ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第2期

台灣數學教育學會

2005年6月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2005 年 6 月出版
NO.2　2005

出版者：台灣數學教育學會
地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212
電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw
網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw
地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
　　國立嘉義大學數學教育研究所
電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：
1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 2 期

2005 年 6 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 2 期　　　　　　　　　　2005 年 6 月

ISSN 1815-6355

我們還可以為 TJMT 做些甚麼

洪萬生

國立台灣師範大學數學系

本學會終於出版期刊 (TJMT) 了。從數學（知識）社會學的角度來看，這表示我們台灣的數學教育研究又邁向『制度化』的另一大步，真是可喜可賀！凡事起頭難，對於一個主要是利用『虛擬』網絡而運作的學會來說，一份『真實』刊物之問世，的確標誌著台灣數學教育社群逐漸成熟，這當然歸功於本刊主編楊德清教授以及其他編輯委員同仁，請容許我在此向他（她）們致上十二萬分的敬意與謝意。

本刊創刊號刊登了四篇論文，主要都涉及第一線教師之教學實踐，然而，其中深刻的反思，也醞釀了理論建構的一個維度。假以時日，一個中小學教師的自主性之教學研究典範，一定會在我們這個社群出現。這將是我們本土的學術資產，也將是台灣經驗的另類表現。

現在，我們還可以為這個刊物做些甚麼呢？我想既然它是專屬於中小學教師之刊物，那麼，儘可能貼近他（她）們的經驗，絕對可以用來評斷它將來是否能成為台灣數學教育史的不可缺少篇章。為此，除了期待中小學教師繼續為本刊撰稿之外，我們也應該將本刊論文或其他討論文章之流傳，作為它是否成功的判準之一。換句話說，本刊的成功與否，『作者』與『讀者』應該同樣重要才是。因此，我們或許也可以歡迎中小學教師就他（她）們的教學現場所遭遇的 PCK 問題，撰寫精簡短文讓本刊披露，藉以引起討論並形成教學共識或研究議題，如此將同時惠及我們的數學教育之研究與教學，善莫大焉！

此外，這一刊物也應該儘可能提供有關數學教育研究成果方面的資訊，譬如國內同仁有哪些新的論述問世？有哪些（博、碩士）學位論文已經完成？有哪些新的課程開設了？又有哪些研討會即將或已經舉辦了？等等。這些資訊之呈現，將可證明我們社群的豐沛活力，同時，也是吸引數學教育同好的最佳代言。

謹陳如上，願與同仁共勉之！

淺談 HPM 學習工作單之設計

蘇意雯

台北市立成功高中

本文摘要

本文內容主要在於介紹數學史融入數學教學的理念，為數學教師提供另一種教學素材及授課方式。首先作者說明什麼是 HPM，以及 HPM 學習工作單的意義。接著並以高一教材為範疇，設計海龍公式學習工作單，除了分析此份 HPM 學習工作單之設計理念及施行成果外，最後也對有心想要從事 HPM 教學的現場教師，提出「閱讀」和「實作」的方法及建議。

關鍵字：HPM、HPM 學習工作單、海龍公式。

壹、 什麼是 HPM

在數學教學上輔以歷史取向，自從 1970 年代初創立的數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），就是以此為首要目標。如何讓數學史可以在數學的「教學」和「學習」中，扮演更有效的角色，是有心從事 HPM 教學的教師相當關心的課題。

有關為何要把歷史維度融入數學課程的原因，國內外學者均提出很多的看法。例如 Furinghetti 和 Paola（2003），認為在課堂上融入歷史可能達到的兩個取向：第一是「歷史主要功能在於激發學生在數學上的興趣」，此處的歷史含括了問題的出處、軼事和插圖的出處、趣聞的來源等。第二個取向是「整合歷史進入數學教學，就是以數學為主體，安排實行的課程，探討教育的議題、數學的脈絡，從一個新的觀點以及佈置一個新的工作環境，以幫助達成數學的目標。」因此，這兩位作者設計了一片光碟，其中包含了以教授機率單元為例，在歷史的鋪陳上，安排各數學家們對賭金分配問題的解法，藉著比較不同解法，以澄清學生的觀念，希望能對有心想使用數學史融入數學教學的教師作一參照。

除了上述融入數學史於數學教學的原因之外，Barbin (2000)也提出了她的見解。她認為在數學教學中融入歷史維度最常見的兩個理由是：1.對於「數學究竟為何？」的觀點，數學史提供了我們另一種思考的機會。2.數學史讓我們對於概念和理論有更好的瞭解。同樣的結論，也出現在 Iris Gulikers 和 Klaske Blom (2001)針對 160 篇在幾何領域運用歷史的分析，認為主要可分為概念性、多元文化及引起動機三大範疇。而 Tzanakis 和 Arcavi 等人（2000）也提出支持數學史可以幫助數學教學的五大立論：1.幫助數學學習；2.對於數學本質和數學活動的發展，可有另一個觀點；3.提升教師自己教學知識；4.讓教師能喜好數學；5.視數學為一項文化成果的珍視。至於 Grugnetti (2000)則認為數學史在教學上的影響有如下三點：1.使用古文本上的問題，讓學生比較現行策略與原始文獻之異同。2.以歷史建構數學的技能和概念。3.經由歷史的分析，讓教師了解為何某一特定概念對於學生造成困難。

綜括上述的說明，以數學史融入數學教學所能達成的目標，可以涵蓋三個範疇，那就是情意、認知及文化活動。那麼實際上，數學史在各國現行的國家課程綱領中，又扮演什麼樣的角色呢？Fasanelli（2000）分析了十六個國家的現行策略，筆者依情意、認知、文化等層面的內容整理如下：

・情意（中國、希臘、義大利、荷蘭、波蘭）：

引發學習動機。

激起學習興趣。

藉由數學家傳記啟發學生人格成長。

・認知（澳洲）：

幫助學生經由歷史脈絡，了解數學概念發展。

藉由文本讓學生比較不同解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。

・文化活動（巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威、美國）：

經由認識各民族各具特色之數學發展，珍視數學文化性，達成有意義的學習。

由此可知，在此三種層面上，上述各國於認知方面的開發較為不足，也就是在數學邏輯與數學史上的連結有所欠缺。事實上，妥適運用數學史，可以讓學生體會到數學不僅是由一系列直線排序進行的章節所組成，也能瞭解現代數學符號發展過程的精簡和威力。對於曾實施過數學史融入數學教學的教師，在引入數學

史所能達到引起學生動機、幫助提昇學習興趣的功能上，相信都可有所體會（洪萬生, 2001）。但是，如前所述，要運用歷史以追求特定的數學教學目標時，教師就需要在歷史以及教育的領域上下功夫，顧及學生的認知層面，設計出合適的教學序列，這也是比較困難的部分。誠如 Furinghetti 和 Paola （2003）所說：「提供給老師現成的教學序列，讓教師馬上可以實行，這樣固然方便，可是最好的方法，還是創造一個可讓教師自由發揮的環境。」因為「神而明之，還在於人」，只有自己親手設計、實作，才能得到最好的教學效果，這也是有心嘗試融入數學史於數學教學的教師所要努力的目標。

貳、 HPM 學習工作單的設計

那麼對於一位想要實施 HPM 教學的教師，究竟必須從何著手呢？在筆者所進行之以 HPM 為進路，探討數學教師專業發展的研究，結果顯示「利用製作 HPM 的學習工作單，引動教師融入數學史於數學教學」，是相當重要的一個策略。所謂的「學習工作單」(worksheet, workcard) 主要可以分成兩類：

1.由一組作業構成的「工作單」，目的是幫助學生精熟在教室中所習得的某一解法過程，或強化某一單元。使用場所可以是教室，也可以是家庭。

2. 由一組有結構、有引導性的問題所成，目的是用以引進一個新單元、一組問題或一些議題以供討論。這種設計通常會考慮學生的先備知識，並且以循序漸進詢問的方式，而引向先前未學習的基本知識之發展。這些工作單通常用在教室中、其操作形式是學生分成若干小組，而教師的角色則是顧問與指導。正因為如此，所以，在教師教育課程中，這種工作單也常被引用。(Fauvel & van Maanen, 2000, p. 216)

在本文中，筆者所指的學習工作單主要針對第二類。在製作 HPM 學習工作單之初，教師必須謹記在心的是，HPM 的精神是在於幫助教師「教數學」，而不是數學史。因此，我們認為在學習工作單上要考量數學知識的邏輯、歷史以及學生認知三個面向。所謂的邏輯面向，代表課程單元的教學目標，以及此單元在教科書中的編排方式，和教師手冊中相關的說明。有關歷史的面向上，就是包含數學史的範疇：(A)數學家傳記：例如高斯傳。(B) 數學思想上的重要發展：例如複數系的產生。(C) 著名定理的來源剖析：例如費馬最後定理。(D) 證明與解題的思維。(E) 文本的呈現。(F) 科普書籍介紹等等，不管是原始典籍，或第二手

文獻等等，都列入此一範疇。

至於對於學生認知的面向，則是從數學教育研究論文中，搜尋有關學生的認知發展方面的成果，以及此單元學習障礙的具體案例，或從教師本身的教學經驗及同儕間的交流討論去發掘學生的問題，也從國內或國外 HPM 方面的相關研究著手。在針對這三個面向設計學習工作單的過程中，教師首先體會教科書編者、課程標準與教科書內容，以及古代數學家、數學物元、數學理論之精神，再經過自我詮釋之後，考量學生的學習需求，然後從事學習工作單的編製，最後再進行課堂實作。此類涵蓋數學知識的邏輯、歷史、學生認知三面向的 HPM 學習工作單，連結了教師對於 HPM 理論的了解與實作，而藉由學習工作單的實施，也可以獲得學生對於教學的回饋。在了解了 HPM 學習工作單之意含及製作方式後，接下來，我們以海龍公式[1]為例，看看對於此單元如何設計出 HPM 學習工作單。

參、HPM 學習工作單－海龍公式

筆者之所以選擇海龍公式設計學習工作單，主要是因為在講授課本的海龍公式時，雖然教師手冊的參考資料中附有海龍公式的幾何證法，但在課文中，只是簡略以「海龍公式的幾何證法不在此處討論」帶過，就直接以三角形面積為 $\frac{1}{2}ab \times \sin C$，再以 $\sin C = \sqrt{1-\cos C^2}$，而 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 代入，得出海龍的三角形面積公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（a,b,c 為三角形之三邊長，s 為周長之半）。筆者認為這可能是由於教科書編者考量此證法太過迂迴曲折，另一方面，教科書編者把海龍公式擺在此處的目的是為了讓學生更進一步熟稔三角形面積公式及餘弦定理，因為教師手冊於 2-3 正弦定律與餘弦定律一節裡，在教學方法與注意事項中提到「為了將面積公式作一完整的介紹，可先介紹正餘弦定律，因為海龍公式的證明必須借助於餘弦定律。」(龍騰版教學手冊, p.51)。這樣的證法雖然簡潔，可是，由於課本對海龍公式幾何證法的簡短敘述，常讓學生興起想一窺究竟的好奇，另一方面，原始的證明論證非常基本，僅使用平面幾何上簡單的要素，卻能將這些基本元素組成豐潤而典雅的證明，這種極端迂迴、驚人且富原創性的

[1] 在一篇海龍死後數世紀的阿拉伯古手稿中，回教學者 Abu'l Raihan Muh. al-Biruni 認為這個結果並不是海龍的創作，而是出自聲名顯赫的阿基米德之手。但目前並沒有阿基米德的原始著作來支持這種看法。(Dunham, 1996)

論證，可列為初等幾何中最高明的證明之一（Dunham, 1996）。因此，筆者有了編製此學習工作單的構想。一方面是為了把課本提及海龍的「幾何證法」，做一個交代，另一方面，是為通常成為學生夢魘的三角單元，增添人文的面向，希望在適當的地方，引進古人原始的想法，讓數學思想的發展與學生的學習過程上，能有更貼近的年合，增加學生的學習興趣。

於是，筆者在海龍公式的教授上，一改以前只是講講海龍的生平、著作，並把課本的公式導一遍讓學生了解的方式，而是利用學習工作單，把原始幾何證法忠實的呈現在學生眼前。另外筆者也安排了在中國歷史上等價於海龍公式的秦九韶三斜求積公式，讓學生對於數學解法與概念的今昔有所對照。

在工作單的佈置上，筆者所採取的想法是：「海龍的原始想法僅用到相當基本的平面幾何知識，就可以得出所求結果，因此只要學生肯花下時間研究，加上教師提示，應可做為教學上一可行之啟蒙例。至於三斜求積公式，可讓同學自行導出，貼近文本，增加參與數學活動的機會。」當時安排兩者並列的用意，是雖然海龍公式與之後秦九韶的三斜求積公式，都能解決已知三邊長，求三角形面積的問題，但乍看之下，兩者所呈現的數學形式卻不相同，筆者希望在問題與討論中，讓學生自行由三斜求積公式導出海龍公式，讓他們明白事實上此二公式有等價的意義，達到教學的效果。因此，整份工作單在數學邏輯知識上的考量是以原始的證法讓學生重新認識海龍公式。至於輔以中西的數學史料，是要讓學生藉由同一公式比較中西數學文化的差異。因為就教科書編者而言，在此處的海龍公式證明是如前所述，為了讓學生更嫻熟三角形面積公式和餘弦定理的運用而來。可是跨越時空，就當時的數學家而言，是為了解決實際狀況－「不進入一塊地而能測知其面積」，以初等平面幾何知識所解決的問題。恰當地連接兩者，使學生皆有所得，是筆者設計此單元學習工作單的本心。

這次學習工作單的施行，是讓學生於課後完成。主要的原因是筆者曾於 92 年 5 月 8 日至社區大學「數學史與數學教學」課程中講授「從 HPM 觀點看九年一貫之連結」，座談結束之時，請與會教師討論數學史在數學教學中所扮演的地位。參與教師大多對數學史的幫助持正面的看法，但是，對於在課堂教學中融入數學史則多持保留的態度，其中一位教師表示：「數學史的介紹可以引發學習動機，使教學活動更為生動活潑，但就目前自己的教學經驗，時間上的限制是一個很大的問題，若是將數學史放在社團、選修課上使用，效果應該會很好吧！」另

一位有十數年教學經驗的教師也同樣反應:「數學史可應用於社團活動上,一般教學活動用到機會不多,因為要花很多時間。」此時筆者反思到當教師在數學教學中融入歷史維度之時,時間的掌控是相當重要的一件事,因此,筆者此次學習工作單的實施方式,採取由教師稍加提示學習工作單內容,便發下去讓同學自己研究,過些時日再利用一節課的時間與同學討論內容。從訪談學生的反應得知,他們也相當能夠接受此種方式,大部分的學生都認為「學習單可以增進對數學多元的思考及推理能力,而不只是在課本和學習手冊的題型打轉,對於進階的思考有很大的幫助」。這樣的結果可以做為有心實施 HPM 教學,卻又受限於教學時數不足的數學教師作為參考。

以稍加提示內容,讓學生自行完成學習工作單,再帶回學校討論的方式,雖然在時間上精簡許多,可是往往會佚失掉一些在實際教學互動過程中所可能激起的火花。例如,以同樣的題材而言,筆者也於當年暑假期間,在某文教基金會所主辦的第一期國中資優數學研習營進階班中講授,當問及「知道三角形的底和高時,可以很快得出三角形的面積,可是如果一塊禁止進入的三角形土地,要如何求出它的面積呢?」當時台下的學生議論紛紛,有一位學生自告奮勇上臺,先假設做出一邊的高,然後由兩個直角三角形共用此高,以畢氏定理求得高的表示式,再由 底×高,導得秦九韶的「三斜求積術」。這真是一個驚喜,對學生而言,獨立導出結果,而這結果也解釋了古人的公式由來(因為秦九韶只給出公式,並沒有推導過程),他獲得了相當大的成就感。對筆者而言,佈置文本,讓學生在解決問題中獲得學習的樂趣,正是 HPM 所追求的目標。接著筆者變更了次序,先介紹中國算學,再回過頭去講解學生所感覺陌生的原始海龍公式的證明。當講解完海龍的證明後,有些人認為「海龍的公式好煩喔!」也有些學生寫下了他們的感想:「我覺得古代的人真是太了不起了(尤其是 Mr.海龍先生),我只能說我對他們感到由衷的佩服呀!」另外有學生也體會出「上了今天的課才知道不同的人、事、物,會蘊育出不同味道的數學。」。

肆、結語

採用現成的學習工作單固然容易,但是相信大家一定會想為自己任教的學生量身打造適合的 HPM 學習工作單。因此,最後筆者建議有心想要自我充實,學習 HPM 教學的教師,不妨找幾個志同道合的夥伴,以學校為中心進行。每週利

用一段固定的時間，最好是兩個小時以上，因為這樣較有足夠的時間分享每個人的作品。在固定的地方，例如數學科研究室，進行討論。如此，教師可以較從容的利用「閱讀」和「實作」的模式，在共同學習夥伴關係的驅動下，完成製作整合三面向的 HPM 學習工作單，使用於教學。「閱讀」的重要在於從閱讀中，教師不但充實了數學史素養，也能體會在教學素材中，融入 HPM 三面向的意含。此處的「閱讀」包括：

・參考現有 HPM 實作資料庫中的資訊。例如《古代數學文本在課堂上的使用》計畫中所完成的 29 篇教案，或《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》裡收錄的 8 篇實作心得，以及《HPM 通訊》裡的文章等等。

・數學文本，其中包括原始典籍或二手文獻。

・數學普及讀物。

・與數學學習與教學相關之文章。

至於實作部分則包括了：

・學習工作單的編製。

・教學後實作心得的撰寫。

在實際的操作上，此「閱讀」和「實作」的模式，是雙向並行的。從閱讀中教師汲取有關 HPM 的素材，經過自我詮釋後，編製成學習工作單。接著，教師在課堂的教學實施，獲得學生回饋之後，如果能撰寫實作心得加以反思，繼續再從文本中尋找適合的史料，如此才能讓下一單元呈現出更精緻的 HPM 教學。除此之外，向專家諮詢，例如台灣師大的洪萬生教授，或者是尋求 HPM 同好的協助，例如《HPM 通訊》中的編輯小組，這些都是向外可以獲得的資源。有了上述的資訊參考，透過不斷的閱讀和實作，相信大家都能設計出合用的 HPM 學習工作單。親愛的讀者，您是不是也躍躍欲試了呢？

附錄

學習工作單

一、海龍（Heron）生平介紹

海龍（Heron）希臘的數學家與測量學家，大約生於西元 75 年左右，他在數學方面最能代表其成就的著作是度量論（Metrica）一書，該書的原稿本於 1896 年才被發現，全書共分為三卷。第一卷由矩形和三角形開始，討論了平面圖形和立體表面之面積，並給出了著名的三角形面積公式－海龍公式。第二卷探討立體圖形，其中包括圓錐體、圓柱體、稜柱體等立體體積的求法。第三卷介紹了平面和立體圖形案給定比例之分割，並用到了求立方根的近似公式。

海龍另一部關於測地學的著作（*Dioptra*）也很有名，在這部著作中，海龍對如何在隧道之兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，包括有一地不能到達以及兩地均能看見但均不能到達的情形；另外他也說明如何從已知點到不可及的一線作垂線，以及如何測知一塊地的面積而不需進入這塊地面上。大家熟知的三角形面積公式$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（a,b,c 為三角形之三邊長，s 為周長之半），是最後提到的觀念（不進入一塊地而能測知其面積的依據）。這個公式出現於他的測地學（*Deodesy*），在 *Dioptra* 和 *Metrica* 中又再度出現，並且附上證明。海龍的著作之特色是摻合了嚴密數學和近似方法以及埃及人的公式，海龍所提出的公式有許多並未附上證明而一部份的公式則只給出近似值而已。除了上述正確的三角形面積公式，他另外提出一個不精確的三角形面積公式。海龍之所以提出許多埃及時代的公式（例如以$a+\dfrac{r}{2a}$做為$\sqrt{a^2+r}$之近似值），可能原因之一是精確公式所涉及的平方根、立方根等，並不是測量人員所用的上的；事實上，純幾何與測地學或度量學還是有些不同，測地學中求面積和體積的方法並不屬於高等教育的範圍，它們只教給測量員、泥水匠、木匠和技術人員。無疑的，海龍繼承埃及的測量科學並加以發揚光大，他的測地學著作被沿用了好幾百年。

問題與討論：

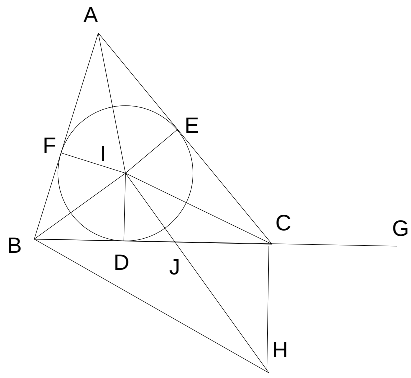
1.就數學課而言，你喜歡老師直接給出公式（例如正弦定理、餘弦定理、海龍公

式...）的結果，還是喜歡老師由推導過程得出公式？請說明你的理由。

學習工作單二、海龍公式的證明

如圖，設圓 I 分別與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 三邊相切於 D,E,F,則 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$,

因此△ABC 之面積



$\Delta=\frac{1}{2}\overline{ID}\cdot\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{IE}\cdot\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{IF}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}r(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=rs$ 。

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 。因為切線段等長，

得 $\overline{AE}=\overline{AF},\overline{BF}=\overline{BD},\overline{CD}=\overline{CE},$ 因此

$\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{BF}+\overline{CD}+\overline{CE})=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=s$ 。故

$\overline{AE}=\overline{AF}=s-(\overline{BD}+\overline{CD})=s-a$ ，同理 $\overline{BD}=\overline{BF}=s-b,\overline{CD}=\overline{CE}=s-c$ 。

延長 $\overline{BC}$ 至 G 使 $\overline{CG}=s-a$ ，則 $\overline{BG}=s$ 。過 I 與 C 分別作 $\overline{BI}$ 與 $\overline{BC}$ 之垂線而相交於 H，則因 $\angle BIH=\angle BCH=90^\circ$，故 B、I、C、H 四點共圓。因此，

$\angle BHC=180^\circ-\angle BIC$ ，而

$\angle BIC=\angle BID+\angle CID=(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC)+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$

故 $\angle BHC=180^\circ-\angle BIC=180^\circ-(90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC=\angle AIE$ 。

因此，$\triangle AIE\sim\triangle BHC$，故 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{IE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}$ (因 $\triangle IDJ\sim\triangle HCJ$)

又 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}$ ，得到 $\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}+1=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}+1=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}$ 。

於是 $\frac{\overline{BG}^2}{\overline{BG}\cdot\overline{CG}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{BD}\cdot\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{ID}^2}$ 。

因此 $\overline{BG}^2 \cdot \overline{ID}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{CG} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}$，即 $s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$，

故得△$= sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

問題與討論：

1.請如課本般用三角形面積和餘弦定理證出海龍公式。

2.對於課本的證法和海龍的證法，您喜歡哪一個？請說明理由。

學習工作單三、秦九韶與《數書九章》

1.秦九韶生平簡介

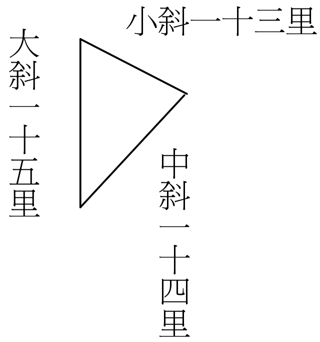
秦九韶，字道古，普州安岳（今四川安岳）人，生於南宋寧宗嘉泰二年（1202），約卒於理宗景定二年（1261），與李冶、楊輝、朱世傑並稱宋元數學四大家。秦九韶自幼生活在家鄉，十八歲時曾「在鄉里為義兵首」，後隨父移居京都。他是一位聰敏好學之人，處處留心，勤學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間，正是他努力學習和積累知識的階段。工部郎中掌管營建，而秘書省則掌管圖書，其下屬機構設有太史局。因此他有機會閱讀大量典籍，並拜訪天文曆法和建築等方面的專家，請教天文曆法和土木工程問題，甚至可以深入工地，瞭解施工情況。他又曾向「隱君子」學習數學，也曾向著名詞人李劉學寫駢驪詩詞。通過這一階段的學習，秦九韶成為一位學識淵博，多才多藝的青年學者。他認為數學研究「大則可以通神明，順性命；小則可以經事務，類萬物，詎容以淺近窺哉！」1244 年至 1247 年間，秦九韶專心致志研究數學，完成數學名著－《數書九章》。

2.《數書九章》

宋元時期是中國傳統數學發展的高峰時期，《數書九章》是宋元數學的代表作之一，本書共十八卷八十一題，分為九類，每類兩卷九題。這些問題是秦九韶從他收集和演算的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。在著作體例方面，《數書九章》採用問題集的形式，並將問題分為九類，但在各題術文（解題方法）之後多附有「草」，就是表明演算步驟的算草圖式。在幾何方面，秦九韶的另一項傑出成果是「三斜求積術」，即已知三角形三邊之長求其面積的公式，為前人所無，等價於古希臘著名的海龍公式。此題位於第五卷－田域類的第二題。

3.三斜求積

問：沙田一段有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知為田幾何？



答曰：田積三百一十五頃。

術曰：以少廣求之。以小斜冪併大斜冪減中斜冪逾半之自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之為實一為從隅開平方得積。

問題與討論：

1.三斜求積公式中，若以 a 表大斜、b 表中斜、c 表小斜，用現代數學符號可表示為 $\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$ ，古時 240(積)步為一畝，百畝為頃，請算出您的答案是否相符。

2.請試著由三斜求積公式導出海龍公式。

3. 秦九韶只給出三斜求積公式，並沒有說明由何得出此公式。聰明的同學，你能幫他導出這個公式嗎？

參考文獻：

洪萬生 (2001)。古代數學文本在課堂上的使用。國科會補助專題研究計畫成果報告, (編號 NSC 89-2511-S-003-031-; NSC 89-3511-S-003-121), 國立台灣師範大學數學系。

洪萬生 (2002)。中算史中的『張本例』。HPM 通訊, 5(12), 1-3。

蘇意雯 (2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究。台北市：國立台灣師範大學博士論文(未出版)。

何紹庚 (1993)。數書九章提要。載於郭書春主編：中國科學技術典籍通彙數學卷 (pp. 1-431-1-437)。鄭州市：河南教育出版社。

南宋・秦九韶（1993）。數書九章。載於郭書春主編：中國科學技術典籍通彙數學卷 (pp. 1-439-1-724)。鄭州市：河南教育出版社。

Dunham, W. (1991)（林傑斌譯, 1996）：天才之旅（Journey through genius: the great theorems of mathematics）。台北市：牛頓出版公司。

Kline, M. (1972)（林炎全、洪萬生、楊康景松譯, 1983）：數學史－數學思想的發展（Mathematical thought from ancient to modern time）。台北市：九章出版社。

Barbin, E. (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 1-38). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.) (2000). History in mathematics education: The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. Mathematics in School, 32 (1), 37-41.

Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. J. Katz (Ed.), Using history to teach mathematics: An international perspective (pp. 29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Gulikers, I., & Blom, K. A. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. Educational Studies in Mathematics, 47, 223-258.

Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., ＆ Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom:An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

通訊作者

蘇意雯 台北市立成功高中 mathyiwen@yahoo.com.tw

數學寫作融入國三數學課室之我見我思

姜淑珍[1] 劉燕芬[2] 楊德清[3]

[1] 嘉義市玉山國中

[2,3]國立嘉義大學數學教育研究所

本文摘要

鑒於數學寫作有益於學生的數學溝通、解題與促進思考等優點，基於此想法，本文之主要目的乃是要與讀者大眾分享數學寫作活動融入國三數學課室之我見我思。經過一年來的觀察，發現數學寫作不但能夠促進學生的溝通表達能力與啟發學生多元的想法，同時亦能逐漸增強學生解題及思考之流暢性。對教師而言，教師能從數學寫作中瞭解學生的想法或迷思概念，並提供教師省思個人教學方式以及改進教學之參考。

關鍵詞：數學寫作、國三、數學溝通。

壹、前言

許多的研究與報告皆指出，溝通是數學之教與學中一個很重要的過程，而其中特別強調「數學寫作」應該被視為數學學習中必要的溝通技巧之一（Baxter, Woodward, Olson & Robyns, 2002；National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000）。同時美國數學教師協會（NCTM）所出版之「學校數學課程與評量標準」一書中建議把數學寫作融入數學教學中，並強調二十一世紀的數學教育將特別強調溝通的能力，並主張學生應藉由數學寫作之溝通方式來幫助他們釐清自己的想法，加深他們既有之概念，以及協助他們連結新舊概念（NCTM, 1989）。此外，一些數學寫作相關之研究結果也顯示：數學寫作有助於提昇學生的數學解題能力（Baxter, et al., 2002；劉祥通、周立勳，1997）。

何謂「數學寫作」呢？數學寫作是指將寫作的活動融入數學課室中，以促使學生藉由寫作中對自己的數學想法做銓釋、反思、回顧、組織、連結，以進行統整的活動（Baxter, et al., 2002；Anderson & Little, 2004）。因此，數學寫作活動可以培養孩子發展更深一層的思考，學生可以藉由寫作以發現自己在想什麼？學到

了什麼？什麼是重要的？甚至透過寫作可以讓學生在學習的過程中，促進他們在程序性與概念性知識的瞭解，更可以幫助學生組織與統整數學概念。由此可見，數學寫作在幫助學生學習數學上扮演著重要的角色。綜合上述，數學寫作是一種幫助學習的催化劑，它不僅提供學生可以清楚地描述他們的感覺、想法與觀念的機會，並且也是學生與他人溝通的工具之一（Liedtke & Sales, 2001; NCTM, 2000）。

雖然數學寫作對於學生的學習具有正面的幫助，但目前將寫作應用在國中數學科教學中仍不多見。因此，本文之主要目的乃是要與讀者大眾分享作者將寫作活動融入國三數學課室中之我見我思。

貳、數學寫作融入國三數學課室之我見我思

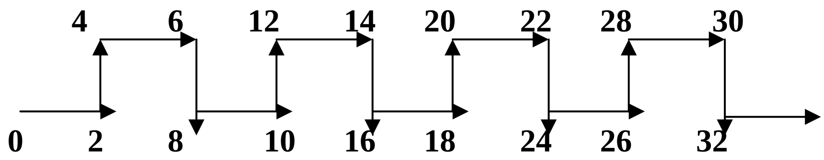
誠如美國數學教師協會所出版之學校數學課程與評量標準中對數學寫作之陳述：「數學寫作即是個人描述一個問題如何被解決，在這過程中可以幫助學生澄清她（他）們的想法與發展更深一層的理解（p. 26）」（NCTM, 1989）。因此，作者於過去一年將數學寫作融入國三數學課室中，藉由適當地運用數學寫作，鼓勵學生運用自己的話在數學的學習過程中表達自己的想法與心得，以達成溝通、組織與發展數學概念及解題技巧的目的。以下陳述數學寫作融入數學課室之我見我思：

一、學生表現

數學寫作的內容涵蓋相當廣泛，學生可以把他上數學課的心得，解題的想法與過程、解題所用的策略、解題錯誤的原因、課堂上無法理解的困惑之處全部紀錄下來，還可以紀錄自己已嘗試過的解題策略，作為將來重新思考的根據（Baxter, et al., 2002；劉祥通、周立勳，1997）。茲將數學寫作融入課室之我見呈現如下：

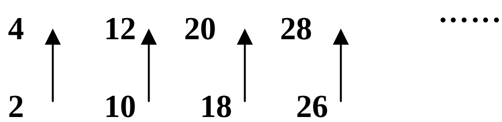
(一)寫作給予學生想像空間

在學習數學的過程中，學生的想法往往會出乎老師的意料之外。藉由寫作，學生可以盡情地發揮，表現他們的數學想法。例如：研究者曾在課堂上佈一則題目：已知某路徑圖以圖一的形式連續下去，試問數字 2002 到 2006 之路徑是何種樣式？



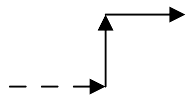
圖一：路徑圖

其中有一個學生的解法，如下：



所以，2002÷8＝250……2

其路徑圖為



圖二：學生圖解

此時，另一個學生也立刻將他的解法呈現出來：

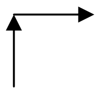
S：**我發現此圖形是每 8 的倍數一個循環，**

所以，2002÷8＝250……2

2004÷8＝250……4

2006÷8＝250……6

因此，其路徑圖為



圖三：學生圖解

(二)開放性的數學寫作可以幫助學生自創解題策略。

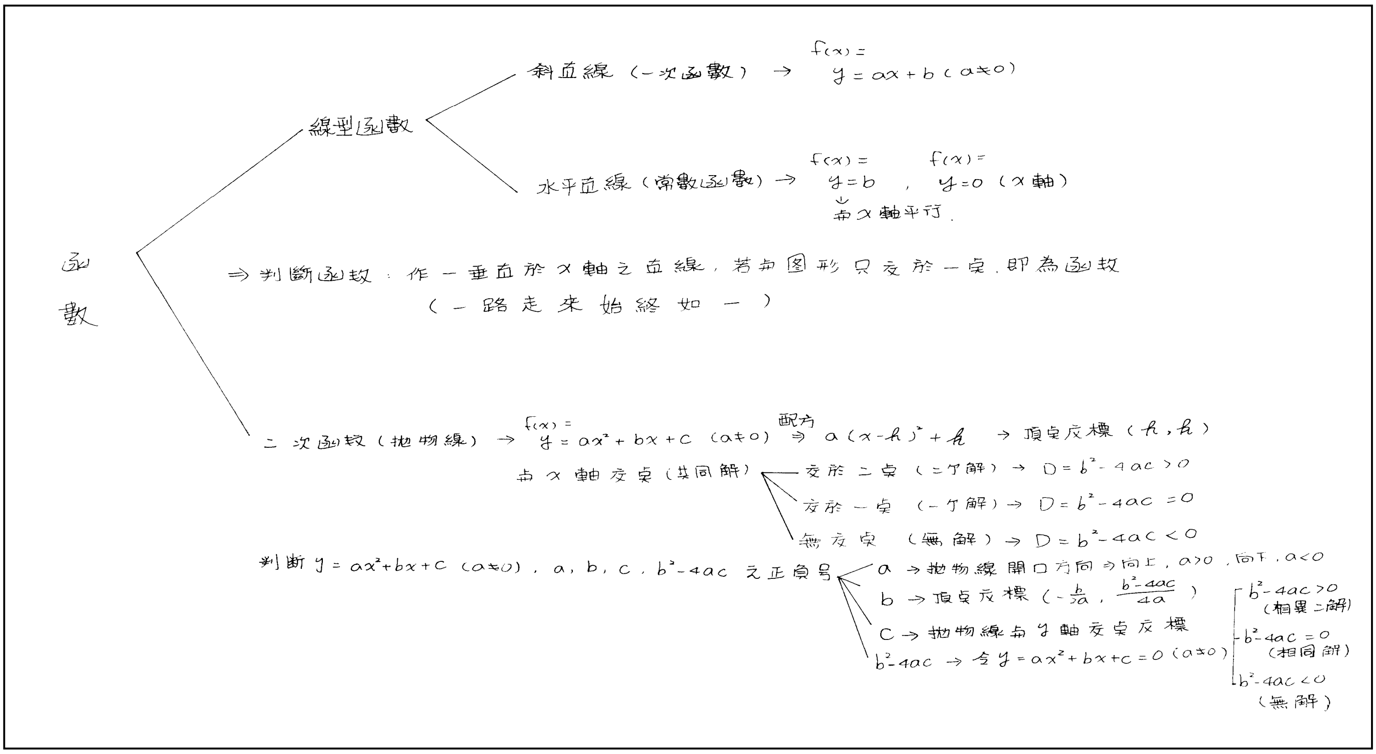
Kamii , Lewis 和 Livington (1993)提倡一種教學策略，避開算則的教學，鼓勵兒童創造自己的解題過程。他們的實驗發現：兒童以自創的算則學習後，學生對位值概念有更深刻的認識，也發展出較好的數概念。因此，鼓勵學生發展屬於自己的解題方法，尊重學生的想法，引導學生連結相關概念，對學生概念性的發展有很大的幫助。例如：在國中有一考古題：有個二位數，兩數之和為 9，將

此數之個位數與十位數交換後，相減的差為 27，求此二位數。**有一位學生的解法是這樣的：27÷9＝3…兩數的差，因為 9 為兩數的和，所以，9+3＝12，12÷2＝6，9－6＝3，因此，這兩數為 63 或 36。**

由此可知，藉由寫作讓學生能夠自創解題程序與計算算則，並幫助學生深入思考相關性的概念，進而促使學生發展多種不同的解題方法。

(三)數學寫作可以幫助學生組織、統整及連結各種不同的概念性知識與發展程序性技能的精熟。

研究者在複習函數概念時，要求學生寫下函數的相關概念（如圖六），發現學生能夠藉由數學寫作將所學有關函數的定義、圖形以及從函數延伸的一元一次方程式與一元二次方程式的概念重新作組織、統整與連結。

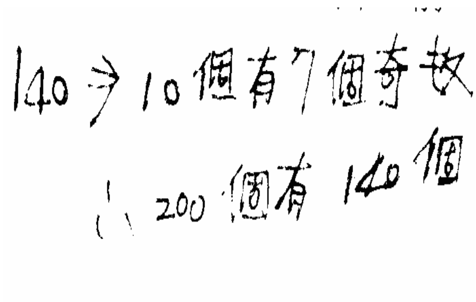


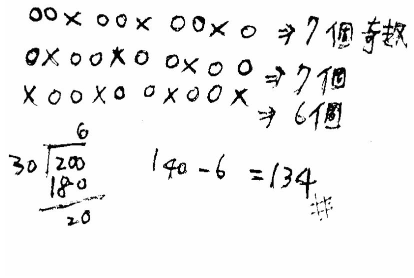
圖六：學生之解題表現

(四)幫助學生在學習的過程中紀錄自己的回顧、分析與反思，有助於學生後設認知能力的發展。

為了寫作，學生便會反覆咀嚼其想法，例如：在教導「樣式」單元時，曾在課堂上舉例：在斐波那契數列中（1, 1, 2, 3, 5, 8, 13……）請問前 200 項中，共有

幾個奇數？其中有一組學生的解法（如圖四）





圖四：學生修改前之解題　　　　　　　　圖五：學生修改後之解題

剛開始此組學生的答案是 140，因為他們一開始觀察到每 10 個數就有 7 個奇數，所以，他們認為 200 個數中就有 140 個奇數，但他們發現別組的答案與他們不同。於是乎，他們開始討論他們到底哪裡不對了，他們發現並不是每 10 個數就一定會有 7 個奇數，因為他們發現第 21~30 項中只有 6 個奇數，第 51~60 也只有 6 個奇數…….因此，他們最後修正了他們的答案（圖五）。

(五)成為師生溝通管道之一

課堂上，或多或少都會有比較不敢發言的學生，此時，寫作便變成老師與學生溝通的管道之一。如一位學生曾在數學日誌寫下：

> **『對我而言，以前印像中的數學即是算式，只需有正確答案即可，但是我往往弄不清楚這個「算式、正確答案」如何而來？為何這樣做？數學對我而言，很抽象，好像一本「天書」。但在數學寫作的過程中，我發現我必須思考、澄清每個觀念與步驟，並將其過程寫下來，在寫的過程中，慢慢地我可以一點一滴的將一些概念與想法串聯起來，我發現我愈來愈知道我在「做什麼」，數學已不再想像中那麼難懂了…』**

二、教師反思

數學寫作融入教學活動，不僅幫助了學生數學學習，更使作者本身有了更深一層的體悟。茲將數學寫作融入課室之我思呈現如下：

(一)幫助教師瞭解學生的學習情況

Etkina(2000)認為除非教師知道學生的想法，否則沒有辦法真正的進行教學；而教師如果要學生充分的理解概念，那麼就需要知道在每次上課前與上課後，學生的腦袋瓜子裡具備了哪些已有的知識以及發生了什麼樣的變化，而數學寫作可以讓學生的想法變得可見，也能讓學生學習到更紮實與更豐富的數學知

識，更可以讓老師掌握住學生的學習狀態，並可作為下一次教學時，學生先備知識的評估依據。

(二)幫助老師瞭解每一位學生的想法

在教學過程中，教師通常沒辦法一次兼顧所有學生的進度，但藉由數學寫作，教師較可以隨時掌握學生的學習情況，了解每一位學生的想法。過程中，教師應適時給於學生回饋，以及尊重學生自然的想法，以鼓勵學生將其想法與解題過程藉由寫作的方式以文字呈現，進而培養學生的自信心與探究的精神。

(三)作為評量與診斷的工具

寫作是教學過程的整合，學生可以寫下課堂上學到的心得，解題所用的策略，與本單元相關的概念；他們也可以寫下課堂上困惑之處，以及解題失敗時所嘗試過的所有解題策略。因此，在教學過程中，寫作也可作為一種評量與診斷工具之一。

(四)設計開放式的數學寫作

這一年來，作者對學生實施各種開放性的數學寫作，不僅能啟發學生多元的想法，也漸漸地感受到學生能夠獨立進行解題及思考。值得注意的是，在開放性問題的探索下，教師必須依據學生的個別差異，給予不同層次的支持與協助，以防低成就學生反而失去信心。

參、數學寫作實施原則之建議

雖然數學寫作能幫助教師教學及學生學習，但研究者發現要數學寫作融入課程中仍然存在著困難，如：對老師而言，將數學寫作融入於課室中可能會稀釋教學的時間，影響教學的進度；對學生而言，從「想」到「寫」的過程中，更是一項挑戰。因此，綜合 Baxter, et al.（2002），Countryman（1992），Miller（1991），劉祥通、周立勳（1997）及研究者本身多年來的教學心得，歸納出下面幾個教師進行數學寫作時須注意的原則：

一、教師應讓學生明白進行寫作的目的：主要幫助學生與老師清楚地了解學生的學習進度與學習的狀況。

二、設定寫作的時間並事先設計教學流程，這樣做，可以使學生明白整個學習的過程，不但便於做數學寫作的紀錄，而且也有利於數學概念的邏輯性發展。

三、要學生在開始上課前寫數學寫作，以便做好上課準備，並且有助於與以往所學習的內容作轉換或連結。

四、要學生在結束一個單元之後寫數學寫作，以便評估他們對課程內容的理解程度，或是了解他們對這單元課程的想法與感覺。

五、在進行數學寫作時可以給予學生寫作的相關提示語。

六、幫助不知如何寫作的學生並進行個別協助。

七、讓學生有機會討論與分享自己的作品，利用數學寫作來與別人進行溝通。

八、不要讓學生有分數壓力，要讓他們知道，有效的學習需要數學寫作的配合。

九、教師要有耐心，多給學生鼓勵。

十、透過數學寫作達到師生溝通與互動，也就是說，教師應對於學生的作品進行回饋，並修正自己的教學模式。

肆、結論

藉由教師將數學寫作融入數學課室之歷程，可發現學生會嘗試使用文字、符號、圖形等不同表徵方式說明自己的想法，透過解題過程，寫作可被用來有效的獲得知識，因此在要求學生寫作時，學生必須對要探討的問題有清楚的了解，概念才會更清楚；或許對於沒有數學寫作經驗的學生而言，剛開始的執行是困難的，但經由教師不斷的引導回饋下，多數學生漸能藉著日誌寫作檢視個人的思考歷程，反思及修正自己的想法，且當學生記下並反思他們的想法時，更增進其解題的能力，讓解題過程更有效率；教師也能從中得知學生的想法或迷思概念，提供教師省思個人教學內容，以評估是否進行補救教學或是個別的協助。故透過數學寫作將有助於改善解題技巧，增進數學認知，並再次評估個人所學得的數學知識，促使學生主動學習，乃是教師檢驗教學、學生自我學習監控的好方法。

參考文獻

劉祥通和周立勳（1997)。數學寫作活動－國小數學教學的溝通工具。*國立嘉義師範學院國民教育學報，3*，頁 239-260。

Anderson, M. A & Little, D. M. (2004). On the write path: Improving communication in an elementary mathematics classroom. *Teaching Children Mathematics*, 10(9), 468-472

Baxter, J. A., Woodward, J., Olson, D. & Robyns, J. (2002). Blueprint for writing in middle school mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8, 52-56.

Countryman, J. (1992). *Writing to Learn Mathematics.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Etkina, E. (2000). Weekly Reports：A two-way feedback tool. *Science Education* 84, 594-605.

Kamii, C., Lewis, B. A., & S. J. Livingston (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, 41, 200-203.

Liedtke, W. W. & Sales, J. (2001). Writing Tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(6), 350-355.

Miller, L.D. (1991). Writing to learn mathematics. *Mathematics Teacher, 84*(7), 516-521.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

通訊作者

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

“嚴謹與猜測”:學生數學觀一個悖論的“個案速寫”

孫旭花[1] 黃毅英[2]

[1]香港中文大學課程與教學學系博士生

[2]香港中文大學課程與教學學系

本文摘要

本研究通過對中國內地廣州 56 名小學高年級及初中學生，利用假設性數學問題情境和開放題,使個案產生的自然的數學行為和語言,從而進一步通過訪談,支持該“外顯”行為和語言之“內隱”觀念，進一步分析他們的數學觀念。研究發現學生數學觀存在一個悖論:一方面， 不承認猜測是做數學,不夠嚴謹,另一方面解題中用“猜測”,導致學生觀念上，心理上，文化上未達到猜測這一數學方法的一致認同，形成自相矛盾的觀念,這矛盾的觀念某種程度成為數學解題行為的“束縛”。

關鍵詞：猜測、廣州、悖論、初中學生。

研究意義和背景：

近十年來，“數學觀”的研究,受到很多重視,因為無論課程改革的出發點，教學實踐的關鍵,數學教育研究分歧要點都可以回溯到起源----“數學觀”的差異。“數學觀”是個體對數學行為的理解和感知的觀念建構（Schoenfeld,1992)。正如世界觀決定方法論一樣，數學觀決定“做數學”的方法，是做數學的“軟體”，影響數學知識“硬體”的組織獲取(Wittrock，1986)，及進一步數學成就的取得(Schoenfeld,1983)是數學學習的心理“監控中心”，自覺不自覺地指導數學活動的操作與篩選。

香港中文大學數學觀研究小組在數學觀的質化研究已取得一定成果（lam ,Wong, & Wong,1999,Wong,2000,2002）,本文試圖在此起點上，對國內學生數學觀有所破譯。

[1] 廣州大學數學系副教授

貳、研究方法步驟：

數學觀作為個人理念建構常常是繁雜微妙的，因此解譯學生的數學觀的研究也是繁雜課題，為聽到學生自然真實的聲音，再現學生真實的數學觀，我們的研究方法通過特殊的數學情境，這裏指問題處境（見附錄一）和開放題（見附錄二）（題目大多和書本上題目不同，例如, 王老師那班有 14 名女孩，24 名男孩，問王老師多少歲？【結論和條件無關的問題】）題目設計目的是讓學生產生認知衝突，令學生有話說，使個案產生的自然數學行為和語言，從而進一步通過訪談解譯支持該“外顯”行為和語言之“內隱”觀念, 因此不設計內容建構效度。研究理念如下，即：

問題處境 開放題	$\xrightarrow{\text{引發}}$	對數學認識的語言 問題解決的數學行為	$\xrightarrow{\text{訪談}}$	解譯支援該語言的數學觀 解譯支持該行為的數學觀

具體步驟如下：

（一）問題處境的設計。問題處境設計的目的不是揭示唯一正確的數學觀，而是以此為“引子”，引出學生對數學認識的真實看法，是研究數學觀的手段，而不是結果。（見附錄一）例如某生認為 Q1.1 估計報紙頭版的字數不是做數學？問其原因，學生的回答“若用行和列準確算出才是做數學”，揭示其對數學的看法和觀念。

（二）開放題的設計。開放題被認為是最能捕捉學生真實自然想法觀念的有效手段之一。我們按數學結構即代數結構、序結構、拓撲結構設計了一套條件開放、方法開放、結論開放。開放題目系統。（見附錄二）（題目主要取自蘇聯心理學家克魯捷茨基（1980）數學能力研究的題目, 研究目的为研究數學觀, 本文介绍研究一個較為有趣悖論的發現，開放題的設計目的不是为研究悖論，特此说明。

（三）選擇研究物件。選 56 個小學高年級及初一的學生，小學生四年級學生 16 名（沙沙小學[2]），小學生五年級學生 20 名（沙沙小學），小學生六年級學生 4 名（花花小學），初一中學生 16 名（花花中學），瞭解其學習數學的背景。

（四）事先聲名研究身份，並告之不是考試，解題前詢問對數學的興趣，談學習

2爲保密故，本文所引用的學校均爲假名，其中沙沙小學是省重點小學，花花中學是市重點小學，花花中學是市三類中學(一般中學)。

數學和其他科目的不同，以此熱身。每次選 4 個學生為一組，解開放題。每次兩小時後，以草稿紙的字跡、圖為工具深入訪談其思路、策略，從而瞭解其背後的思維及觀念。

（五）以問題情境及解題思路作訪談（避免影響學生思路，暗地錄音）。

（六）把錄音帶轉成文字作分析，形成結論。

（七）追加訪談。為驗證結論的有效性，針對結論再追加訪談，設計進一步訪談內容。

參、一個發現

（一）數學的嚴謹度被放大，猜測、估計不是做數學的方法

我們在問題情境訪談中發現，學生頭腦中的數學觀是十分確定的，對數學的刻畫也是統一的，即一致認為：數學是絕對精確的，絕對嚴謹的，猜測、估計不是做數學的方法。大部分同意上述數學觀念，下面是其代表性個案的回答。

暗示的數學觀	訪談實錄
數學是絕對嚴謹的，絕對嚴格的， 容不得絲毫錯誤和馬虎 猜測不是做數學 估計不是做數學	"Q3.1 小雲用彩紙拼成圓形賀卡,不是做數學用**圓規**才是,“**畫歪了**也不是做數學”（s5-14[3]） “Q1.1 估計報紙頭版的字不是做數學，因為不一定**精確**，不准就不是做數學”(G1-4) “Q2.1 姐姐說弟弟少 10 公斤也不是做數學，沒**準確**地量，只是憑生活經驗”（g5-3） “Q3.2 小華坐在車中看下雨也不是做數學，因為數不過來，**不夠准**，就不是做數學”（s4-11）

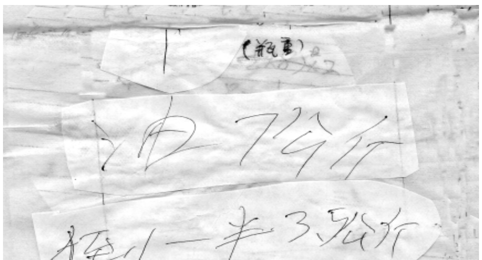
分析:由以上我們看到，學生對數學的嚴謹度相對課程與教學期望的嚴謹更為放大。**外顯**的語言暗示了學生思維中**內隱**的數學觀，即數學是絕對精確的，絕

[3]注：g6-1 表示花花小學六年級第一個學生；s5-7 表示沙沙小學五年級第七個學生;G1-3 表示花花中學一年級第三個學生

對嚴謹的，這種嚴謹與精確甚至把猜測估計，這一重要的數學思想方法排出其外。這和 Fleener（1996）的結論一致（Fleener,1996）, Polya（1954）在他的名著《數學與猜想》“數學家的創造性工作結果是論證推理，即證明，但是這個證明是通過**猜想**而實現的”。數學家高斯，曾說他的許多定理都是靠**猜想**而發現的，證明只是例行的手續(劉雲章，1991)。“**猜想**”作為數學創造的翅膀卻被學生排除于絕對的數學之外,說明學生在理念內部存在著觀念缺陷。從某種意義上,學生這種觀念的缺陷——數學的嚴謹度被放大，反映教材、課程內容呈現更多以嚴謹、演繹的科學邏輯體系方式,忽視“猜想-發現”數學思想的滲透,也揭示教師在教學中也缺乏對猜想這一基本數學方法的傳播。

由以上問題情境的訪談證實,學生數學觀的個案刻畫中並不承認猜測是做數學，那麼他在解題中是否用“猜測”；為研究此，我們讓學生解開放題，並把解題所有思路寫在紙上，並按此訪談，瞭解其內部思維及數學觀，得到以下線索。

（二） 猜測是學生“自然”的問題解決策略，然而學生觀念上，心理上，文化上未達到猜測這一數學方法的一致認識。

代表性解題思路	訪談	內部思維及數學觀
（代數結構-4-a）一油瓶 8 公斤，倒掉一半油後重 4.5 公斤,求瓶重？(s4-1)的解題思路如下 	“學生事先假定瓶重 1 公斤。” I：瓶重 1 公斤怎麼來的？ S：……說不清 S：只是猜試一下 （進一步請 A、C、D3 個同學，談一下對 B 思路的看法，A、C、D、一致看法，出人意料）“這是太笨的方法” “哪如寫出式子	直覺猜測是學生頭腦內部特有智力行動操作本能。 猜測是學生自然的問題解決策略 暗示學生觀念上，心理上，文化上未達到猜測這一數學方法的體認。 暗示猜測不是做數學，“列式求解”才是正確數學方法。 暗示數學的嚴謹來自考試的牽制。

	（算式）方便，再說考試也沒分，別人以為你抄的呢？計出來才精確”	
（代數結構-4-b）一停車場有 40 輛三輪車和小汽車，共 130 個車輪，則三輪車和小汽車各有多少輛？ (G6-2)的解題思路如下：**假設一**個數，各有 20 輛車 20*3+20*4=140 個，140 比 130 多 10 個車輪，一定四輪車多算了 10 個車輪， 所以四輪車 10 個（20-10） 三輪車 30 個（20+10）	I：你 20 輛車哪來的 S:猜，試一下吧，一下子想到 S：用 130 除 40 除不開……	猜測是學生內部思維的“有機因數” 直覺是做數學的特有的智力操作本能 “嘗試”策略是學生自然問題解決策略之一

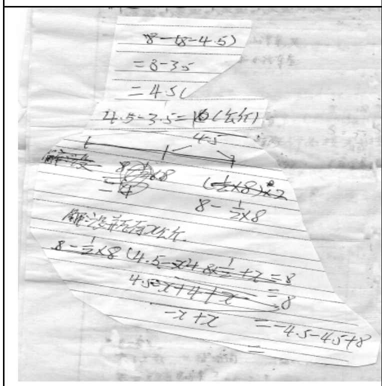
分析:由以上，猜測是學生內部思維“有機因數”,但並未與其數學“價值體系”融合,兩者呈游離狀態，一方面這受考試文化價值觀“斜傾”的影響(A、C、D、3 個同學認為考試也沒分）,另一方面也暗示教學體系，無論課程、教學、學習均未把猜測作為數學文化中最有創造力的有機因數進行“滲透”。具有直覺成份的猜測,與邏輯成分的推理是數學發現相輔相成的兩“翼”,然而多年來,具邏輯成分的分析、計算、推理、佔領數學教學的“主陣地”，直覺成分的猜測、估計幾乎無立足之地，從某種意義上，也是我國數學教育創造思維培養薄弱的原因之一。無論凱庫勤發現的苯閉合環狀結構，門捷列夫發現元素週期律，阿基米德發現浮力定律,牛頓發現萬有引力定律,愛因斯坦的相對論,無不依靠直覺成分的猜測,點燃靈感,獲得頓悟來實現的。這一點,值得我們數學教育工作者深深反省,“猜測”與“嚴謹”在教學、課程與教學中的“度”如何把握?律師案情猜測，歷史學家史料推測，經濟學家統計推理，物理學家實驗歸納，哪個離了猜測？

以上，我們看到猜測一方面是學生內部思維的有機因數，另一方面又被剔除于嚴謹嚴格的真理體系之外，形成自相矛盾的觀念體系，成為學生數學觀的“悖論”。若把數學觀作為引數，把數學行為看作關於數學觀這一引數函數的因變數，那麼數學觀，如何影響其數學行為？自相矛盾的數學觀，如何影響其問題解

決的行為？我們試圖觀察數學觀中具有這樣悖論的個案，其給定情境下的行為傾向。

（三） 自相矛盾的數學觀，某種程度，桎梏了數學應用於實際，桎梏自由地數學思維，數學行為傾向僵化”、“教條”。

訪談實錄（代數結構-4-b）	行為傾向
一班 50 人春遊，一車坐 13 人，共需幾輛這樣的車？ G1-5 的解題思路與訪談 S:除不盡怎麼辦? I:你得多少? S:得不出具體答案,原則上 50/13 I:這是真實的事,難道把車拆了? S:怎麼弄到**實際上**去呢? S:可是數學要求精確的,反正等於 4 不合題意,我們初中生要求精確,難道你們大學不用**精確**?(知道筆者任教大學)	數學是脫離實際的 數學要求精確嚴謹 數學行為傾向“僵化”,“教條”

S5-5 解題思路（代數結構-4-a）	訪談	暗示的行為傾向
	十分鐘還是作不下去 放棄後 I:為什麼不用算式，看到他**用算式已計出來**。 S:方程保准,老師說考試拿不准,就用**方程不會扣分.** I:開始你怎麼想的 S:我想用算式又怕不準**確**……	嚴謹,精確數學觀下的數學解題行為變得束手束腳, 數學思維“僵化” 數學行為極受考試觀牽制。

結論：由上我們看到自相矛盾數學觀。一方面在數學應用於實際情景中受

挫。這也和（Pehkonen, 1998）認為數學是絕對嚴謹真理體系的學生，在真實情境解題則有困難的結論相一致。另一方面，我們也看到該數學觀桎梏學生思維，在嚴謹精確的高牆不敢越雷池一步，(明明用算術方法會解，卻不了了之)，加上考試文化影響更是雪上加霜，悖離數學的本質在於自由自在的思考(米三國藏，1986)，剔除猜想的數學解題，如同折斷翅膀的飛翔，不僅在實際應用的前頻頻碰壁，在自由思維數學之林，只能舉步維艱。

綜上所述[4]：由以上學生數學觀中嚴謹與猜測悖論的刻畫，我們看到學生數學學習中觀念缺陷，及該缺陷數學觀對數學思維，數學應用的負面影響。誠然，嚴謹是數學的基本特徵之一，我們的教材、課程內容呈現更多以嚴謹、演繹的數學邏輯體系呈現, 但是兒童的數學學習更可能貼近, 直覺規律---“猜想-發現”, 猜測與估計最後還是需有嚴謹的過程加以證實推測或再修正, 這些在問題解決過程中，其實是一體的兩個方面, 但我們的數學教學, 如何兼顧學習規律和數學規律, 兩者的平衡, 形成和諧的觀念, 而不是悖論, 不束縛自由的思考, 使之更利於進一步的數學學習, 值得數學教育工作者進一步探討。

參考文獻：

Fleener, M.J. (1996). Scientific world building on the edge of chaos: High school students' beliefs about mathematics and science. School Science and Mathematics, 96(6), 312-319.

Lam, C. C., Wong, N. Y., & Wong, K. M. P. (1999). Students' conception of mathematics learning: A Hong Kong study. Curriculum and Teaching, 14(2), 27-48.

Pohkonen, E. & Torner, G. (1998). (Eds.). The state-of-art in mathematics-related research result of the MAVI activities (Research Report 195) (pp.11-36). Helsinki, Finland.

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Princeton: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H.（1983）Epsodes and executive decisions in mathematics problem-sloving , In R.lesh and M.landan (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic* Press, New York, pp.345-395

[4] 本文只是通过几个个案的访谈，发现上述结论，有待于进一步的量化研究确定该结论的广度。

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching (pp.334-370). New York: Macmillan.

Wittrock, M. C. (1996). Students thought processes In M. C. Wittrock (ed.), Handbook of Research On Teaching, Macmillan, New York, pp, 291-314.

Wong, N.Y. (2000). The Conception of Mathematics among Hong Kong students and teachers. In Gotz, S. & Torner, G. (Eds.). Proceedings of the MAVI-9 European Workshop, 103-108. Duisburg, Germany: Gerhard Mercator Universitat Duisburg.

Wong, N.Y. (2002). Conceptions of doing and learning mathematics among Chinese. Journal of Intercultural Studies, 23(2), pp. 211-229.

劉雲章 趙雄輝編（1991）數學解題思維策略 長沙: 湖南教育出版社 96 頁

克魯捷斯基(1980）：《中小學能力心理學》上海：上海教育出版社

通訊作者

孫旭花 香港中文大學課程與教學學系博士生 sunxuhua@cuhk.edu.hk

附錄一：

如果問小學生或初中生以下這些問題，你估計他們會怎樣回答？爲甚麼？

Q1.1 假設你喜歡閱讀報紙，有一天你買了一份報紙，並估計這份報紙頭版有多少字。你認爲你這樣做是否正在用數學？

Q1.2 哥哥喜歡畫畫，每天起床後，都用筆畫一個時鐘來顯示他昨晚睡了幾個小時。你說哥哥這樣做，是不是在做數學？

Q1.3 小平很喜歡同小狗玩。於是他整天都去隔壁小雲家看他家那隻小狗。你說小平這樣做是不是在用數學呢？

Q1.4 小明說一塊糖果的一半比三分之一好。你認爲小明這樣講，是不是在用數學或在做數學呢？

Q1.5 如果有一天你同桌拿出尺子來量他的書桌有多長。你認爲他是不是在用數學？

Q2.1 如果弟弟用計算器把 3 和 2 相加，然後得出 5。弟弟這樣做，你認爲他是不是做數學或用數學呢？

Q2.2 如果有一天有一位姐姐舉起弟弟，然後說弟弟一定比她輕 10 公斤。你說她是不是在用數學呢？

Q3.1 如果有一天小雲用彩紙拼出一個心形，然後做成一個賀年卡。你說小雲是不是在做數學呢？

Q3.2 有一天下大雨，小華坐在車中望著外面正在下雨的視窗。你說小華是不是在用數

學？

Q3.3　小明去食堂吃午飯，他發覺今天食堂提供四種菜，主食可選擇米飯、麵條或餅。你覺得小明去選午餐吃甚麼的時候，他是不是在用數學呢？

Q3.4　何先生每天外出前，必先收聽天氣預報，以估計用不用帶雨傘。你認爲何先生每天這樣做算不算在用數學呢？

Q3.5　小強和小珍在大會堂的旋轉樓梯拍照，照片沖洗出來後，他們發現這個旋轉樓梯看上去很像一條正弦曲線。你覺得他們看相片的時候，是不是在用數學呢？

附錄二：

Q1.　王老師那班有 14 名女孩，24 名男孩，問王老師多少歲？【結論和條件無關的問題】

Q2.　學校組織春遊，一輛車能載 13 人，全班 50 人需多少這樣的車？【與實際處境牴觸的問題】

Q3.　小明今年 4 周歲，今年是 2001 年，他出生在 1996 年年底，他活了多少年？【條件多餘的題目】

Q4.　用 25 根長度爲 3 米和 5 米的管子鋪設一段 135 米的距離，請提出問題。【提出問題的題目】

Q5.　一油瓶連油帶瓶 8 公斤，倒出一半後重 4.5 公斤，求瓶重？【方法開放的題目】

Q6.　某停車場有 40 輛汽車和三輪車，共 130 個輪，問每種車各有多少輛？【方法開放的題目】

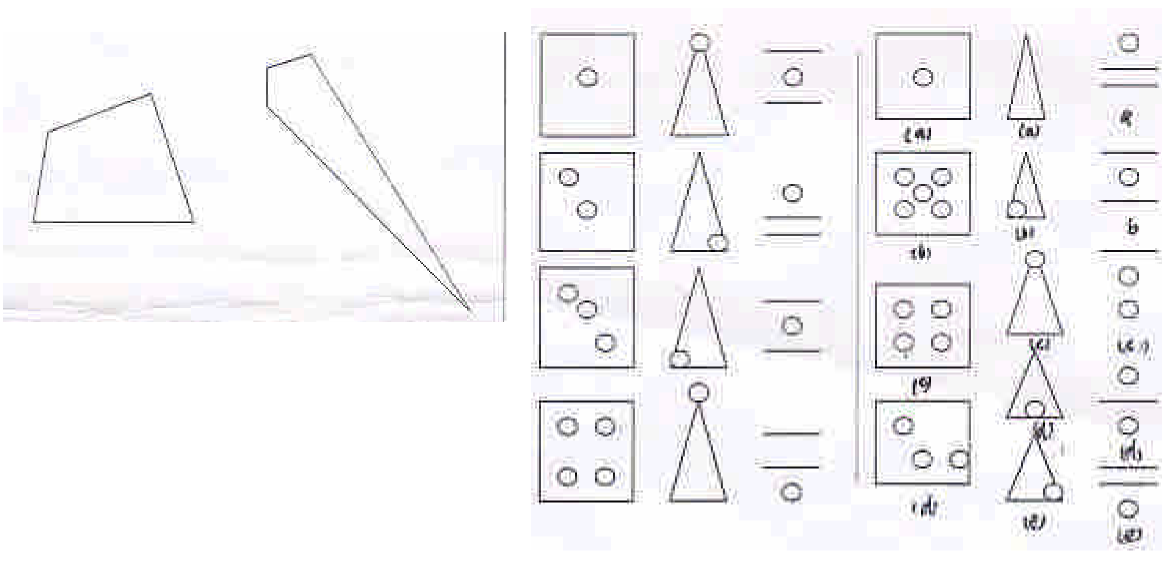
Q7.　兩個學生每人想賣一本書，當他們知道這本書的單價後，發現第一個人缺 24 元，第二個人缺 2 元，因此他們決定兩個人合賣一本，但錢還是不夠，問書的單價？每人各有多少元？【答案開放的題目】

Q8.　寫出 9, 8, 1, 7, 2, 6, 3 後面的四個數位。【測試數「序」的結構】

Q9.　已知兩圖形，底相等，高相等，面積等嗎？【測試空間想像，歸納能力拓樸結構】

Q10.　有四個圍棋棋子，扔在地上有時分散如下面左圖，有時稠密如下面右圖。請你想出幾個刻畫他們分散的辦法，並解釋。【測試「量化，結構化」能力、數學方法、思想精神運用情況】。

Q11.　從右側找出屬於左側的第五個圖形。【測試序結構能力】



解應用題的方法及教材認識上的不完善

戴恩清

湖北省宜昌市第九中學

本文摘要

分析應用題列方程。從理論層面看，被威權的高等師范院校教材認定為重要課題；從教材研究層面看，一直是眾多教材不斷探索，且還沒有取得完全一致結論的問題；從教學層面看，它既是長期困擾師生的難教難學問題，也是教學及教材研究專業人士時常解錯題的問題。為解決上述問題，筆者對分析應用題列方程的過程進行了深入系統研究。透過對大量解題過程的分析總結，發現了列方程解應用題的規律，並提出了新的解題策略。愿與讀者共享，並避免重新陷入一教材的認識誤區。

關鍵詞：應用題、代數式、方程、解題策略、教材缺陷。

壹、研究背景

對學生而言，學會解應用題非常重要，僅國中代數教材中，列方程與列不等式解應用題就至少出現了七次。實際中，解應用題既是長期困擾師生的難教難學問題，也是教材編寫者時常出錯的內容。從理論及教材研究層面看，早在 1990 年，華東師范大學出版的威權高等師范院校教材《中學數學教材教法》就曾指出，列方程解應用題是運用方程知識解決實際問題的重要課題（第二分冊，初等代數研究，P242）。1982 年以來，許多國中數學教材對列方程解應用題的方法曾作過不少探索。例如，1982 年 11 月第 1 版的民眾教育出版社（以下簡稱人教社）《代數》第一冊，在第 140 頁的表述；1988 年 12 月第 1 版的人教社實驗教材第一冊（上），在第 221 頁的表述；1990 年以來人教社（1990 年的實驗本、1992 年的試用本以及 2000 年的試用修訂本，表述都相同）《代數》第一冊（上）、第一冊（下）的多處表述；1995 年 6 月第 2 版（上海教育出版社出版）的上海地方教材，《數學》七年級第一學期，在第 13 頁的表述；2002 年 7 月第 2 版（北京師

范大學出版社出版）的北京師范大學國中課程改革教材，《數學》七年級上冊，在第 169 頁處所採取的，讓教師引導學生總結解題步驟的處理辦法。在高等師范院校教材中，有 1990 年華東師范大學出版的教材──《中學數學教材教法》第二分冊第 242 頁處的表述。上述教材的結論，有的詳，有的略，有的結論很具體，有的則比較概括，有的直接用黑體字寫出了結論，有的則採用了要求師生總結的辦法。不僅表述與處理模式有區別，更重要的是結論不盡一致。所以，從以上背景不難看出，對列方程解應用題的方法進行再研究是必要的。為了有利于師生克服難教難學困難，並使教材更傾完善，筆者從 1986 年起，對此課題進行了長期探索。透過對大量解題過程的深入系統研究，發現並總結出了列方程解應用題的規律，並在《列方程解應用題》（戴恩清，2000）、《對分析應用題列方程規律的探索》（戴恩清，2005）等個人專著與論文中，提出了以建立全部相等關係基礎（有的教材稱為等量關係）為前提的解題策略。這些策略，為幫助師生克服難教難學困難提供了新的借鏡，並促使人教社教材的解題錯誤得到糾正，2003 年 11 月，第 2 版的北京師范大學國中課程改革教材，《數學》八年級下冊，在教師用書的第 89 頁、第 90 頁處，都曾出現過與我解題策略相同的做法。為了增進教學交流，現將筆者的解題策略作一介紹，並對 1990 年以來人教社教材所存在的認識誤區做一分析。

貳、筆者解題策略

例 1 一隊學生去校外進行軍事野營訓練．他們以 5 千米／時的速度行進，走了 18 分的時候，學校要將一個緊急通知傳給隊長．通訊員從學校出發，騎單車以 14 千米／時的速度按原路追上去·通訊員用多少時間可以追上學生隊伍?[摘自人教社國中代數第一冊（上）P219 例 4，2000 年 5 月第 1 版，2000 年 7 月湖北第 1 次印刷]

經過分析可得相等關係

通訊員行進路程 ＝學生行進的全部路程 ①

通訊員行進路程 ＝ 14× 通訊員行進時間 ②

學生行進的全部路程 ＝ 5× 學生行進的全部時間 ③

通訊員行進時間＋18/60 ＝學生行進的全部時間 ④

（限于篇幅，分析過程略）

上述四個相等關係中共含有四個未知數，由“相互獨立的一次方程個數等于未知數個數時，方程組就有確定的解”這一數學常識可知，以上四個相等關係構成了完整的解題基礎。

解：設通訊員用 x 小時可以追上學生隊伍，則由相等關係②可列出代數式，通訊員行進路程是 14x 千米。類似的，由④得，學生行進的全部時間是（x＋18/60）小時，再由③得，學生行進的全部路程是 5（x＋18/60）千米。最後由相等關係①可列出方程，是

14x ＝5（x＋18/60）

把以上過程用綜合模式表示，就是

解：設通訊員用 x 小時可以追上學生隊伍，則∵

14x　　　　　　　　5（x＋18/60）

①

通訊員行進路程　＝　學生行進的全部路程

②＝　　　　　　　　＝③

14　　　　　　　　5

×　　　　　　　　×

通訊員行進時間＋18/60 ＝學生行進的全部時間

④

x　　　　　　　　x＋18/60

∴由①得

14x ＝5（x＋18/60）

上述列法中，相等關係②、③、④作了列代數式的根據，相等關係　作了列方程的根據。在上述列法裡，每一個相等關係被使用了一次，也只被使用了一次。

由此可總結出列一元一次方程的方法

（1）弄清題意，找出解題所需要的全部相等關係，找全的標準是：相等關係個數等于未知數個數。

（2）恰當確定一個相等關係作列方程的依據，其餘相等關係作列代數式的依據。

（3）用字母表示題目中的一個未知數。

（4）依據相等關係列出代數式。

（5）依據相等關係列出方程。

參、教材方法說明

一、 解題過程

分析：題中有這樣一個相等關係

通訊員行進路程 ＝學生行進路程

⑤

解：設通訊員用 x 小時可以追上學生隊伍，根據題意，得

$$14x = 5 \times 18/60 + 5x$$

（以上過程見教材 P219）

二、 總結的方法

列一元一次方程的方法

(1)弄清題意和題目中的數量關係，用字母表示題目中的一個未知數。

(2)找出能夠表示應用題全部含義的一個相等關係。

(3)根據這個相等關係列出需要的代數式，從而列出方程。

（以上方法見教材 P215 的黑體字）

肆、筆者對教材的簡析

一、 解題過程欠明確

教材解例 1 時，留下了不少懸念。如代數式 14x 是根據什麼列出來的，在過程中不明確，“根據題意，得”有些空泛。

教材解題時，雖然用到了相等關係②等條件，但這是在沒有明確意識到的情況下，用不明確、不具體的模式進行的應用。這樣的應用，不利於題目正確有效的解答，教師難教，學生難學的原因也與此有關。

二、 總結的方法易導致解題出錯

英國數學教育家貝利（Perry）指出：數學教學的目的要強調應用(引自中學

數學教材教法，第一分冊，總論，P20)。他的這一理念，對現代中學數學教學產生了深遠影響。美國著名數學家 P・R・Halmos 也說“數學的真正部分是問題和解”(引自中學數學教材教法，第一分冊，總論，P198)。解題能力的培養是中學數學教學的一項重要任務。但教材總結的解題方法，在正確有效的解題中卻不起作用，有時甚至導致解題出錯。

教材把不夠完善的列一元一次方程方法，擴散到列不等式解應用題中，得出了另一個不夠完善的方法。

教材總結的列不等式方法

（1）弄清題意和題目中的數量關係，用字母表示未知數。

（2）找出能夠表示應用題全部含義的一個不等關係。

（3）根據這個不等關係列出需要的代數式，從而列出不等式。

[見教師教學用書第一冊（下）P82]

按以上方法解題，教材曾連續兩次出錯。

例 3　把一堆蘋果分給幾個孩子，如果每人分 3 個，剩餘 8 個；如果前面每人分 5 個，則最後一人得到的蘋果數不足 3 個，求小孩的人數和蘋果的個數。[第一冊（下）P80 B 組第 3 題]

第一次出錯

答案：孩子的人數和蘋果的個數分別為 5，23；6，26；7，29；8，32；9，35。

設有 X 個孩子，列出的不等式是

$$3X+8 \leqq 5(X-1)+3$$

根據漢語中的“幾個”常指“10 個以內”，即得以上結果。

[見 2001 年元月印刷的教師教學用書第一冊（下）P187]

第二次更正時再一次出錯

答案：6 個孩子，26 個蘋果。

設有 X 個孩子，列出的不等式是

$$5(X-1) = 3X+8 \langle 5(X-1)+3$$

[見 2001 年 11 月印刷的教師教學用書 P188]

事實上，由 $5(x-1)=3x+8$ 得 $x=6.5$，所以，按教材更正時所列式子，只能得出 6 個半小孩，27 個半蘋果的結論。

顯然，這是不可思議的。但更令人不安的是，類似上面的錯誤在學生使用的許多書本中都存在，有鑑別和糾正能力的教師卻不多。產生這些現象的根本原因是沒有掌握正確的解題方法。所以，推展正確有效的解題方法不僅必要、而且迫切。

筆者的解答

仔細讀題並分析，可得以下相等關係與不等關係

蘋果總數＝3×孩子總數+8　①

前面那些孩子得到的蘋果總數＝5×（孩子總數-1）　②

最後 1 人得到的蘋果數＝蘋果總數 － 前面那些孩子得到的蘋果總數　③

最後 1 人得到的蘋果數＜3　④

最後一人得到的蘋果數 ≧ 0　⑤

解：設總共有 X 個孩子，則由①得

蘋果總數是 3X+8，由②得

前面那些孩子得到的蘋果總數是 5(X-1)，再由　得

最後 1 人得到的蘋果數是（3X+8）-5(X-1)

∴由④和⑤可列出不等式，並組成不等式組

$$(3X+8)-5(X-1)<3$$

$$(3X+8)-5(X-1)\geqq 0$$

$$\therefore \begin{cases} x>5 \\ X\leqslant 6.5 \end{cases}$$

$$\therefore X=6 \qquad 3X+8=26$$

筆者總結的解題方法

（1）弄清題意，找出解題所需要的全部相等關係與不等關係；

（2）用字母表示未知數；

（3）依據相等關係列出代數式；

（4）依據不等關係列出不等式（或不等式組）。

伍、 筆者的建議

一、 消除教材誤區

建議教材採用筆者的列一元一次方程及列不等式方法等表述，以避免教材表述所形成的認識誤區。

二、 明確告訴學生列代數式的根據與運算性

建議教材在列代數式部分，補充以下內容：（1）根據相等關係列代數式的例題與習題（具體可參考列方程解應用題一書的 P10 等處）；（2）明確總結出結論：列此類代數式的根據是相等關係，過程具有運算特徵。

三、 提供過程完整的解題範例

建議在教材中寫入必要數量的與筆者解例 1、例 3 過程類似的例題（但不硬行要求學生按筆者的解題格式書寫解題過程），為學生提供過程完整、具體、明確、直觀的解應用題範例，幫助學生入門。

參考文獻

1、趙振威等，《中學數學教材教法》（第一分冊，總論，1990 年 3 月第 1 版）、（第二分冊，初等代數研究，1990 年 6 月第 1 版），華東師范大學出版社。

2、民眾教育出版社國中教材代數第一冊（上）、第一冊（下）（試用修訂本），2000 年 5 月第 1 版。

3、戴恩清，《列方程解應用題》，湖北教育出版社，2000 年 10 月第 1 版。

4、戴恩清，《對分析應用題列方程規律的探索》，華東師范大學《數學教學》，2005 年第 2 期。

通訊作者

戴恩清 湖北省宜昌市第九中學 luckydwy@tom.com

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。

2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。

4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。

5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。

6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。

7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請 e-mail 至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw