) 本實驗設計缺乏控制組做比較，也無法確定在前、後測之間是否有其他事件介入而影響實驗結果，或許有其他影響因素混淆實驗結果，因此不宜將研究結果過度解讀。

(三) 目前的教科書設計中，大多直接為幾何圖形下定義，在分類的準則與概念沒有太多的著墨，建議教師可參考分類活動與引導提問幫助學生釐清四邊形的概念。

(四) 研究結果也發現，八年級國中生對四邊形包含關係的理解在前測之表現不高，且根據本研究結論，我們得知無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別。因此，包含關係的教學可能不宜將四邊形之間所有的包含關係以一個包含圖表直接呈現給學生，建議教師在四邊形各包含關係的教學宜分開進行。

(五) 從本研究的前、後測結果以及進步情形來看，以分類為本的教學實驗可幫助大部分八年級國中生理解四邊形的包含關係，主要原因是因為四邊形包含關係的認知關鍵在於學生能否看見圖形的內在關鍵性質，因此建議教師在本課題的教學，宜著重於幫助學生看見各四邊形的性質。

(六) 由本研究結果得知，正方形與菱形的包含關係之後測表現為最好，進步幅度也最大，因此本研究的分類教學適合八年級國中生學習「正方形與菱形的包含關係」。又依據各包含關係表現的進步幅度由大到小排列，本研究建議四邊形包含關係的認知發展路徑可為「正方形與菱形」→「矩形與平行四邊形」→「菱形與平行四邊形」→「正方形與矩形」→「菱形與箏形」→「梯形與平行四邊形」。

## 參考文獻

何敏華 (2005)。創意教學活動「四邊形的獵捕」—包含關係的推理。科學教育月刊，282，41-55。

- 林柏嘉 (2009)。兩種改善四邊形辨識迷思的教學策略研究—以國中七年級學生為對象 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 教育部 (2008)。97 年國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。
- 陳明新 (2015)。在動態幾何環境下探討國小四年級個案學童對四邊形包含關係之認知情形 (未出版之碩士論文)。國立新竹教育大學，新竹市。
- 陳創義 (2006)。青少年幾何形狀概念的「學習與教學」之研究期中進度報告。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫期中進度報告 (NSC94-2521-S-003-010)，未出版。
- 郭俊麟 (2011)。國中八年級學生辨識數學敘述及其逆敘述現象之探討 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 楊忠璇 (2013)。幾何知識與推理能力對高年級學童幾何圖形概念改變的影響 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 黃志祥 (2003)。國小六年級學童四邊形幾何概念的包含關係—從概念心像與概念定義的觀點探討 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學，臺北市。
- 謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗 (2006)。幾何。載於周筱亭、黃敏晃 (主編)，*國小數學教材分析* (頁 28-33)。新北市：國立教育研究院。
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: John Wiley.
- Currie, P. and Pegg, J. (1998). Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals. In C. Kanos, M. Goos and E. Warren (Eds). *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia Incorporated*. Vol. 1. (pp. 177-184).
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, 14(1), 11-18.
- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211. doi: 10.1080/0950069980201003

- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20. doi: 10.1080/14794800008520167.
- Gelman, R., & Baillargeon, R. (1983). Review of some Piagetian concepts. In P. H. Mussen (Ed.), *Handbook of Child Psychology: Formerly Carmichael's Manual of Child Psychology: Socialization, Personality, and Social Development*. Wiley.
- Heinze, A., & von Ossietzky, C. (2002). Because a square is not a rectangle-Students' knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. *Proceedings of the 26th PME Conference*, 3, 81-88.
- Leung, I. C. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of Smart Board. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(6), 1007-1021. doi: 10.1007/s11858-008-0159-z.
- Lin, F. L., & Yang, K. L. (2002). Defining a rectangle under a social and practical setting by two seventh graders. *ZDM*, 34(1), 17-28. doi: 10.1007/BF02655689
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 179-196. doi: 10.1023/A:1004175020394
- Nakahara, T. (1995) Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 27-34.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980) Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 177-184.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12 (3-4), 31-47.

## 《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過  
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
  - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
  - 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 伍、文稿請以中文撰寫，以8,000字為原則（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：[tjmtedit@gmail.com](mailto:tjmtedit@gmail.com)

**《臺灣數學教師》投稿基本資料表**

<b>篇名</b>	(中文)		
	(英文)		
<b>總字數</b>	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
<b>關鍵詞</b> (最多五個)	(中文)		
	(英文)		
<b>頁首短題</b> (running head)	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
<b>通訊作者資料</b>	<b>姓名</b>	(中文)	(英文)
	<b>職稱</b>		
	<b>服務單位</b> (或就讀校系)	(中文)	
		(英文)	
	<b>E-mail</b>		
	<b>通訊地址</b>		
	<b>電話</b>	辦公室：( ) 分機	
行動電話：			
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)			
<b>共同著作人</b>	<b>姓名</b>	<b>服務單位</b> (或就讀校系)	<b>職稱</b>
<b>第一作者</b> ( <input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>第二作者</b> ( <input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>第三作者</b> ( <input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>作者註</b> (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲科技部補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教師》。 填表人：_____ 填表日期：_____年_____月_____日			

## 《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
Taiwan Association for Mathematics Education

**Editorial Board**

**Chief Editor** | Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Vice Chief Editor** | Pi-Jen Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Hsinchu University of Education)

**Editorial Panel** | Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei)

Su-Wei Lin ( Department of Education ,  
National University of Tainan)

Wei-Min Hsu (Department of Science Communication,  
National Pingtung University)

Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education,  
National Changhua University of Education)

Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli)

Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)

Hui-I Liao ( Tai-jen Junior High School, Kaohsiung City)

Shiang-Tung Liu (Graduate school of Math and Science Education ,  
National Chiayi University)

Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research)

Jing Chung (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
*"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"*

**TEL** | 886-2-7734-6576

**FAX** | 886-2-2933-2342

**E-mail** | tjmteedit@gmail.com

**Website** | <http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74>

---

1 用繪本學數學—以中年級為例

/ 黃琬懿、鍾靜

Using Picture Book to Teaching middle grand mathematics

/ Shu-Yi Huang、Jing Chung

17 「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現

/ 黃德華

Exploring the Effect of Improving Teachers' Subject Knowledge and Subject Content Knowledge via a Learning Study : New Discovery in Determining Congruent Triangles' Conditions

/ Tak-Wah Wong

50 幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之研究

/ 黃國綸、許慧玉

A study on classification of geometric diagram examples to 8th grade students' learning of inclusion relations in quadrilaterals

/ Guo-Lun Huang、Hui-Yu Hsu

