

黃國綸、許慧玉 (2016)。
幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之研究。
臺灣數學教師, 37 (2), 50-71
doi: 10.6610/TJMT.20160930.01

幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形 包含關係之研究

黃國綸¹ 許慧玉²

¹ 新竹市立建華國民中學數學教師

² 國立新竹教育大學數理教育研究所

本研究旨在探討分類活動對提昇國中生判斷四邊形包含關係的成效。幾何的包含關係是由幾何性質之間的上下關聯性所形成的集合概念，分類活動提供學生在給定的幾何圖形分類時，觀察圖形隱含的性質，且在命名時掌握圖形的定義，逐漸理解及判斷包含關係。本研究以前實驗設計法 (pre-experimental design) 之架構，採單組前後測量設計 (one-group pretest-posttest design)，研究結果發現 (1) 八年級學生在教學前對四邊形包含關係的迷思概念有以下三種：第一、學生習慣注意矩形和正方形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。第二、學生的典型 (prototype) 心像容易導致無法接納非典型圖形。第三、學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難。(2) 學生經過圖卡分類教學介入後在正方形與菱形的包含關係之後測表現與成效為最好，81.7%；在菱形與箏形的包含關係之後測表現最差，只有 63.3%，成效也最差，僅進步 30.0%；梯形與平行四邊形互斥關係的後測表現，達 60.0%。(3) 無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別，但教學介入後包含關係的難易度沒有太大改變。根據研究結果，我們最後提出四邊形包含關係教學設計的相關建議，可供教師參考。

關鍵詞：分類；四邊形；包含關係；幾何

壹、緒論

一、研究動機

分類是人類基本的認知功能之一。西方最早的分類概念，源自亞里斯多德的範疇主張，範疇是一種概念分類的工具，而概念的分類是一種基本且普遍的認知形式，影響人類的學習，如國外學者 Bruner、Goodnow 與 Austin (1956) 認為透過分類的活動可以幫助學生進行概念的學習。人們用某種方式對事物加以分類之前，必須知道這些事物所具有的屬性 (Bruner 等, 1956)。例如，一般轎車都有四個輪子，所以五個輪子的車子不能歸入「轎車」這個類別。因此，學生對概念學習的重點在於能否找出概念的關鍵屬性。此外，分類也根植於人類的生活經驗當中，例如在日常生活中，我們常對周圍的事物採取階層的分類，例如將「垃圾」區分為「資源垃圾」、「廚餘」及「一般垃圾」等三個類別，其中「資源垃圾」又可分成「紙類」、「鐵類」、「鋁類」、「玻璃類」、「塑膠類」等不同的「子類別」。

Ausubel (1968) 將概念視為一個有層次的結構，居於結構上層稱為要領概念 (superordinate concept)，意即個人對事物整體性概括的認識，而居於結構下層者稱為附屬概念 (subordinate concept)，意即個人對事物的特徵較細微特殊的記憶。「包含關係」正是架構在這樣有層次結構的分類上，其涉及相關的上層與下層概念之理解，其中下層概念是包含於上層之內，下層概念除了與上層概念有共同屬性之外，又有其他非共同屬性 (De Villiers, 1994)。因此，看見事物的屬性並依照其屬性將其歸類固然重要，但分類後根據該類別進行推理以形成概念的結構更是不可忽視。

舉例來說，平行四邊形與菱形皆為兩雙對邊分別平行的四邊形，但菱形又有四邊等長的性質，因此菱形可視為四邊等長的平行四邊形，亦即平行四邊形的下屬概念為菱形，也就是說菱形是平行四邊形的一種「特例」；用集合的語言來說就是平行四邊形包含菱形，而菱形包含於平行四邊形。惟在國中階段的「平行四邊形」單元的教學目標中，主要是希望學生能透過分析四邊形的性質，藉由邏輯演繹的方式來理解四邊形的分類概念，從而判斷不同圖形間的「包含關係」。若以判斷菱形和平行四邊形的包含關係為例，首先學生需要能從菱形定義於「四邊等長的四邊形」出發，並理解平行四邊形的判別性質，再根據其定義判斷菱形是兩雙對邊分別相等的四邊形，接著由平行四邊形的判別性質推論菱形也是平行四邊形。我們可以看見其中至少涉及兩個步驟的推理認知，因此該包含

關係的判斷對一些中小學生而言可能略顯複雜。

研究指出學生說明定義的表現優於辨識出符合對應此定義的各種幾何圖形 (Fischbein & Nachlieli, 1998)。學生並不了解定義規範了圖形的建構以及其可能變化的範疇。大多數的概念雖透過定義習得，但學生自己對該概念所反映的案例可能仍與數學定義不一致，甚至可能與他們自己所提出來的定義不一致 (Wilson, 1990)。學生對於幾何定義概念與圖形案例之間產生的不一致，亟需教學上的設計與處理。

就幾何四邊形來說，倘若學生未能理解四邊形的定義與相關性質，以及此定義與性質對圖形變化的影響，便無法理解不同四邊形之間的包含關係。近幾年來，國內有許多關於中小學生學習四邊形概念的現況研究，再再顯示中小學生在學習四邊形的包含關係出現諸多困難或迷思概念。例如，陳明新 (2015) 的研究指出國小四年級的多數學童存在長方形鄰邊不相等的迷思概念，無法認為正方形是長方形的一種。楊忠璇 (2013) 的研究發現五年級學童在包含關係概念調整時有一些不正確的思考方式，譬如否認正方形是長方形的一種。林柏嘉 (2009) 整理國中學生在四邊形辨識迷思的類型有典型例類型、空間視覺類型、語意類型、以及互斥思維類型。

雖然國內有不少學者對四邊形包含關係作了寶貴的研究，但是在包含關係的認知發展路徑、教學序列、或各包含關係難易度的比較這些部分卻鮮少有進一步的探討。反觀國外已有研究發現一些常見之幾何形狀認知發展的路徑，例如 Vinner 與 Hershkowitz (1980) 對鈍角和直角、直角三角形、與三角形的高，研究出共同的認知發展路徑。Nakahara (1995) 在日本的小學生關於基本四邊形之研究，也發現一種常見的認知發展路徑：平行四邊形→菱形→梯形。Heinze 與 von Ossietzky (2002) 研究發現八年級學生在四邊形分類的表現上出現缺陷，在數學語言與思考理解有所困難。甚至在包含關係難易度的比較方面，Fujita 與 Jones (2007) 也對此作了初步的探討。

Fujita 與 Jones (2007) 認為理解四邊形的包含關係，其中可能存在不同的困難等級順序，也就是有些包含關係比較容易，有些比較困難。例如理解菱形和平行四邊形的包含關係可能比理解正方形和長方形的包含關係還容易，菱形被辨識為平行四邊形比正方形被辨識為長方形還容易，因為菱形「看起來像」平行四邊形，正方形「看起來不像」長方形。但是正方形和長方形的包含關係對學生之所以困難，未必僅是看起來像不像的問題，或許是因為受到典型心像的因素，學生可能認為正方形根本是與長方形互斥。

相較之下，從四邊形包含關係的認知發展路徑、教學策略、以及各包含關係難易度之間的比較來看，目前國內對這方面的研究似乎有所不足，這些方面皆值得更深入探究。

因此，本文擬先從文獻開始，回顧中、小學生在四邊形包含關係上的迷思概念，並從文獻挖掘有效的教學策略，希望能從中分析其對包含關係認知歷程，再透過教學實驗的結果，探討各包含關係難易度的比較，以提供日後四邊形包含關係教學設計之參考。

綜上所述，本研究擬將探究下列兩個研究問題

- (一) 中學生對四邊形包含關係的迷思概念為何？
- (二) 本文的教學實驗對國中生學習四邊形包含關係的表現與成效為何？

貳、文獻探討

包含關係是指集合和子集合間存在一般化與特例的關係，這種關係涉及將某概念從一般到特殊分成不同層次組別的階層分類(hierarchical classification)，De Villiers(1994)曾使用「描述性(descriptive)」分類和「建構性(constructive)」分類來描述理解包含關係的不同方法，其中「建構性」分類係指一般化和特殊化的數學歷程被應用在形成新概念，而「描述性」分類係指當概念已經徹底被檢查後，概念的分類才會被理解。因此「描述性」分類涉及從已存在的一組命題選擇屬性好為建立包含關係，而在「建構性」的分類方法中，當一個概念的某些性質將被刪除而導致更一般的概念形成時，數學歷程中的一般化才會發生，例如正方形是四角相等且四邊等長的四邊形，假若把「四角相等」的屬性刪除，便形成「四邊等長」的四邊形概念，也就是菱形。另外，數學歷程中的特殊化，意指增加一些新的屬性或取代一般概念中原有的屬性，進而形成新概念的的特殊性，例如，在平行四邊形中限制一內角為直角時，形成平行四邊形的一種特例—矩形。

一般而言，包含關係的認知會隨著年齡而發展，如 Gelmann 與 Baillargeon (1983)認為學童若能找到一個恰當的分類架構，就能根據此標準做有系統的歸類，將基本的分類邏輯應用到屬性組成更複雜的事務上。文獻上已有許多學者對學生學習四邊形包含關係提出學生學習困難及學生容易存在的迷思概念，內容詳述如下。

一、四邊形包含關係的迷思概念

(一) 正方形與長方形之間的包含關係

矩形(長方形)是四個內角皆是直角的四邊形，但是不少學生受到語意的影響將正方形排除在矩形之外。陳明新(2015)應用動態幾何軟體以瞭解國小四年學童拖曳圖形對四邊形包含關係認知情形，研究顯示國小四年級多數學童因長方形鄰邊不相等的迷思

概念，無法認知正方形是長方形的一種。Lin 與 Yang (2002) 為探討定義，而作一個從非形式到形式論證的數學活動，對兩個七年級學生在非正式論證的形式下重新建構矩形的定義，研究發現參與者在心像的刻畫和定義的歷程中，由於英文的 *rectangle*，是被翻譯為「長方形」或「矩形」，在兩位參與者中，有一位對矩形的心像為一邊長需要比其鄰邊還要長。何敏華 (2005) 的教學活動歷程也發現七年級學生受長方形字面意義的影響，認為長方形長寬應是一邊長而另一邊短，導致學生有「正方形不是長方形」的迷思概念。總結來說，正方形與長方形之間的包含關係學習困難大致包含了語意的影響、長方形鄰邊不相等的典型心像。

(二) 正方形與菱形之間的包含關係

黃志祥 (2003) 發現國小六年級學生在四邊形幾何圖形的概念心像上普遍有包含性不足的情況，也就是有些圖例被錯誤地排除，例如學童以為斜擺的正方形是菱形，但不是正方形，此一現象可能是受正方形的典型心像所影響，導致無法理解正方形與菱形的包含關係。Leung (2008) 利用電子白板「動畫點播 (*animation-on-demand*)」的效果，在電子白板上同時呈現五個不同角度的菱形，其中也包含直角的菱形，研究結果顯示九歲的學童在經過三次這樣的教導後，可以瞭解菱形的必要屬性是四邊等長並判斷正方形是菱形的一種。

(三) 菱形與平行四邊形之間的包含關係

何敏華 (2005) 的教學活動歷程發現七年級學生對平行四邊形的認知會受一般繪圖時常用的大小、方位之影響，以致於產生長得瘦瘦長長的菱形不是平行四邊形的錯誤迷思。由此可知，學生可能受到菱形典型例的因素而將菱形排除在平行四邊形之外。

(四) 長方形與平行四邊形之間的包含關係

Monaghan (2000) 也發現學生心中普遍存在平行四邊形的典型心像，所以容易認為長方形不是一個平行四邊形。另外，學生也可能將矩形概念過度外延至平行四邊形，亦即將平行四邊形納入矩形。Wilson (1990) 使用定義與圖例的研究中，大部分學生在描述矩形定義時，145 位八年級學生在定義中不強調矩形的直角屬性，有 61 位選擇沒有直角的平行四邊形作為矩形。由上所述，長方形與平行四邊形之間的包含關係學習困難也受到平行四邊形典型心像所影響。

(五) 菱形與箏形之間的包含關係

文獻已指出，學生將菱形概念過度外延至箏形，亦即將箏形納入菱形。郭俊麟(2011)探討八年級學生對數學敘述及其逆敘述的辨識現象，在有效樣本 127 人中，對複句句法有約六成的學生認為「因為菱形的兩雙鄰邊等長，所以菱形是箏形」的敘述及其逆敘述意思相同，由此可知部分學生可能因為菱形的兩雙鄰邊等長，所以誤認菱形是箏形。另外，學生可能受到箏形的典型心像而將菱形或旋轉過的箏形排除在箏形之外。例如 Currie 與 Pegg (1998) 的研究指出學習者在定義和分類有困難，這種困難是因學生不能理解類包含的關係，如菱形是箏形的一種。由於箏形的定義可能有不同的解讀，謝堅、朱建正、魯炳寰與廖淑麗 (2006, 頁 30) 認為箏形定義為相鄰兩邊分別相等的四邊形，這樣的邊長關係在描述上對國小學童相當困難。此外，在圖形的辨識上，只要把箏形轉個方向，學生可能就無法辨識出來。Fischbein 與 Nachlieli (1998) 研究九至十一年級學生，共兩百一十八位受試者，要求他們指出下圖中對應於定義的圖形。研究結果發現圖 a 被辨識為一箏形者，只佔受試者總數的 66%。

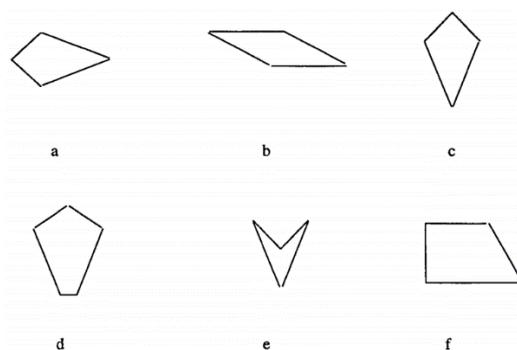


圖 1 箏形的辨識研究。 “Concepts and figures in geometrical reasoning,” by Fischbein, E., & Nachlieli, T, 1998, *International Journal of Science Education*, 20(10), p. 1202

(六) 梯形與平行四邊形的互斥關係

梯形和平行四邊形在定義上是彼此互斥的，但是常有學生將平行四邊形概念過度外延至梯形，亦即將梯形納入平行四邊形。謝堅等人 (2006, 頁 31) 指出我們在溝通梯形的定義時，常常省略「恰」字，而將梯形的定義說成「有一雙對邊平行的四邊形」，這種「有一雙對邊平行的四邊形」的說法很容易產生文字意義上的混淆，例如：解讀成「至少有一雙對邊平行」時，平行四邊形也是梯形，但若解讀成「恰有一雙對邊平行」時，平行四邊形則不是梯形。

由上所述，文獻探討中列出六種關於四邊形包含關係常見的迷思概念，似乎發現學生判斷錯誤的原因大都在於受到語意或圖形的典型心像所致。然而，如何打破學生對圖形的典型心像，使其看見圖形的關鍵性質，接著又能利用圖形的關鍵性質或定義來判斷四邊形的包含關係呢？本文試以陳創義（2006）的「分類教學」為例，分析其對四邊形包含關係學習有效因素。

二、分類教學概念的設計理念

陳創義(2006)依據荷蘭發展現實數學教育(Realistic Mathematics Education, [RME])的經驗觀點，亦即教學理論是教育研究與教學實作長期互動的產物，基於學生對圖形的辨識的認知，發展一個分類的教學方案來進行教學實驗，來瞭解對學生在與概念瞭解是否有所幫助。陳創義（2006）針對三角形的分類提出強化管理路的分類教學，也就是對於分類的對象之形成與界定以及分類準則的功能意義，做適當的描述及進行，讓學生可以瞭解其理路，以及對各類別作適當的命名或表徵。因此，學生在分類教學下，對於概念分類的範圍界定與其理路的釐清會有幫助，且對分類準則的性質的強調，可以增進概念的理解，進而正確判斷圖形的包含關係。倘若教師能做好分類教學，應可解決學生在圖形辨識上大部分的問題，諸如：語意問題，可透過分類時的命名讓學生區辨生活語言的含意及數學名詞之間的異同；典型例問題的解決，可藉由分類教學歷程中可以經驗許多的非典型例；此外，互斥思維及空間視覺問題的解決，可透過分類範圍的界定以及強調分類準則中圖形所具有的屬性。

陳創義（2006）的分類教學的實驗有三個發現：第一、強化管理路的數學分類概念教學有助於概念的學習。第二、在國中實施強化管理路的數學分類概念教學是可行的。第三、強化管理路的數學分類概念在數學的後續發展是很重要的。此後，林柏嘉（2009）探討改善四邊形辨識迷思的教學策略，所提出的兩種策略之中有一者亦為分類教學策略，研究結果發現兩種策略均幫助學生改善四邊形辨識的迷思，惟分類教學策略有效的原因，在於學生進行分類操作時，注意力由圖形輪廓進入了圖形結構，分類所完成的結果，提供學生命名的脈絡與包含關係的理解。

上述分類教學概念整體而言，包含關係是涉及某概念從一般到特殊分成不同層次的階層分類，其概念的發展是建立在逐步幫助學生排除圖形辨識的認知障礙；而分類教學之所以能夠做到這一點，是因為學生在圖形分類的歷程中，首先會把注意力集中在圖形的性質，再者命名時掌握圖形的定義，至終在判斷包含關係時，藉由將一個概念的某

些性質刪除而導致更一般的概念形成，或藉由增加一些新屬性或取代概念中原有的屬性而形成特殊性，因此分類教學會對學生在四邊形包含關係學習有效。

三、本研究進行之教學實驗的教學模式

本研究參考陳創義（2006）與林柏嘉（2009）的分類教學實驗，利用圖卡分類設計成如下的教學模式，如圖 2：

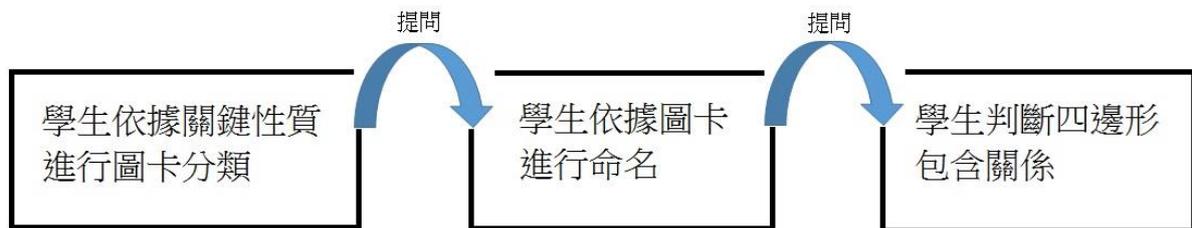


圖 2 研究進行教學活動流程圖

上圖含示，分類活動的主要目的是為了打破學生對各種四邊形的典型心像，使學生不是藉由圖形的外觀來辨識圖形，而是透過分類準則中的關鍵性質來辨認圖形的特徵，並發現某一分類群體中共有的性質或規則。在關鍵性質方面（如表 2），本研究再細分單準則與雙準則兩類。單準則是指分類時僅用到某一幾何性質，諸如活動一到四（如表 2）分別用到四邊形的對邊平行性質、四內角皆為直角、四邊等長以及按相等邊長數目等單準則性質，惟正方形不僅四內角相等，其四邊亦等長，亦即具有兩種幾何性質，由於在正方形的辨識上需要觀察到兩個性質，因此本研究安排活動五依雙準則性質來分類。

此教學模式中「提問」的主要目的是橋接分類與命名兩個教學活動。當圖卡分類活動後，教師藉由「提問」鷹架學生進行圖形命名，教師引導提問的問題例子可以是「你們覺得有四個直角的四邊形可以叫作什麼？」當學生能夠對圖形命名，釐清圖形的概念定義後，教師再經過「提問」，讓學生利用定義思考圖形之間的包含關係，引導的問題可以是「正方形算不算長方形的一種呢？為什麼？」

結合分類活動與命名活動，並輔以引導提問，鷹架學生從幾何定義與性質出發，觀察符合定義的各種圖形案例，並由定義與性質來思考不同圖形之間的關係。而引導提問的主要用意是讓學生在利用幾何性質分類之後，能夠連結分類與命名之間的關聯性，並以此關聯性來思考包含關係。

綜合上述觀點，四邊形包含關係的認知關鍵在於學生能否打破四邊形的典型心像或

語意影響，進而看見圖形的內在關鍵性質。當學生進行圖卡分類時，注意力由圖形輪廓進入了圖形性質，教師的引導提問扮演輔助之角色，幫助學生利用圖形性質思考判斷並促進其對包含關係的理解。因此，圖卡分類對於包含關係的學習能夠產生效果的關鍵因素，應是讓學生的注意力進入圖形的性質，也就是說，看不見圖形的關鍵性質，就不可能學好包含關係。惟有當學生看見關鍵性質，才有機會學習如何正確判斷包含關係。

參、研究方法

本研究採前實驗設計法 (pre-experimental design)，以單組前後測量設計 (one-group pretest-posttest design)，參與者為新竹市立某國中八年級學生，教學者為本文第一作者，研究主要探討以分類為本的教學活動是否能提昇學生判斷四邊形包含關係的成效。

一、研究設計

本研究是以分類為本的教學活動作為教學介入，其理念乃參考陳創義 (2006) 與林柏嘉 (2009) 的分類教學實驗，結合命名活動，幫助學生澄清包含關係。本研究也採單組前後測量設計，對學生學習成效進行分析，如表 1 所示。

表 1

單組前後測量設計表

前測	教學介入 (以分類為本的教學活動)	後測
O1	X	O2

註：O1 表示學生在教學介入前的「四邊形包含關係評量表」的表現；X 表示教學介入；O2 表示學生在教學介入後的「四邊形包含關係評量表」的表現。

二、研究設計

研究對象為研究者任教的三個八年級班級，人數共八十位，而教學介入的節數共五堂課。由於實驗進行期間前後橫跨約四週左右，又適逢畢業典禮以及學校其他活動之因素，其中有二十位未能全程參與，故有效樣本人數僅存六十人可進行後續分析。此外，教學現場都是研究者全程進行教學，原則上教學流程的掌控會依據教案盡力維持相同步調，但班級間與班級內仍有相當程度之差異，所以教師提問的問題會隨著當時的情況臨

機應變而有所不同，惟可確定的是分類活動之流程是完全相同。

三、研究工具之發展

研究者為了解參與者對各種四邊形的想法，先將前測問卷設計成六個試題：請學生分別畫出一個正方形/長方形/菱形/平行四邊形/梯形/箏形，並說說你是怎麼知道所畫的是正方形/長方形/菱形/平行四邊形/梯形/箏形。接著，研究者以自編之「四邊形包含關係評量表」對參與者進行施測，以了解參與者對四邊形包含關係的判斷表現。前、後測工具的設計是根據教育部（2008）公佈的能力指標 S-4-03「能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。」以及八年級分年細目 8-s-18「能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。」例如：正方形和矩形的包含關係、矩形和平行四邊形的包含關係、菱形和平行四邊形的包含關係、菱形和箏形的包含關係。本研究也將正方形和平行四邊形的包含關係、正方形和菱形的包含關係納入前測試題。雖然梯形與平行四邊形彼此互斥，沒有包含關係，但本研究希望也能從前、後測看出學生是否能澄清兩者的關係為互斥，所以將梯形與平行四邊形的關係一併納入評量試題。

考量到包含關係涉及正命題和逆命題這雙重概念的理解，因此問卷試題設計每種包含關係都有兩小題是非題用來檢測學生是否真的理解包含關係。例如正方形和矩形的包含關係試題包含（1）正方形是長方形的一種，以及（2）長方形是正方形的一種。這份評量工具包含教學介入前的前測（O1），以及教學介入後的後測（O2），前、後測的問卷是完全相同，重複施測，本研究以此兩者施測結果的進步幅度作為以分類為本的教學介入之成效。

四、教學活動設計（以分類為本的教學活動）

（一）分類圖卡

考量到分類活動中需要經驗許多的非典型例，因此研究者針對正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形與箏形等不同形狀的四邊形，設計成以下二十八種圖卡，其中包含典型例與非典型例，每張圖卡均經過護貝再貼上磁鐵，如圖 3：

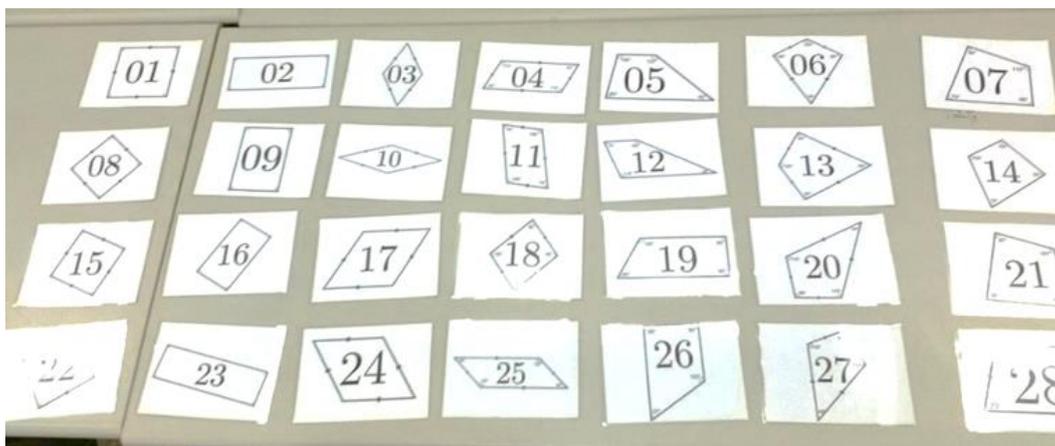


圖 3 本教學實驗所用的四邊形分類圖卡

(二) 分類活動與準則

以分類活動為本的教學活動共五個（如表 2），每個教學活動流程大致相同，以活動二為例，首先是教師發給每位同學一人一張圖卡，提出：「請同學觀察圖卡上的四邊形有沒有四個直角？」的問題。教師將黑板分成兩個區域，一個區域是有四個直角的四邊形，另一個區域是沒有四個直角的四邊形。請學生將手上的圖卡完成分類，將圖卡按個人的判斷貼在黑板上的某一區域，最後請同學觀察每一張圖卡的分類是否正確無誤，如圖 4。



圖 4 活動二的分類結果

表 2

各分類活動的幾何性質準則與命名一覽表

活動 編序	準則數	各準則的關鍵幾何性質	命名
一	單準則	按四邊形對邊平行的組數分類： 1、有兩組對邊平行的四邊形。 2、只有一組對邊平行的四邊形。 3、沒有任何一組對邊平行的四邊形。	梯形與平行四邊形的命名
二	單準則	按四邊形的四個內角是否皆為直角分類： 1、四個內角皆為直角的四邊形。 2、沒有四個直角為內角的四邊形。	長方形的命名
三	單準則	按四邊形四個邊長是否皆相等分類： 1、四個邊長皆相等的四邊形。 2、沒有四個等長的邊的四邊形。	菱形的命名與 菱形和平行四邊形的包含關係
四	單準則	按四邊形邊長是否相等分類： 1、恰有三個邊相等的四邊形 2、有兩組鄰邊分別相等的四邊形。 3、有兩組對邊分別相等的四邊形。 4、恰有兩邊相等，另兩邊不相等。 5、四個邊都不相等的四邊形。	箏形的命名
五	雙準則	按「四邊形四邊長是否皆相等」與「四邊形內角是否皆為直角」雙準則分成 1、四邊等長且四角都是直角的四邊形； 2、四邊等長且沒有四個直角的四邊形； 3、四內角皆為直角且沒有四等邊的四邊形； 4、沒有四等邊且沒有四個直角為內角的四邊形。	正方形的命名

分類活動結束後，教師藉由提問引導學生進行圖形命名，提問的問題可以是「你們覺得有四個直角的四邊形可以叫作什麼？」當學生能夠對圖形命名，釐清圖形的概念定義後，教師再次藉由提問，讓學生利用定義思考圖形之間的包含關係，提問的問題可以

是「根據這個定義，長方形的長與寬有沒有規定要不一樣長？」、「正方形算不算長方形的一種呢？為什麼？」、「長方形算不算正方形的一種呢？為什麼？」，最終再引導學生正確地判斷四邊形的包含關係。

肆、研究結果與討論

一、學生在四邊形概念的原始表現與迷思概念分析

(一) 學生在四邊形包含概念的原始表現

1. 六大類包含關係的前測表現

六大類包含關係的前測表現皆不高，以正方形與長方形包含關係的答對率最高，為 48.3%，其次是正方形與平行四邊形的包含關係，為 45.0%。再依序是「菱形與平行四邊形」、「正方形與菱形」、「長方形與平行四邊形」、「菱形與箏形」。可見各大類包含關係的難易度是有差別的，其中「菱形與箏形」的包含關係的難度最高，如表 3：

表 3

六大類包含關係前測答對率一覽表 (N=60)

包含關係	是非題試題內容	各小題 答對率	兩小題皆正確 之答對率
正方形 與長方形	(1)正方形是長方形的一種。	53.3%	48.3%
	(2)長方形是正方形的一種。	83.3%	
正方形 與菱形	(1)正方形是菱形的一種。	75.0%	36.7%
	(2)菱形是正方形的一種。	46.7%	
菱形 與平行四邊形	(1)菱形是平行四邊形的一種。	55.0%	38.3%
	(2)平行四邊形是菱形的一種。	71.7%	
正方形 與平行四邊形	(1)正方形是平行四邊形的一種。	55.0%	45.0%
	(2)平行四邊形是正方形的一種。	81.7%	
長方形 與平行四邊形	(1)長方形是平行四邊形的一種。	60.0%	36.7%
	(2)平行四邊形是長方形的一種。	60.0%	

表 3 (續)

菱形	(1)菱形是箏形的一種。	71.7%	33.3%
與箏形	(2)箏形是菱形的一種。	48.3%	

2. 梯形與平行四邊形互斥關係的前測表現

梯形與平行四邊形互斥關係的前測表現也不高，答對率僅 33.3%，如表 4：

表 4

梯形與平行四邊形互斥關係前測答對率一覽表 (N=60)

互斥關係	是非題試題內容	各小題 答對率	兩小題皆正確 之答對率
梯形 與平行四邊形	(1)梯形是平行四邊形的一種。	58.3%	33.3%
	(2)平行四邊形是梯形的一種。	56.7%	

(二) 學生在四邊形概念的迷思概念分析

研究者將參與者作答的部分內容節錄如下：

1. 正方形的描述

部分學生對正方形只強調邊長屬性，其描述為「四個邊的長度都相等」的四邊形(如圖 5)，鮮少去注意角度的屬性，例如內角為直角。由此也發現，學生習慣注意圖形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。

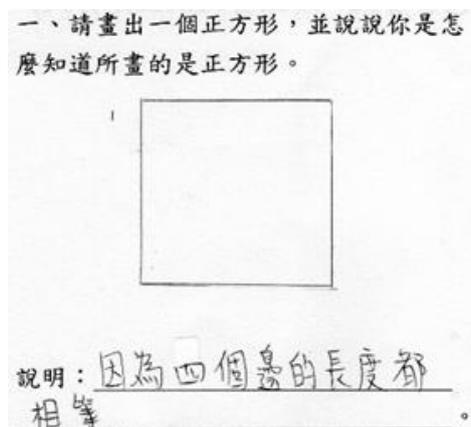


圖 5 學生對正方形描述

2. 長方形的描述

部分學生受到語意的影響，認為長方形必須是「長長的四邊形」，也就是長方形的鄰邊必須不等長（如圖 6）。

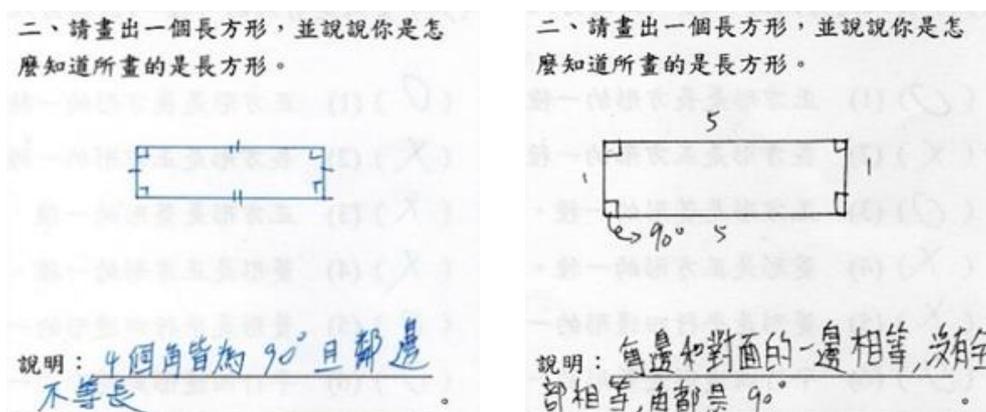


圖 6 學生對長方形的構圖與描述

3. 菱形的描述

部分學生受到典型心像的影響，認為菱形是斜擺的正方形，不接受內角都不是直角且四邊等長的四邊形為菱形。對菱形描述為「它和正方形一樣，四邊等長」，如圖 7；然而，也有學生對菱形的描述為「角度都不等於 90 度」，可能存在「正方形不是菱形」這種互斥的思維，亦即菱形的「低度外延」現象，如圖 8。

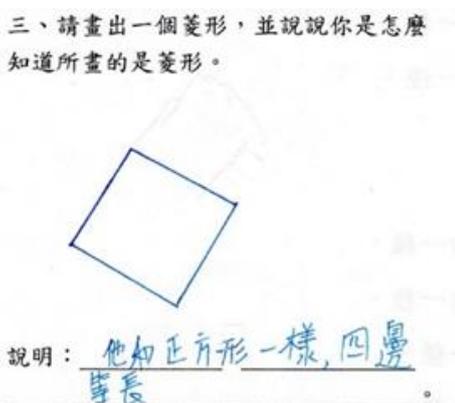


圖 7 學生對菱形的構圖與描述

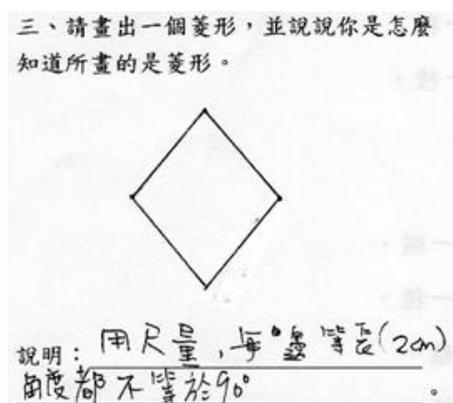


圖 8 菱形的低度外延現象

4. 梯形的描述

有些學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難，把梯形描述為「有一組對邊平行的四邊形」，解讀成「至少有一組對邊平行」的四邊形，導致有「平行四邊形也

是梯形」的迷思概念。另外，少數學生認為梯形是形狀長得像「梯子」的圖形如圖 9，惟學生所畫的梯形並不是一個「四邊形」。茲舉例如下：

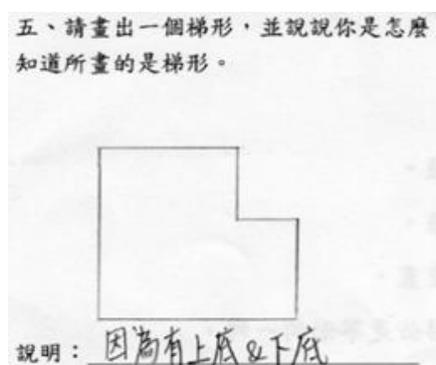


圖 9 學生對梯形的構圖與描述

5. 平行四邊形的描述

部分學生受到平行四邊形典型心像的影響，認為平行四邊形內角不可等於 90° ，不接受正方形或長方形為平行四邊形的一種，如圖 10。另外，有些學生對平行四邊形的描述為「兩雙對邊平行且鄰邊不等長」，可能存在「菱形不是平行四邊形」互斥的思維，如圖 11。

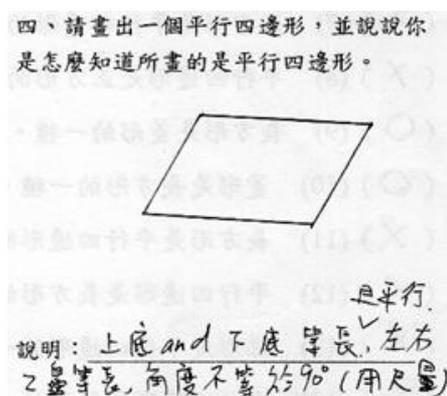


圖 10 學生對平行四邊形的構圖與描述

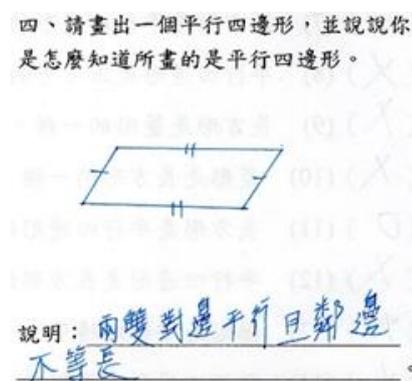


圖 11 平行四邊形的低度外延現象

6. 箏形的描述

學生的典型 (prototype) 心像容易導致無法接納非典型圖形，例如一些學生受到箏形典型心像的影響，認為箏形一組鄰邊和另一組鄰邊不等長 (如圖 12)，可能將「四邊等長」的四邊形排除在外，導致認為菱形不屬於箏形。此外，部分學生將箏形描述為「四邊相等」(如圖 13)，可能導致有「箏形是菱形」的錯誤認知。

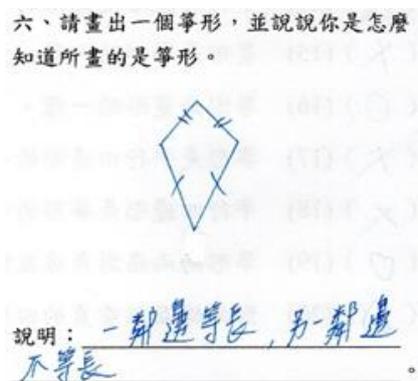


圖 12 對箏形的典型心像

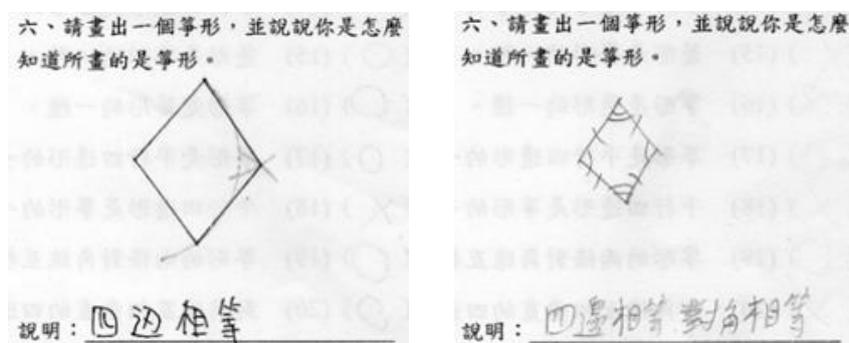


圖 13 學生對箏形的構圖與描述

二、以分類為本的教學活動對學生學習四邊形包含關係的表現與成效

六大類包含關係的後測表現，難易度也是有差別的，以「正方形與長方形」、「正方形與菱形」、「正方形與平行四邊形」的表現並列最優，答對率均為 81.7%，其次分別是「長方形與平行四邊形」、「菱形與平行四邊形」、「菱形與箏形」。可見經過教學介入後，「菱形與箏形」的包含關係難度仍是最高，「菱形與平行四邊形」的難度次之。

(一) 正方形與菱形的包含關係之表現與成效為最好

從表 5 可以發現，學生經過教學介入後的表現與成效最好者，是正方形與菱形的包含關係，可能是因為其包含關係對國中生較為容易，這與陳明新（2015）利用動態環境下探討四邊形包含關係之認知情形的研究結果符合，其發現國小學童在認知上容易接受正方形是菱形的一種。

表 5

六大類包含關係評量前、後測答對率(N=60)的比較表

包含關係	是非題試題內容	各小題答對率		兩小題皆正確之答對率		
		前測	後測	前測	後測	進步
正方形 與長方形	(1)正方形是長方形的一種。	53.3%	85.0%	48.3%	81.7%	33.3%
	(2)長方形是正方形的一種。	83.3%	88.3%			
正方形 與菱形	(1)正方形是菱形的一種。	75.0%	96.7%	36.7%	81.7%	45.0%
	(2)菱形是正方形的一種。	46.7%	83.3%			
菱形 與平行四邊形	(1)菱形是平行四邊形的一種。	55.0%	83.3%	38.3%	76.7%	38.3%
	(2)平行四邊形是菱形的一種。	71.7%	81.7%			
正方形 與平行四邊形	(1)正方形是平行四邊形的一種。	55.0%	90.0%	45.0%	81.7%	36.7%
	(2)平行四邊形是正方形的一種。	81.7%	90.0%			
長方形 與平行四邊形	(1)長方形是平行四邊形的一種。	60.0%	90.0%	36.7%	80.0%	43.3%
	(2)平行四邊形是長方形的一種。	60.0%	86.7%			
菱形 與箏形	(1)菱形是箏形的一種。	71.7%	71.7%	33.3%	63.3%	30.0%
	(2)箏形是菱形的一種。	48.3%	78.3%			
平均		63.5%	85.4%	39.7%	77.5%	37.8%

(二) 菱形與箏形的包含關係之表現與成效為最差

另外，本研究也發現菱形與箏形的包含關係的後測表現最差，只有 63.3%，成效也最差，僅進步 30.0%，這可能是由於箏形之定義對國中生而言是較難理解的，且學生對箏形的典型心像似乎難以打破，認為箏形是兩組鄰邊分別等長的四邊形，但限制「四邊必須不等長」，導致其認為菱形不屬於箏形。為何學生經過分類活動後，仍難以打破箏形的典型心像，或難以理解箏形的定義，這值得後續的研究探討。

(三) 梯形與平行四邊形互斥關係的表現與成效

從表 6 可發現，學生經過圖卡分類後能理解梯形與平行四邊形互斥關係，從前測的 33.3% 進步到後測的 60.0%，這些學生能夠看見並非任意兩個四邊形都有包含關係，或許這也是圖卡分類教學的成效之一。

表 6

梯形與平行四邊形互斥關係評量前、後測答對率(N=60)的比較表

互斥關係	是非題試題內容	各小題答對率		兩小題皆正確之答對率		
		前測	後測	前測	後測	進步
梯形 與平行四邊形	(1)梯形是平行四邊形的一種。	58.3%	80.0%	33.3%	60.0%	26.7%
	(2)平行四邊形是梯形的一種。	56.7%	78.3%			

伍、結論與建議

一、結論

(一) 中學生對四邊形包含關係的迷思概念方面

本研究結果發現，中學生對四邊形包含關係的迷思概念有以下三種：第一，學生習慣注意矩形和正方形邊長的屬性，不易知覺其角度的屬性。第二、學生的典型(prototype)心像容易導致無法接納非典型圖形。第三、學生對梯形與平行四邊形的互斥關係理解上有困難。

(二) 以分類為本的教學活動對國中生學習四邊形包含關係的表現與成效方面

1. 成效方面

經過以分類為本的教學活動後，研究發現學生在長方形和正方形的概念與包含關係有一些改善，成效有明顯的進步，各大類包含關係兩小題皆正確的平均答對率由前測 39.7% 提升到後測 77.5%，且每大類包含關係後測的答對率皆不低於前測的答對率，可知學生的四邊形包含關係理解經過以分類為本的教學活動後，大都能有效地改善。

2. 表現方面

正方形與菱形的包含關係之後測表現與成效為最好，菱形與箏形的包含關係之表現與成效為最差，梯形與平行四邊形互斥關係的後測表現，則達 60.0%。

3. 包含關係的難易度比較

無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別，但教學介入後的難易度沒有太大改變。後測結果的難易度以「正方形與長方形」、「正方形與菱形」、「正方形與平

行四邊形」的表現並列最優，其次分別是「長方形與平行四邊形」、「菱形與平行四邊形」、「菱形與箏形」，菱形與箏形包含關係的難度維持最高。

二、建議

(一) 研究結果發現，菱形與箏形包含關係的難度維持最高，原因可能是箏形之定義對國中生而言是較難理解的，且學生對箏形的典型心像似乎難以打破，導致其認為菱形不屬於箏形。為何學生經過分類活動後，仍難以打破箏形的典型心像，或難以理解箏形的定義，這值得後續的研究探討。

(二) 本實驗設計缺乏控制組做比較，也無法確定在前、後測之間是否有其他事件介入而影響實驗結果，或許有其他影響因素混淆實驗結果，因此不宜將研究結果過度解讀。

(三) 目前的教科書設計中，大多直接為幾何圖形下定義，在分類的準則與概念沒有太多的著墨，建議教師可參考分類活動與引導提問幫助學生釐清四邊形的概念。

(四) 研究結果也發現，八年級國中生對四邊形包含關係的理解在前測之表現不高，且根據本研究結論，我們得知無論教學介入前後，四邊形包含關係的難易度皆有差別。因此，包含關係的教學可能不宜將四邊形之間所有的包含關係以一個包含圖表直接呈現給學生，建議教師在四邊形各包含關係的教學宜分開進行。

(五) 從本研究的前、後測結果以及進步情形來看，以分類為本的教學實驗可幫助大部分八年級國中生理解四邊形的包含關係，主要原因是因為四邊形包含關係的認知關鍵在於學生能否看見圖形的內在關鍵性質，因此建議教師在本課題的教學，宜著重於幫助學生看見各四邊形的性質。

(六) 由本研究結果得知，正方形與菱形的包含關係之後測表現為最好，進步幅度也最大，因此本研究的分類教學適合八年級國中生學習「正方形與菱形的包含關係」。又依據各包含關係表現的進步幅度由大到小排列，本研究建議四邊形包含關係的認知發展路徑可為「正方形與菱形」→「矩形與平行四邊形」→「菱形與平行四邊形」→「正方形與矩形」→「菱形與箏形」→「梯形與平行四邊形」。

參考文獻

何敏華 (2005)。創意教學活動「四邊形的獵捕」—包含關係的推理。科學教育月刊，282，41-55。

- 林柏嘉 (2009)。兩種改善四邊形辨識迷思的教學策略研究—以國中七年級學生為對象 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 教育部 (2008)。97 年國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。
- 陳明新 (2015)。在動態幾何環境下探討國小四年級個案學童對四邊形包含關係之認知情形 (未出版之碩士論文)。國立新竹教育大學，新竹市。
- 陳創義 (2006)。青少年幾何形狀概念的「學習與教學」之研究期中進度報告。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫期中進度報告 (NSC94-2521-S-003-010)，未出版。
- 郭俊麟 (2011)。國中八年級學生辨識數學敘述及其逆敘述現象之探討 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 楊忠璇 (2013)。幾何知識與推理能力對高年級學童幾何圖形概念改變的影響 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 黃志祥 (2003)。國小六年級學童四邊形幾何概念的包含關係—從概念心像與概念定義的觀點探討 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學，臺北市。
- 謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗 (2006)。幾何。載於周筱亭、黃敏晃 (主編)，*國小數學教材分析* (頁 28-33)。新北市：國立教育研究院。
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: John Wiley.
- Currie, P. and Pegg, J. (1998). Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals. In C. Kaner, M. Goos and E. Warren (Eds). *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia Incorporated*. Vol. 1. (pp. 177-184).
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, 14(1), 11-18.
- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211. doi: 10.1080/0950069980201003

- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20. doi: 10.1080/14794800008520167.
- Gelman, R., & Baillargeon, R. (1983). Review of some Piagetian concepts. In P. H. Mussen (Ed.), *Handbook of Child Psychology: Formerly Carmichael's Manual of Child Psychology: Socialization, Personality, and Social Development*. Wiley.
- Heinze, A., & von Ossietzky, C. (2002). Because a square is not a rectangle-Students' knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. *Proceedings of the 26th PME Conference*, 3, 81-88.
- Leung, I. C. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of Smart Board. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(6), 1007-1021. doi: 10.1007/s11858-008-0159-z.
- Lin, F. L., & Yang, K. L. (2002). Defining a rectangle under a social and practical setting by two seventh graders. *ZDM*, 34(1), 17-28. doi: 10.1007/BF02655689
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 179-196. doi: 10.1023/A:1004175020394
- Nakahara, T. (1995) Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan, *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 27-34.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980) Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts, *Proceedings of the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 177-184.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12 (3-4), 31-47.