ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第3期

台灣數學教育學會

2005年9月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2005 年 9 月出版
NO.3 2005

發行人： 林福來教授

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會
地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212
電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw
網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw
地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
國立嘉義大學數學教育研究所
電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：
1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 3 期

2005 年 9 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 3 期 2005 年 9 月

ISSN 1815-6355

TJMT 需要您

呂玉琴教授

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系主任

學會成立之初，即將出版數學教育的期刊列入工作重點之一，但基於人力之不足，學會在出版學術性期刊或推廣性期刊間作評估，部分理監事認為雖然台灣尚缺乏一本數學教育專屬的學術性期刊，但數學教育的研究者尚不缺乏發表論文的園地，但台灣的中小學教師卻缺乏一本可以交換數學教學心得、提昇數學教學品質、凝聚數學教育理念的期刊，這樣的想法很快的獲得理監事的共識，於是誕生了這本台灣數學教師期刊。

本期是本期刊的第三期，第一期只有一篇文章是中小學教師所獨力完成的，第二期則台灣、大陸各有一篇中小學教師的作品，本期已有二篇國內中小學教師的作品，希望這本期刊能漸漸的以台灣中小學數學教師為主角，所以 TJMT 非常需要中小學數學教師的參與。每一位中小學教師多少都有一些教學成效不錯的數學教學活動，希望教師們能將這些寶貴的教學活動寫出來和大家分享，即使寫出來的文章只有一、二頁，TJMT 都非常歡迎。

除了教學活動的分享外，TJMT 也很歡迎中小學教師能將您的數學教學問題或數學教育理念的問題、想法提出來，讓數學教育社群的成員共同來思考如何解決這些數學教學問題，或透過討論來達成數學教育理念的共識。例如在最近幾次的演講中就有小學教師問到 “七十幾，包不包括七十？”，“一隻青蛙 4 條腿，5 隻青蛙共有幾條腿？學生只能寫 4×5 嗎？寫 5×4 可不可以？” ，也有老師問到九年一貫數學學習領域暫綱與正綱的銜接問題，甚至問到暫綱和正綱為什麼難度差這麼多？諸如此類的數學教學問題或數學教育理念問題、想法、解決之道都在 TJMT 歡迎之列。

TJMT 出版的目的之一是介紹國內外數學教育的現況，因此，TJMT 需要大家提供您所知道的國內外數學教育的現況。例如 11 月份有台荷數學與科學教育研討會、國科會數學教育研究成果發表會，12 月份有國立教育研究院籌備處及台中教育大學二個有關評量的研討會等，這些數學教育活動的公告可以讓更多的人參與，這些活動的內容可以讓數學教育社群成員專業成長。希望 TJMT 在大家的協助與參與下，能對台灣的數學教育社群有更大的助益

同分母真分數加減運算的教學建議

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系暨研究所教授

壹、 前言

近年來我國的教育改革變動快速。2000 年教育部公佈的九年一貫數學學習領域暫行綱要，編輯委員站在國民教育為大眾教育的立場，強調應該讓 80%的學生能夠學會，能力較好的學生則可以補充額外的教材；加上制度的變革，使得數學學習領域的上課時數比以前少（參見表一），因此數學課程比八二年版及六四年版慢了一點。此舉讓一些關心國家競爭力的學者感到憂心。學者的分析發現，暫行綱要的課程比美國加州課程慢了一至兩年的時間，加上學者對坊間所謂建構式教學的疑慮，使得數學學習領域課程綱要修訂的編輯委員大幅異動。至 2003 年教育部公佈九年一貫數學學習領域課程綱要，其內容與暫行綱要的內容差異可謂相當大。依據研究者的比對，課程綱要的內容比課程暫行綱要的內容多了許多，且有些內容的教學時程又提前一至兩年的時程，例如有關分數除法的教學課程暫行綱要放在七年級教，課程綱要則放在六年級教，兩者相差了一年。兩者之所以有如此的差距，是課程綱要的編輯委員考慮到國際競爭力的問題，因此把數學教材的難度提升 到前五、六成學童學習為主(民生報，2003)，其他的學生則建議利用補救教學幫助學生學習。

表一：九年一貫與八二年版數學學習領域每週學習節數一覽表

年級	一	二	三	四	五	六	七	八	九
九年一貫	2~3	2~3	2.5~3.75	2.5~3.75	2.7~4.05	2.7~4.05	2.8~4.2	2.8~4.2	3~4.5
彈性節數	2~4	2~4	3~6	3~6	3~6	3~6	4~6	4~6	5~7
八二年	3	3	4	4	6	6	3	4	2+(2)

通訊作者：
李源順 leeys@tmtc.edu.tw

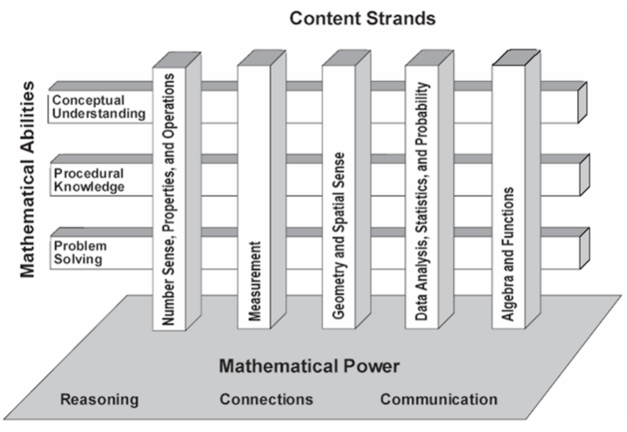
國科會為了因應此一課程改革，認為應有實徵的研究來支持國家課程的訂定，因此推動各數學單元的詮釋計劃。希望開發各單元的教學素材、教學活動、以及評量建議，做為課程改革的實徵資料與建議依據。

本研究在整個詮釋計劃的帶領下，負責分數四則運算單元的詮釋研究。本文則是有關同分母真分數加減法的相關研究成果。

本研究分析國內外相關教育與評量文獻(NAGB, 2002; 教育部, 2000，2003; 陳竹村、林淑君和陳俊瑜，2001; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002; Lesh, 1987)，發現同分母真分數加減法的教學素材與評量，應著重情境結構、語意結構、運算結構等數學內容，強調概念性知識、程序性知識與解題性知識等數學能力的培養，以及推理、連結、溝通等數學威力的培養。因此，我們設計了相關的評量活動，了解學生的概念之後，提出相關的教學活動建議。

貳、　教學素材

本研究探求可以做為研究理念的文獻，發現美國 National Assessment of Educational Progress [NAEP](NAGB, 2002)從 1996 年起到 2000 年、2003 年的數學教育成就評量，就提出數學內容(Content Strands)、 數學能力(Mathematical Abilities)、數學威力(Mathematical Power)三個向度的評量架構(參見圖一)。雖然它是一個評量的架構，但也適合做為教學的架構，因此，我們以此架構為基礎，做為探究同分母真分數四則運算的教學實驗理念架構。



圖一　　美國 NAEP 的數學評量架構圖

一、數學威力

現今數學教育的理念是要培養學生的數學威力(Mathematical Power)，因

此，美國 NAEP(NAGB, 2002)在 1996 年之後的評量架構增列了此一向度。此一向度的內涵，在我國九年一貫數學領域課程暫行綱要和課程綱要(教育部，2000，2003)中也可以看到。

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學威力是***學生有全面性的能力能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能進行數學的溝通；以及能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結***。因此，NAEP(NAGB, 2002)認為數學威力是由推理(Reasoning)、連結(Connections)和溝通(Communication)三個因子組成。

依據 National Council of Teachers of Mathematics[NCTM](2000)的學校數學原則與標準（Principals and Standards for School Mathematics)：

- ***推理是指學生能認知數學的基本內容，學生能進行探究與數學臆測，學生能發展對數學論證的評價，學生能選擇使用不同的推理和證明方法。***
- ***連結是指學生能理解並進行數學概念間的連結，學生能了解數學概念是環環相扣的體系，學生能在數學外的領域辨認和使用數學。***
- ***溝通是指學生能透過溝通強化數學思維，學生能和同學、老師及他人溝通他們的數學思維，學生能分析和評估他人的數學思維和策略，學生能使用數學語言表達他的數學概念。***

我們認為培養學生的推理、連結和溝通能力不是短暫時間內可以達成的，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們將探求一種可以在數學課室中培養學生數學威力的教學脈絡。

二、數學能力

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學能力可以看成學生在特定的數學知識內展現他的數學能力。數學能力指的是概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和解題(Problem Solving)三個因子。我國大學入學考試中心(林福來，1994)在進行學生試題分析時也採用此一數學能力做為分析的向度。

依據 NAEP(NAGB, 2002)的詮釋：

- ***概念性知識的了解是指學生能辨識以及利用模型、圖形、或符號等不同方式***

來表達出某一數學概念，或是舉出此概念的相關例子或是反例作為說明；此外，他應能知道一些數學原理（如加法原理、乘法原理）並將原理間做相互連結、比較、以及整合應用。

- *程序性知識是指學生能在計算的過程中，選擇適當的程序並正確解題；同時，能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確。*
- *解題性知識是指學生能從資料中逐漸辨識並形成問題;他能瞭解這些資料的充分性與一致性，並能運用相關知識、推理能力，以及採取適合的策略，來找出答案；同時，更能去驗證這些答案的合理性與正確性，並將之推廣。*

我們同樣認為學生的數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們，將探求一種可以在數學課室中培養學生數學能力的教學脈絡。

三、數學內容

美國 NAEP(NAGB, 2002)所強調的數學威力與數學能力都和數學內容知識息息相關。因為數學內容知識涵蓋數感、性質與運算，測量，幾何與空間，資料分析、統計與機率，以及代數與函數等範疇，本研究無法全部顧及，只能聚焦在數感、性質與運算範疇中的同分母真分數的加減法的內容知識方面。

本研究為了對同分母真分數的加減運算做適切的詮釋，除了找尋文獻中相關的研究之外，也探究相關的書籍和學者的觀點，了解應如何進行教學，以便提出詮釋的證據。

(一)　概念性了解

在同分母真分數加減法的概念性知識方面，本研究認為應該***連結***學生的舊經驗 -- 分數概念,讓學生了解同分母真分數加減法的概念性了解是運用分數概念來進行***溝通***。此時才能夠培養學生類化分數加減法概念為其它概念的學習，培養學生了解如何利用既有概念進行學習新概念的數學***推理***,連結既有概念與新概念，以及利用既有概念溝通新概念的數學威力；同時，培養學生概念性了解的數學能力。

1. 教學時程

在分數概念的內容知識方面，課程暫行綱要(教育部，2000)的第一階段(一

到三年級)能力指標 N-1-7 說明「在等分好、整體 1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能以真分數(分母在 20 以內)描述內容物為單一個物的幾份，並能延伸真分數的意義，進行同分母真分數的合成、分解活動(和<1)。」課程綱要(教育部，2003)的三年級能力指標 3-n-09 則說明「能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。」我們發現兩者對於教學時程的看法一致。

2. 情境結構

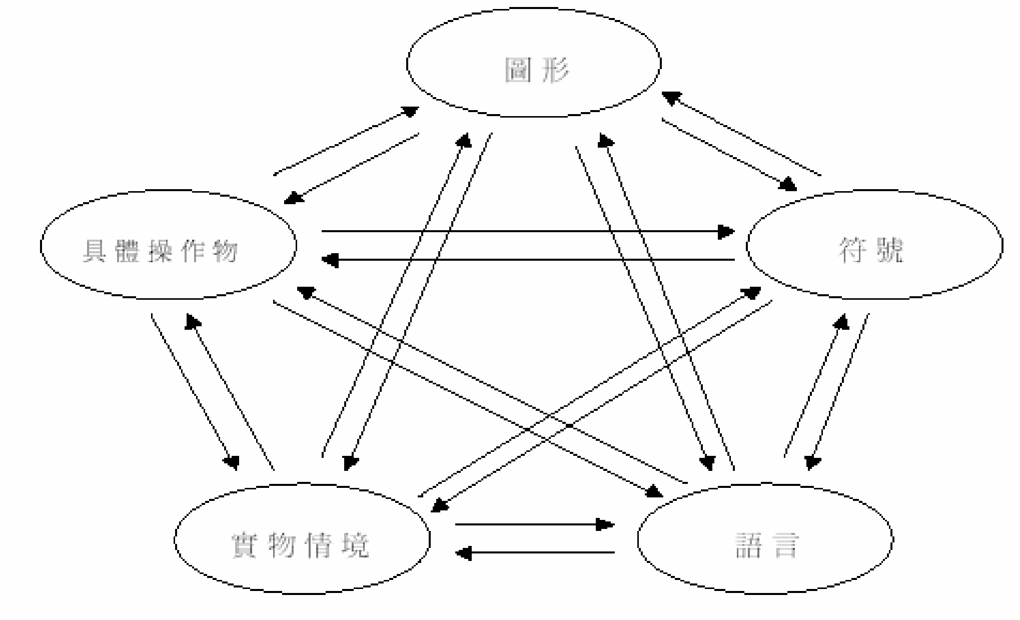
從學者們(Behr, Harel, Post. & Lesh, 1992；教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析，分數概念的教學的情境結構可以分成一維連續量、二維連續量、離散量等情境。

- ***一維連續量指像一一條繩子、緞帶、彩帶等在還沒分割前是一個整體的一維物件。***
- ***二維續量指像蛋糕、披薩等在還沒分割前是一個整體的二維物件（一般我們在畫圖時，都把蛋糕等用二維平面的圓形或方形替代）。***
- ***離散量指像一盒雞蛋有十顆等一開始即以離散的個物存在的物件。***

依據研究者的詮釋，***連續量情境是學生學習分數概念的合理情境***(一般分數概念都會先從二維連續量入手，一維連續量又可以連結到數線概念)，***離散量則是讓學生連結整數除法與分數概念***（即分數表示整數相除的意涵）***的合理情境***。因此，這些情境結構，在同分母真分數加減法概念的佈題上，我們認為有其重要性，應延續採用。

3. 表徵

表徵是將不同事物以不同種類符號來代表的歷程，就認知心理學的訊息處理角度來看，是指訊息處理的過程中，將訊息編碼轉譯成另一種形式，以便處理的歷程（張春興，1989）。學者（Bruner,1966；Lesh, Post, & Behr,1987；Kaput,1987; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno, 1987; 蔣治邦，1994）曾從不同的角度，對表徵加以區分。本研究認為表徵的應用應該著重在概念性的溝通上，因此採用 Lesh（1987）的表徵分類：實物情境、具體操作物、圖形、口語、符號。如下圖

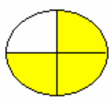
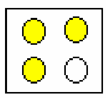


圖二 Lesh（1987）的表徵分類

Lesh（1987）的表徵分類可以讓學生經由實物情境、具體操作物、圖像等具體情境與人溝通分數加減法的概念性知識，再慢慢抽象化為口語、書寫符號等表徵。我國課程暫行綱要的編輯學者們(教育部，2000)認為分數概念的學習，實物情境與具體物操作適合低年級學生，當學生進入高年級以後已可以經由圖像表徵進行學習。

從學者們(教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析發現，在上述內容物與情境結構之上，對分數概念的口語、書寫符號等表徵可以區分為三種，以$\frac{3}{4}$盒蛋糕為例：

- ***可以從續連量的部份／全體(或離散量的子集合／集合)的觀點說成「把一盒蛋糕平分成4份，其中的3份」***
- ***可以從單位分數計數的觀點說成「3個$\frac{1}{4}$盒蛋糕」***
- ***也可以從強調單位量的觀點說成「一盒蛋糕的$\frac{3}{4}$」。***

至於圖像表徵方面，可以使用、、等方式來表徵。

(二) 解題性知識

本研究從文獻中探求分數加減法問題解題性知識的相關研究，發現這方面的研究不多。黃俊惟(2002)利用網路做為學生對分數加減法問題的擬題與解題進行探究。王瑞慶(2002)利用紙筆評量對國小六年級學童在分數加減法問題的解題行為進行探究，他將問題分為同分母和異分母等六類。周柏達(1998)曾問卷調查六年級學生在分數概念、計算、例行性文字題和非例行性問題的學習表現。

有學者(Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002) 從對整數加法的文字題進行有系統的語意結構和運算結構進行分類，但對分數加減法文字題的語意結構進行分類就沒有看到。

1. 語意結構

學者（Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002）將整數加減法文字題的語意分類為四種基本的型態：

- ***合併型（Combine）：兩量同時併存於語意之中。例如，小明有 7 顆糖果，小華有 8 顆糖果，請問兩人合起來共有幾顆糖果？***
- ***改變型（Change）：已有一量，再加入（或拿走）一量的語意問題。例如，小明王有 5 顆糖果，小華給了他 3 顆糖果後，小明現在有幾顆糖果？***
- ***比較型（Compare）：兩量比較的語意問題。例如，小華有 3 顆糖果，小明比小華多 6 顆糖果，請問小明有幾顆糖果？***
- ***平衡型（Equalze）：已有甲量，乙量再加入或拿走一量後，甲乙兩量相等的語意問題。例如，小明有 7 顆糖果，小華有 8 顆糖果，小明再多幾顆糖果就和小華一樣多了？***

Morales, Shute, Pelligrino(1985)針對三年級與五、六年級在不同的整數加減題型研究中發現，最簡單的是改變型問題，最難的是比較型問題。

語意結構的區分也影響著我國教育，如在 82 年版（謝堅、蔣治邦和林淑君，2002）以及課程綱要(教育部，2003)的整數教材中，都將整數文字題的語意結構區分成改變型、合併型、比較型、與平衡型等四類問題。但有學者(陳竹村、林淑君和陳俊瑜, 2001)的見解認為學生先前「在整數加減問題的經驗累積，使得學生已將這些問題（併加型、追加型、加法標準算式填充題等等）歸納為加法問題，故在分數加法問題中已不須要再分為併加型、追加型等(p32)」。

本研究認為整數加減法的語意結構也應該做為學習同分母真分數加減法，

甚至小數加減法的解題性知識的分類結構。同時，站在學科內連結的角度，我們認為學習應該有它的發展性與延續性。因此除了從分數概念的內容物的特性區分之外，也應該從語意結構做為區分，讓在低年級時未能充份了解比較型問題與平衡型問題的學生能在較高的年級有機會再一次學習。讓學生了解同分母加減法問題的題型和他先前所學的整數語意結構相同，而進行整數加減法與分數、加減法解題之間連結，讓學生可以利用舊經驗來進行問題的溝通與推理。

2. 運算結構

再者，學者們(教育部, 2003)發現「85 年後出版的教科書上出現的“算式填充題”一詞，算式填充題是一種較高階的計算練習，可以讓學生在解題時，對數與運算性質有更深入的理解，這是在國小引介算式填充題主要目的。同時，在解題時，把問題恰當表述成正確的算式填充題（或未知數算式)，對國小學生並不是容易的課題」。算式填充題可以區分為被***加(減)數未知、加(減)數未知以及和(差)數未知***三種情形。也有學者(教育部, 2003)將上述***“數”***的名稱改為***“量”***的稱呼，並分類如下：

- ***改變型問題***分為***起始量未知(即，加(減)數未知)、改變量未知(即，加(減)數未知)以及結果量未知(即，和(差)數未知)***
- ***合併型問題***分為***部份量未知(即，加(減)數未知、加(減)數未知)和總量未知(即，和(差)數未知)***
- ***比較型和平衡型問題***分為***基準量未知(即，加(減)數未知)、比較量未知(即，加(減)數未知)以及差異量未知(即，和(差)數未知)***

等三種情形。本研究用老師比較容易記的“數”的名稱（事實上用“量”的稱呼比較貼切)，稱為加減法的運算結構。

此外，我們從現今的教育理念得知學生應具有解答多餘資訊問題的能力，因此我們建議可以時放入一兩題相關問題，以了解學生的解題能力。

（三） 程序性知識

程序性知識的教學與評量也是重要的一環。我國九年一貫數學領域的編輯委員(教育部，2003)認為數學運算或計算並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算，係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作。這種透過理解並能將觀念與計算結合的能力，才是演算能力。某類

型數學問題演算的純熟，常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算亦是學童獲得新數學經驗的方法，新的經驗將會再形成學生下一階段新主題學習所需的具體經驗。

參、 學童概念

在評量學童的同分母真分數加運算概念時，一般考慮到的評量架構可以分為兩個維度。數學能力和數學知識(NAGB, 2002)。數學能力(NAGB, 2002)分為概念性知識、程序性知識和解題性知識。數學知識(陳竹村、林淑君和陳俊瑜，2001；謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)則是同分母真分數的加法和減法問題；它的變因如上面的素材分析，可以區分為分數的情境結構 – 一維和二維續量、離散量，加減運算的語意結構 – 合併、改變、比較、平衡型，算式填充題的運算結構 – 未知數在被加(減)數、加(減)數、和(差)，以及表徵(Lesh, Post, &Behr,1987) – 實物情境、具體操作物、圖形、口語、符號。(在紙筆評量時我們只能使用圖形表徵和符號表徵兩種)。

我們對同分母真分數的加減運算和相關概念進行文獻探討(教育部，2000，2003; Cramer & Henry，2002；龐嘉芬，2001；Herman, Ilucova, Kremsova, Pribyl Ruppeldtova, Simpson, Stehlikova, Sulista，2004；林碧珍，2000；呂玉琴，1991a, 1991b, 1993；黃俊惟，2002；王瑞慶，2002；周柏達，1998；Fuson, 1992；楊壬孝，1987, 1988, 1989; Lukhele, Murray & Olivier, 1999；)之後，認為三年級國小學童進行同分母真分數加減概念探究可以使用上述的評量架構做為教學活動設計和評量的架構。因為利用上述變因可以設計的題目太多，同時學生在一堂課的時間內不可能把所有題目做完，因此某些變因可以做為評量之用。但是將試題分成兩份試卷，仍未能測完所有變因。兩份問卷的施測樣本是立意取樣的對台北市、台北縣和台中縣某國小隨機取樣兩班學生進行施測，問卷一的學生有 200 名，問卷二有 190 名。由於學童在兩份問卷上相同應用問題上的答對率在 t-test上都沒有顯著差異，因此我們將它們合在一起進行分析。

一、程序性知識 – 計算題

在程序性知識的計算上面，我們出了四題 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ ，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ ，$\frac{73}{99}-\frac{37}{99}=$ ，

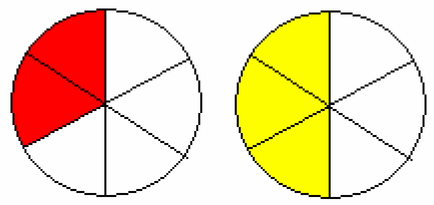
$\frac{17}{50}+\frac{28}{50}=$ 。其中試卷一的加法問題在前，減法問題在後，試卷二的次序如上。結果發現加法問題答對率 65%，減法問題的答對率 52%，兩者相差 10%以上，在統計上有顯著差異。經由答案分析發現，對於減法問題有 22%以上的學童用加法的方式計算（包括加法算對與算錯）。顯示學童沒有留意是加法問題或是減法問題。

此外，從數字大小來看學生的答對率發現沒有顯著差異。這表示學童在分數加減法的計算上，數字大小對他們沒有太大的區別。

在學童的迷思概念方面，加法問題主要出現在分母加分母與分子加分子的概念性迷思中約 20%。少部份學生只取分子相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 2+3=5；或看成小數相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 6.3+6.2=6.5；或將所有數字相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 3+6+3+6=17，等因沒有運用正確分數概念而產生的迷思（概念性迷思）。減法問題主要出現在上面所談的將減法問題看成加法問題(包含加法計算錯誤)。少部份學生使用分子減分子，分母減分母，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{0}$；分子相減時大數減小數，例如，$\frac{73}{99}-\frac{37}{99}=\frac{44}{99}$；分子相減，但分母相加，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{20}$；只取分子相減，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ 7-3=4；看成小數相減，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ 10.7-10.3=0.4，等概念性迷思。

至於學生加減法小心算錯的程序性迷思佔少部份。

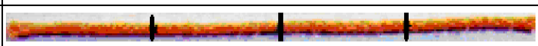
學童會有「分母加分母與分子加分子」的迷思，可能的原因是沒有考慮問題情境和分數的意義而將整數加減的概念過度一般化，以及考慮分數的意義但過份強調幾份中的幾份（沒有考慮全體量 – 一個）而受了圖形表徵(例如，畫兩個圓各塗 2 份和 3 份)的影響所致。



學童會有只取分子相加減的原因可能是老師過份強調部份量或者老師所“口述”的單位量（一個蛋糕）相對時間久遠而被學生遺漏掉所導致，例如，3塊加2塊等於5塊。因此，建議老師應強調「一個蛋糕平分成6塊，6塊中的2塊加上6塊中的3塊，就是一個蛋糕平分成6塊中的5塊」，同時運用圖形表徵讓學童理解。

二、程序性知識 － 文字題

對學童的學習而言，加法的併加型和添加型問題，以及減法的拿走型和併減型問題是一種基本的合成、分解題型，最容易被學童憶取與老師進行教學所列舉，因此，我們把它看成是程序性知識的文字題。

試卷	概念	圖形	內容物	具體抽象	維度	數字	答對率
1-09	爸爸拿一條彩帶綁兩個禮盒，他把這條彩帶平分成4段，用$\frac{2}{4}$條彩帶綁圓形禮盒，用$\frac{1}{4}$條彩帶綁方形禮盒，請問爸爸用去多少條彩帶？	無	有	連續	一維	小	57.5%
		併加型，和數未知:2/4+1/4=( )					
2-09	 爸爸拿一條彩帶綁兩個禮盒，他把這條彩帶平分成4段，用$\frac{2}{4}$條彩帶綁圓形禮盒，用$\frac{1}{4}$條彩帶綁方形禮盒，請問爸爸用去多少條彩帶？	有	有	連續	一維	小	65.8%
		併加型，和數未知:2/4+1/4=( )					
1-16	爸爸買了一箱橘子，這一箱橘子有100個，爸爸先送$\frac{32}{100}$箱給伯伯，後來又送$\frac{24}{100}$箱給伯伯，請問爸爸送給伯伯多少箱橘子？	無	有	離散		大	56.0%
		添加型，和數未知:32/100+24/100=( )					
2-14		無	無	離散		大	63.2%

	爸爸買了一箱橘子，爸爸先送$\frac{32}{100}$箱給伯伯，後來又送$\frac{24}{100}$箱給伯伯，請問爸爸送給伯伯多少箱橘子？	添加型，和數未知:32/100+24/100=( )					
10	店裏有一些年糕，賣了$\frac{3}{5}$盒年糕以後，還剩下$\frac{1}{5}$盒年糕，請問，店裏原來有多少盒年糕？	無	無	連續	二維	小	63%
		拿走型，被減數未知：( )-3/5=1/5					

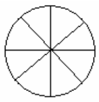
從上面五題，我們發現學童的答對率在 56%-66%之間，答對率不盡理想，顯示三年級學童對同分母真分數的加減問題，仍有待加強。此外，在語意結構方面，添加型、併加型和拿走型的答對率沒有顯著差異；在情境結構方面，一維連續量、二維連續量和離散量的答對率沒有顯著差異；第 1-16, 2-14 題看，內容物為單一個物和沒有內容物對答對率沒有影響。再從第 1-19, 2-19 題看，有沒有圖形表徵對答對率沒有影響；第 1-09, 1-16 題看，數字大小對答對率沒有影響。

在學生的迷思概念方面，發現犯了加法問題使用減法，或者減法問題使用加法的解性迷思學生佔 6%以內，顯示學生最大的錯誤仍然在分數加減法的概念性迷思。

三、解題性知識 – 文字題

由於學童比較少接觸比較型和平衡型的問題，因此，我們把它介定為解題性知識的文字題。

試卷	概念	圖形	內容物	具體抽象	維度	數字	答對率
1-13	 爸爸買了一盒蘋果送給爺爺吃，這一盒蘋果有 6 個，昨天爺爺吃了$\frac{2}{6}$盒，今天爺爺吃了$\frac{1}{6}$盒，請問爺爺今天比昨天少吃了多少盒蘋果？	有	有	離散		小	62.5%
		比較型，多吃，差數未知:2/6-1/6=( )					
2-13	爸爸買了一盒富士蘋果送給爺爺吃，這一盒蘋果有 6 個，昨天爺爺吃了$\frac{2}{6}$盒，今天爺爺吃了$\frac{1}{6}$盒，請問爺爺昨天比今天多吃了多少盒蘋果？	無	有	離散		小	66.3%
		比較型，少吃，差數未知:2/6-1/6=( )					
1-12		無	無	離散		小	57.5%

	小華的鉛筆盒裡只有鉛筆和原子筆,鉛筆盒裡有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆,有 $\frac{3}{12}$ 打原子筆，小華的鉛筆盒裏鉛筆比原子筆多多少打？	比較型，多多少，差數未知: 5/12-3/12=( )					
2-12	小華的鉛筆盒裡只有鉛筆和原子筆,鉛筆盒裡有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆,有 $\frac{3}{12}$ 打原子筆，小華的鉛筆盒裏原子筆比鉛筆少多少打？	無	無	離散		小	54.2%
		比較型，少多少，差數未知: 5/12-3/12=( )					
1-11	 班上慶生會，小明吃了 $\frac{2}{8}$ 個蛋糕，小華比小明多吃了 $\frac{1}{8}$ 個蛋糕，請問小華吃了多少蛋糕？	有	無	連續	二維	小	61.0%
		比較型，多吃，被減數未知: ( )-2/8=1/8					
2-11	班上慶生會，小明吃了 $\frac{2}{8}$ 個蛋糕，小明比小華少吃了 $\frac{1}{8}$ 個蛋糕，請問小華吃了多少蛋糕？	無	無	連續	二維	小	36.8%
		比較型，少吃，被減數未知: ( )-2/8=1/8					
1-14	爸爸拿一條塑膠繩綁圓形和方形的禮盒，他用 $\frac{45}{96}$ 條塑膠繩綁圓形禮盒，綁圓形禮盒的塑膠繩比綁方形禮盒的塑膠繩長 $\frac{18}{96}$ 條，請問爸爸用多少條塑膠繩綁方形禮盒？	無	無	連續	一維	大	26.0%
		比較型，比長，減數未知: 45/96-( )=18/96					
2-16	爸爸拿一條 96 公分長的塑膠繩綁圓形和方形的禮盒，他用 $\frac{45}{96}$ 條塑膠繩綁圓形禮盒,綁方形禮盒的塑膠繩比綁圓形禮盒的塑膠繩短 $\frac{18}{96}$ 條，請問爸爸用多少條塑膠繩綁方形禮盒？	無	有	連續	一維	大	41.1%
		比較型，比短，減數未知: 45/96-( )=18/96					
15	有一袋花片，紅色花片有 $\frac{48}{79}$ 袋，黃色花片再多 $\frac{13}{79}$ 袋就和紅色花片一樣多。請問黃色花片有幾袋？	無	無	離散		大	50%
		平衡型，再多，被加數未知： ( )+13/79=48/79					

從上面九題，我們發現比較型，差數未知的問題，不管是比多或比少的問題(1-12, 1-13, 2-12, 2-13)，答對率在 54%-66%之間。其中僅有 2-12 和 2-13 的答對率有顯著差異；兩者都是比少用減的問題，且 2-12 和 2-13 各有 16%和 8%的學童犯了使用加法的解題性迷思。

對被減數未知的比較型問題，比較量未知(又稱少吃用加型)的問題(2-11)和基準量未知（又稱多吃用加型）的問題(1-11)，答對率分別是 37%和 61%，有顯著的差異，且分別有 39%和 9%的學童犯了使用減法的解題性迷思，顯示少吃用加型的問題對學童而言仍有相當的困難。

對減數未知的比較型問題，比較量未知(比長用減型)的問題(1-14)比基準量未知(比短用減型)的問題(2-16)的答對率分別是 26%和 41%，有顯著差異，且分別有 46%和 27%的學童犯了使用加法的解題性迷思，顯示比長用減型的問題對學童而言仍有相當的困難。

至於被加數未知的平衡型問題(15)學童的答對率為 50%，介於少吃用加型的問題(2-11)和多吃用加型的問題(1-11)之間。

研究發現，三年級學童的同分母真分數加減問題的解題性知識方面，在比長用減(1-14)和比少用加(1-11)的問題答對率偏低，只有 37%-26%，仍有待加強。

四、概念性知識 – 文字或畫圖題

為了探究學童是否了解同分母真分數的加減法的概念性知識，我們設計了四個問題，期望學童能利用文字或畫圖的方式表達他們的了解。

題	概念	概念性		程序性	只寫算式或答案	算錯或空白
		畫圖	文字			
17	一條綠色積木和六個白色積木一樣長。$\frac{2}{6}$ 條綠色積木和 $\frac{3}{6}$ 條綠色積木合起來是多少條綠色積木？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？	25.3%	1.5%	4.4%	25.4%	43.3%
18	家裡有 $\frac{3}{5}$ 瓶牛奶，小英喝了一些牛奶以後剩下 $\frac{1}{5}$ 瓶，請問小英喝了多少瓶牛奶？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？	15.2%	1.2%	1.8%	29.7%	52.0%
19	請你用圖形或文字說明 $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ 的結果。	30.1%	0.7%	4.6%	20.1%	44.4%
20	請你用圖形或文字說明 $\frac{38}{50}-\frac{12}{50}$ 的結果。	8.8%	1.1%	8.8%	27.7%	53.6%

從 17-20 題的答題情發情形發現，只有 31%-10%的學童能夠用畫圖或者文字表達的方式回答他們對同分母真分數加減法文字題的概念性了解。大部份的學童(69%-82%)不是只給答案就是算錯。從概念性回答的學童中發現，大部份的學童較能使用圖形表徵的方式回答問題，同時對數字小的問題回答的情形比數字大的問題來得好。

肆、 教學活動建議

從上面三年級學童對同分母真分數加減法的答題情形和文獻探討，我們研擬了一份同分母真分數加減法的教學活動建議。

一、相關概念結構

整數的加減問題是學童第一個學會的合成、分解問題，同分母真分數的加減問題則是第二個合成、分解問題。學童必須跳脫以前兩個整數相加、減的框架，重新從分數的概念檢視同分母真分數的加、減問題，如此才了解為何分母相同時，分子相加的概念性知識，而免於誤入分母相加(減)和分子相加(減)的過度一般化的迷思。

從數學威力的觀點，學童的學習要連結既有的知識、經驗出發學習，此時學生便可以知道如何在課堂之中進行推理與溝通概念。因此，分數加、減法的問題概念學習應該承襲分數概念的情境結構和整數加減法概念的情境結構、四則運算的運算結構、以及概念學習的表徵結構。唯有如此學生才能學會概念性知識、程序性知識和解題性知識的數學能力。

在分數的基本概念方面可分為三，以$\frac{3}{8}$為例：部份／全體（或子集合／集合）-- 即一個物體平分成八等分，其中的三份；單位分數的計數 – 即 3 個$\frac{1}{8}$，以及一個物體的相對比率概念 – 即一個物體的$\frac{3}{8}$。其中前兩個概念可以做為同分母真分數加減法的概念性詮釋。

在承襲整數加、減法的語意結構方面，可以分為合併型(或稱併加、併減)、改變型(或稱添加、拿走)、比較型、和平衡型（及它們的變型）。

在四則運算的運算結構方面可以分為被加(減)數未知、加(減)數未知、以及和(差)數未知。

在概念學習的表徵結構方面，Lesh, Post, & Behr(1987)把它區分為具體物表徵、教具表徵、圖形表徵、口語表徵、符號表徵。

二、教學建議

從學童的測驗結果和教學素材分析，我們對於同分母真分數加減的教學有

如下的建議：

（一） 整合分數概念和整數加減概念進行教學

由於分數加、減法的概念學習承襲分數概念和整數加減概念而來，因此老師教學時若承襲將兩個概念整合進行教學，此時學童的學習脈絡會很清晰，他可以運用以前所學會的概念來學習新的知識，他的學習效果理應更佳。

再者假如有學童無法理解分數問題為何要使用加法或使用減法時，老師可以先連結以前整數加、減問題，一方面提醒學童它是先前概念的擴展，一方面檢驗學童的先前概念是否鞏固。若學童的先前整數加減的概念不是很穩固，因為他的年齡已稍長，理應更容易理解整數加減的概念，因此可藉此時機補救其先前概念，進而學習新概念問題。

假如學童不知道如何解釋分數加減的結果的概念，老師可以連結分數的概念，讓學童了解在詮釋加減結果的概念時，是運用他已學會的相關概念，也就是分數概念，加以解釋即可。當學童理解每個新概念的詮釋都有此脈絡可循時，學童的學習效能會增加許多。

（二） 留意概念一般化的時機

測驗結果顯示，有些學童會過度一般化整數加減而出現「分母加(減)分母，分子加(減)分子」的情形，因此老師進行教學時一開始應強調分數加減法概念的理解，同時給與更豐富的生活實例，直到老師有意圖的檢驗程度較差的學童都能使用分數概念來解釋分數加減的結果。否則學童的分數概念無法和分數加法概念相結合，很快就會退回到先前所學的概念，而產生運用整數概念來解決新的問題的迷思概念。

在同分母真分數加減法概念的一般化，我們認為理論上應有兩種途徑：(1). 運用許多連續量、連散量等情境讓學生了解，它都可以同一種同分母真分數的加減法算式表示；(2). 給與許多單位分數的內容物為一個個物、多個個物、甚至非整數個個物的情形，都可以同一種同分母真分數的加減法算式表示。但是第二種情形涉及等值分數或者學生更難以了解的概念，因此，我們建議老師至少要運用第一種情形讓學生能充分一般化。

(三) 強調表徵間的連結

依據 Lesh, Post, & Behr(1987)的表徵結構，老師在教學時，應強調實物表徵、具體操作物表徵、圖形表徵、口語表徵、符號表徵之間的連結，因為學童在學習同分母真分數的加減法題時，已是三年級了，此時學童已漸漸脫離需要實物與具體操作物的時期，因此老師在教學時可以同時加強圖形表徵、口語表徵、符號表徵之間的連結。同時也應讓學童了解，當老師在評量時，可以運用他在課堂上所熟悉的圖形表徵或者把口語表徵文字化來說明他所了解的概念,才不會出現上述大部份學生只寫算式，不知道如何表達他的概念性知識。

(四) 留意學童是否正確接收到教師所用的話語

測驗結果顯示，雖然有些學童可以使用分數概念來學習分數加減法，但由於他所接收到的訊息和老師所傳達的有差距而出現迷思概念。以 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 為例，雖然老師在教學時會強調「一個蛋糕被等份成六份，六塊(份)中的三塊(份)是 $\frac{3}{6}$」，但是學童可能只接收到「六塊(份)中的三塊(份)」，因此當出現兩個圓形圖時，學童就會想成是 12 塊(份)中的 5 塊(份)；或者老師在解釋時，雖然說：「一個蛋糕被平分成六塊，兩塊加三塊變成五塊」，但學童只接收到「兩塊加三塊變成五塊」，因此結果變成 3+2=5。當然也有學童不小心的連結到小數概念，而將分數轉換成小數來計算。

諸如此類的問題，我們建議老師在教學時，應該特別留意自己的話語學童是否正確接收到，以避免學童的迷思概念。我們建議老師在教學時也要適度的強調 $\frac{3}{6}$ 個蛋糕的意思是對一個蛋糕而言，或者也可以用另外一句話說「它是一個蛋糕的 $\frac{3}{6}$」。當然有些老師會認為後者的用語對三年級學童而言太過抽象。我們認同這一點，但是假如我們只是把它想成另一種用語，或者利用「$\frac{1}{2}$ 個蛋糕」是「一個蛋糕的一半」，也就是「一個蛋糕的 $\frac{1}{2}$」並將它推廣，或者學童就不是覺得太過抽象了。

（五） 加減問題混在一起教學

測驗結果顯示有 22%的學童在做減法問題時把它當做加法來做。為了避免有些學童看到加法問題，便以為往後的問題都是加法問題的迷思，或者加、減符號仍然不很清楚的學童有進一步澄清符號的意義，我們建議老師在進行教學時，不必一定要全部教完加法問題之後，再教減法問題，而應加減法的問題混合一起教，甚至先教減法問題也無妨。畢竟學童對於整數的加、減語意結構的概念已學習過，且加、減的概念是互逆的概念，此時不需有先後之分。

三、教學示例

我們建議老師在教學時，可以從復習舊概念、學習新概念、最後再進行課程的總結。

（一） 複習舊概念

老師進行同分母真分數的教學前，建議先複習分數概念，讓學生清楚的了解兩種分數的概念性說明方式。

佈題一：今天是小明生日，爸爸買了一個蛋糕，小明全家共吃了八分之三個蛋糕，請問八分之三個蛋糕可應該怎麼寫？又可以怎麼說小明吃了多少？（二維續量）

本問題主要的目的希望學生能將口語表徵「八分之三」轉換成符號表徵「$\frac{3}{8}$」。再者，也希望學童能在全班溝通討論的過程中，清楚的知道「八分之三個蛋糕」說法有三種，「一個蛋糕平分成八份其中的三份」，「三個$\frac{1}{8}$」，以及「一個蛋糕的$\frac{3}{8}$」。同時，不管老師是否使用實物表徵或具體操作物表徵，老師後都應該讓學生利用圖形表徵畫出來，讓學生能將分數概念與圖形表徵做連結。

由於本問題只是檢驗學生的分數概念，因此不需要在否等分的“實作”上打轉。所以學生在回答分數概念時，特別留意學生是否說出平分，必要時可以利用明顯不平分的圖示，製造學生的認知衝突。至於是否讓學生實作八等分切割，並無所謂，只要在切割不是明顯不平分即可，同時，老師也強調學童雖然沒有畫得很平分，但我們可以將其看成平分。

（二） 學習新概念

學生在進行新概念的學習時，老師的佈題應考量情境結構、語意結構、運算結構的變化，使學生在豐富的學習環境中成長。限於篇幅，本研究只提出幾個重要的佈題供老師參考，老師在實際教學情境中，可以適時依據上述教學素材進行變化，例如，變化為離散量的情境等問題。

佈題二：萍萍班上要佈置教室，她買了兩條一樣長的紅色和黃色緞帶，班上用了 $\frac{1}{10}$ 條紅色緞帶和 $\frac{3}{10}$ 條黃色緞帶佈置公佈欄，請問班上共用了多少條緞帶？你是怎麼知道的？(和未知的一維連續量的合併型加法問題)

本題故意使用兩條一樣長的緞帶，目的在引起對單位量（一條）不是很清楚的學生的認知衝突。***假如老師認為一開始便這樣佈題，對學生而言太難，老師可以在此題之前先佈一個二維連續量改變型的加法問題(例如，爸爸買了一個蛋糕回家，萍萍早上吃了 $\frac{3}{10}$ 個蛋糕，下午又吃了 $\frac{1}{10}$ 個蛋糕，請問萍萍共吃了多少個蛋糕？你是怎麼知道的？)。之後再進行此題的教學。***

我們認為培養學生的解題能力非常重要，所以建議老師可以先利用個別實作、小組討論、或者全班溝通討論的方式進行教學。個別實作的方式是希望學生能獨自思考，想到可以運用先前所學的概念 – 分數概念 – 進行解題。小組合作學習則希望學生在小組討論的過程中，討論出答案為何，又要如何解釋這個結果，同時也希望程度好的學生能從概念性的解釋方面教導低成就的學童。全班溝通討論則希望老師有意圖的要求特定程度的學生回答，以合理臆測有多少學生能自行解題。

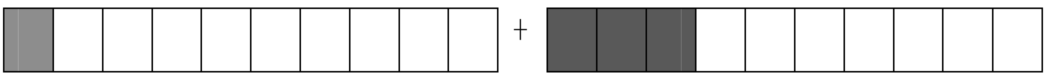
由於我國的社會環境，使得有些學生會先於老師教學之前就在安親班學到同分母真分數的加減法問題，然後太早就使用「分母相同，分子相加減」的口訣來回應老師。在此，我們建議老師應檢驗這些學生是否知道如何使用概念性的知識來回答問題。

無論如何，我們希望在討論的過程中能針對有迷思概念（$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{20}$ 或者其他迷思）的學生細膩的進行認知衝突，增強他的學習效果。當然要能讓這位學

生充份了解其迷思之處，以及正確的觀念為何，這樣才不會讓他產生學習的挫折，反而讓他感受到需要學習的內在動機。因此，老師應該把不同做法呈現在黑板上，然後讓有迷思概念的學生先解釋，再和其他正確回答的同學的答案對比或者回答，製造結果不同的認知衝突，然後在各自辯解的過程中澄清概念。了解清楚的了解他是忽略了單位量 – 一條 – 所造成的結果。假如學生一直堅持他的迷思概念，此時老師可以反問學生「$\frac{3}{10}$條」可以怎麼說？（連結所復習的舊概念），讓他了解是一條的$\frac{3}{10}$，而$\frac{4}{20}$則不一條的$\frac{4}{20}$。

老師在教過程中，也應讓學生了解「$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$」的解釋方式，其實就是利用分數概念來解釋的，也就是說，我們可以這樣回答「$\frac{1}{10}$條就是把一條緞帶平分成十份其中的一份，$\frac{3}{10}$條就是把一條緞帶平分成十份的三份，合起來是一條緞帶被平分成十份的四份，所以是$\frac{4}{10}$條」，也可以回答「$\frac{3}{10}$條就是 3 個$\frac{1}{10}$，所以$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}$就是 1 個$\frac{1}{10}$加 3 個$\frac{1}{10}$，就是 4 個$\frac{1}{10}$，或者利用分數唱數$\frac{1}{10}$到$\frac{4}{10}$」。

當然在進行教學時，老師也別忘了連結到圖形表徵，也就是畫出下圖（最好是由學生自己畫出以診斷學生的迷思），故意讓有迷思概念的學生犯錯，製造認知衝突。在全班溝通討論的過程中，老師應留意往往是概念正確的學生回答最大聲，把有犯錯的聲音給掩蓋著了。因此，老師若發現沒有人說答案是$\frac{4}{20}$條，可以在學生回答$\frac{4}{10}$條後，再提問有沒有不同答案的，然後等個一分鐘，並眼觀四方。我們相信老師會有驚奇的發現。



佈題三：一箱橘子有 65 顆，爸爸買了一箱，總共送出$\frac{54}{65}$箱的橘子給隔壁的伯伯家和阿姨家，其中送給伯伯家$\frac{26}{65}$箱，問送給阿姨家幾箱橘子？（加數未知的離

散量合併型減法問題）

因為利用運算結構、情境結構、語意結構所進行的佈題變化有許多種，我們不必每一種都佈題，可以留一些做為學生的學習成效評量之用。因此，老師可以視學生的學習情形，考慮否在佈題三之前再佈一些較為簡單的問題。

學生在解答佈題三的時候，是否要求學生先列算式，我們沒有太多的意見。因為即使學生列完算式充題之後，他的解題策略也應回到生活情境，了解將全部送出去的橘子扣掉送給伯伯家的橘子之後，就是送給阿姨家的橘子（因為這樣可以訓練學生的抽象思考能力）。

我們之所以運用較大的數字主要是因為，我們覺得較大的數字應該不會影響學生對題意的了解。即使較大數字影響學生對題意的了解，老師應明白的讓學生了解他可以把數字換成較小的分數，甚至是換成整數（也就是連結先備知識）來了解題意，然後可以了解如何解題。

我們之所以運用較大的數字的另一個原因是要讓學童了解當數字較大時，並不需要運用圖形表徵來進行解題，否則會畫得很累。此時，他便需要運用兩種分數概念(65 份中的 54 份，54 個$\frac{1}{65}$)來說明。

另外，我們也可以趁機了解學生在整數進退位問題是否出現困難。

佈題四：小明有$\frac{5}{12}$打鉛筆，小明比小華多$\frac{1}{12}$打鉛筆，問小華有幾打鉛筆？（減數未知的離散量減法問題）

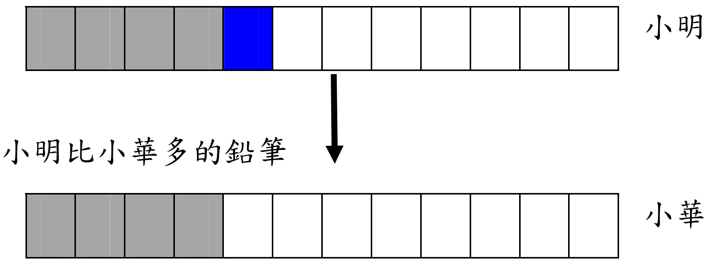
由於三年級學生應該可以了解比較型的問題，因此我們建議老師教學時應佈一些這樣的問題讓學生了解。當然，假如老師擔心有關比較型問題的佈題，一開始就佈這樣的問題，對學生而言太難，同時教學時間又允許的話，可以先佈一題差數未知的比較型問題（例如，小明有$\frac{5}{12}$打鉛筆，小華有$\frac{1}{12}$打鉛筆，問小明比小華多幾打鉛筆？）。

對於此時，老師可以視教學的目的讓學生個別實作練習，了解大約有多少學生還無法了解比較型的問題。對於這些學生，老師應讓學生了解，他應該連結先備知識，也就是把問題簡化為整數，然後利用整數來了解題意。假如老師發現

有些學生仍然無法了解簡化成整數問題的比較型問題，此時，老師應該利用圖形表徵讓學生了解題意。

當然，對於此數較小的比較型問題，老師也可以運用圖形表徵讓學生感覺更具體。

假如有同學問道，小華的鉛筆怎麼是小明的鉛筆（$\frac{5}{12}$打）去減掉小明比小華多的鉛筆（$\frac{1}{12}$打），此時老師應讓利用一對一對比的圖形表徵，讓學生了解它已經做了減法語意的推廣，也就是小華的鉛筆是和小明的鉛筆（$\frac{5}{12}$打）減掉（$\frac{1}{12}$打）鉛筆以後的鉛筆一樣多。



（三） **新概念的總結**

佈題五：一條綠色積木和六個白色積木一樣長。$\frac{2}{6}$條綠色積木和$\frac{3}{6}$條綠色積木合起來是多少條綠色積木？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？

在總結同分母真分數加減法的問題的同時，應該出一些檢驗學生是否了解概念性知識的問題，之後再讓學生察覺同分母真分數加減的口訣，並進行抽象的數字計算問題。因此，我們應佈一些類似佈題四的問題，讓學生個別實作，讓了解他只是把他知道的想法利用先前所學的圖形表徵，或者口語寫成文字而已。我們的研究告訴我們，學生很不喜歡在評量上寫太多的文字，因此，老師應該認同學生使用圖形表徵來表達它對同分母真分數加減法的了解。

另一方面，國際上的評量也會出一些類似要學生用文字表達他對概念的了解的問題，因此，我們也應讓學生了解他也應該有能力把他所知道的概念用文字表達出來。當然這樣的問題在一次的評量過程中，不應出得太多。

伍、 結語

假如老師們在教學之前，對教學素材進行類似本文的分析，然後在教學過程之中，在關鍵的地方讓學生發表他的想法、進行解題。我們相信在這樣的教學脈絡下，一定可以培養學生的溝通、推理、連結等數學威力、一定可以培養學生的概念性知識、程序性知識和解題性知識的數學能力。我們也相信在這個脈絡下，學生的學習是有發性的。

有關本文所提的教學建議，我們將在適當時機進行教學實驗。其實驗成果，他日再行發表。

誌謝：本文是國科會專題研究計劃編號：92-2522-S-133-002-的部份結果。感謝在本研究中所提及的所有參與教師以及學童們分享他們的學習經驗，有了他們的參與使本研究得以順利完成。文中論點為作者所有，不代表國科會。

陸、 參考資料

王瑞慶(2002)。***國小六年級學童在分數加減法問題的解題研究***。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。

呂玉琴(1991a)。影響分數概念表現的因素。***台北師院學報，4***，573-606。

呂玉琴(1991b)。分數概念：文獻探討。***台北師院學報，4***，587。

呂玉琴(1993)。影響分數二分之一概念的因素。***國民教育，33***，2-11。

周柏達(1999)。***國民小學數學科新課程實驗班與普通班分數學習表現之比較研究***。台北市：台北市立師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。

林碧珍(1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的 分數 概念。***新竹師院學報，4***，295-347。

林福來(1994)。***八十三年度基礎科目數學科試題研發工作計劃***。台北市：大學入學考試中心。

教育部(2000)。***國民中小學九年一貫數學學習領域課程暫行綱要***。台北市：教育部。

教育部(2003)。***國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要***。台北市：教育部。

陳竹村、林淑君和陳俊瑜(2001)。***國小數學教材分析 — 分數的數概念與運算***。

台北：國立教育研究院籌備處。

黃俊惟(2002)。***網路擬題練習在解分數加減法問題上之研究***。嘉義：國立嘉義大學碩士論文（未出版）。

楊壬孝(1987)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-76-0111-S-003-10）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝(1988)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-77-0111-S-003-09A）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝(1989)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-78-0111-S-003-06A）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

蔣治邦(1994)。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。出自台灣省國民教師研習會 91994)：***國民小學數學科新課程概說—低年級***。台北：台灣省國民教師研習會。

謝堅、蔣治邦和林淑娟(2002)。***國小數學教材分析 – 整數的數量關係***。台北：國立教育研究院籌備處。

龐嘉芬(2001)。***國小高年級學童分數概念與能力之研究***。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。

Bruner,J.S.(1966). ***Toward a theory of instruction.*** Cambridge, MA:Harvard University.

Cramer, K.; Henry, A., (2002) Using manipulative models to build number sense for addition of Fractions. In National Council of Teachers of Mathematics (2002). ***2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions.*** (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N.; & Belanger, M. (1987) .Pedagogical considerations concerning the problem of representations . In C. Janvier(Ed.), ***Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*** (pp.109-122). Hillsdale , NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K.C.(1992). Research on whole number addition and subtration. In D.A. Grouws(1992). ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp.243-275). Macmillan publishing company, New York.

Greeno ,J.G .(1987). Instructional representations based on research about understanding . In A.H. Schoenfeld (Ed.) , ***Cognitive Science and Mathematics Education*** . Hillsdale .

Herman, J.; Ilucova, L.; Kremsova, V.; Pribyl,J.; Ruppeldtova, J.; Simpson, A.; Stehlikova,N.; & Sulista, M.(2004). Images of fractions as processes and images of fractions in processes. ***Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, 4***, 249–256.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). ***Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.***19-26). Hillsdale, NJ: Erbium.

Lesh, R.; Post, T.; & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), ***Problem of representation in teaching and learning of mathematics*** (pp.33-40). Hillsdale,NJ:Erlbaum.

Lukhele, R. B.; Murray, H.; & Olivier, A.(1999). Learners' understanding of the addition of fractions. ***Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)***, Port Elizabeth, 5-9 July 1999.

Morales, R.V.; Shute, V.J.; & Pelligrino, J.W.(1985). Developmental difference in understanding and solving simple mathematics word problems. ***Cognition and Instruction, 2***, 41-57.

National Assessment Governing Board(2002). ***Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress.*** National Assessment Governing Board U.S. Department of Education

National Council of Teachers of Mathematics（2000）. ***Principal and Standards for school mathematics***. Reston:VA：NCTM.

「電算器」融入國中一年級數學課室之經驗分享

姜淑珍[1] 蔡鳳秋[2] 楊德清[3]

[1] 嘉義市玉山國中

[2,3]國立嘉義大學數學教育研究所

本文摘要

本活動主要目的在於探討電算器教學活動融入國一數學課室,對國一學生之學習態度與數學概念之影響。活動結果發現電算器不僅提昇了學生的學習動機與興趣也促進了學生主動探究精神,更建立與加深了學在在除法算則中,被除數、除數、商、餘數之間的關係,以及分數和小數之間的轉換之數學概念的有更深一層的瞭解。也就是說,適當地使用電算器作為輔助學生學習的工具,可以改變學生的學習態度,亦可幫助學生學習數學上觀念的瞭解與成長。

關鍵詞:電算器、數學概念、國一、教學活動

壹、 前言

隨著科技的進步,生活中隨意可得的電算器在我們的數學教育中扮演重要的角色(吳美蓉,2000;教育部,2000;Dunham & Dick,1994;Hembree & Dessart,1986,1992;Heid,1997;Smith,1997)。例如 Smith(1997)提出:使用電算器的學生,在計算和概念的了解會有較好的成就;Irwin(1997)的研究報告說明學生可以藉由使用電算器幫助學習分數概念;Higgins(1990)提到使用電算器教學,可幫助學生建立π的概念;Goldenberg(1991)、Huinker(1992)則指出電算器可以用來幫助學生建立小數概念。綜合上述,這些研究提供了廣泛而正向的支持使用電算器輔助數學教學不但可以提升學生學習數學的興趣,同時對問題解決及觀念性的理解均有正面的幫助。

研究者班上部分學生對被除數、除數、商、餘數之間的關係依然不是很清楚,例如:「7÷2=3…1」對於此算則大部分的學生能夠很易地說出「將七顆糖果分給

通訊作者:
楊德清 dcyang@mail.edu.tw

二人，則每人可分 3 顆，最後剩下一顆；即可用 7÷2＝3…1 表示」，但是，如果將此算則轉換成「7÷□＝3…1，則□＝？」雖然仍有多數的學生很快的將「□＝（7－1）÷3」算出來，但問其為什麼這樣做，其答案卻是「除數＝(被除數－餘數)除以商」，學生，背誦公式儼然已成為學生唯一解題的方法。因此，看似簡單的除法算則，它背後所代表的涵義對國一學生而言，仍然隱藏著許多迷思概念。‘故為了喚醒學生學習數學的熱情，也為了讓學生對於在除法算則中，被除數、除數、商、餘數之間的關係，分數以及小數之間的轉換有更深一層的認識與了解，本活動將電算器融入課程教學，希望藉此提昇學生學習動機、態度與興趣，並透過電算器的使用，以符號表徵模式內的轉換，將分數、最簡分數以及小數作符號轉換，進而激發學生學習潛能。基於此，本活動之主要目的包含以下二點：

一、 探討電算器教學活動融入國一數學課室，對國一學生學習態度之影響。

二、 探討電算器教學活動融入國一數學課室，對國一學生數學概念之影響。

貳、 活動設計內容與理念

一、活動對象

本活動以嘉義市某國中一年級某班學生為對象，該校位於嘉義市西區，全校共 29 班，一年級有 8 班，該班學生共有 40 位。且該班男生在數、理方面的表現呈現較佳狀態，而全班的數學成績呈常態分布。該班學生上課非常活潑，討論風氣盛行，上課發言非常踴躍，與數學老師的互動相當良好。

二、教學活動

1. 教學目標：

(1) 透過電算器的使用，以符號表徵模式的轉換，建立學生在除法算則中，被除數、除數、商、餘數之間的關係，以及分數和小數之間的轉換之數學概念。

(2) 透過電算器的使用，讓學生觀察一連串的相關題目，促使學生能更進一步發現這些題目的型與規律(pattern)。

2. 學習單：研究者所設計之教學活動共分兩份學習單【如附錄】，說明分別如下：

(1) 學習單一(發現新大陸):讓學生親自觀察、操作【TI-Explorer Plus】電算器與一般電算器不同之處,且讓學生分別找出此電算器按鍵的功能,並加以紀錄下來。

(2) 學習單二:藉由電算器,讓學生用不同的方式(例如:分數、小數)來呈現商與餘數,並讓學生用不同的情境問題來陳述算則的意義,藉以幫助學生更能了解被除數、除數、商以及餘數之間的關係。

3. 電算器:本活動所使用的電算器為 TI-Explorer Plus。

4. 教學活動的設計理念:本教學活動是參考相關文獻資料(Williams & Bright, 1998)所設計出的電算器教學活動,其設計的精神是利用電算器引發學生的學習興趣與探究的精神、透過電算器的使用,以符號表徵模式的轉換,建立學生數學概念、利用電算器可以快速計算的特質,讓學生觀察一連串的相關問題,鼓勵學生從中發現其關聯性,並促使學生能更進一步發現這些問題的型與規律。

參、 活動歷程之探討

本文活動可分為二個部分呈現,分別是學生學習態度的轉變與學生對數學知識的建立,呈現如下:

一、學生學習態度的轉變

(一)提高學生的學習動機與興趣

當班上學生每個人手裡拿著電算器那種興奮與新奇的氣氛流竄著全班,有別於平常一般上課,學生一邊忙著探索著電算器,一邊也急於與同學、老師分享著其新發現,學生上課的動機與興趣似乎已逐漸地被挑起。

S5:老師,這電算器與我們一般所使用的不同耶!而且上面有一些按鍵我都沒有看過,真好玩!

S26:老師…..隨便按,會不會爆炸…..(全班笑聲四起)

S39:老師,這一節課真的可以使用電算器去解問題嗎?不要騙我喔….

(此時學生一邊說話,手也忙著在操作電算器)

從學生 S5、S26、S39 與老師的對談中發現學生對於電算器充滿好奇與興趣，對於這次的上課內容，幾乎都抱持著躍躍欲試的態度，每個人皆以期待的心情來面對。過程中，可以明顯感受到班上的學生，數學學習的動機與態度轉變為更加積極。此正呼應先前之一些活動結果：電算器融入數學課程中不但可以引發學生的學習意願，同時可以提昇學生的學習動機（Heid, 1997; Hembree & Dessart, 1986, 1992; Waits & Demana, 2000）。

(二)促進學生主動探究的精神

當學生已慢慢熟悉電算器後，他們似乎也發現到電算器上一些特殊按鍵的功能，他們發現利用電算器可以將平常所學的一些數學符號直接做轉換，或者可以利用電算器直接算出除法算則的商與餘數等等，有別於一般上課時只能用紙、筆換算，這種新鮮感更促進了學生主動探究的精神。

S17：老師….我發現啦！「$\frac{1}{5}$」可用「$\frac{1}{X}$」轉換喔。

T：很好，那…「$\frac{2}{5}$」呢？

S17：等一下…我找找看….找到啦！「/」就可以了。

S21：我了啦！！！（正處於興奮狀態）「INT÷」可呈現商與餘數喔。

S40：好厲害喔…..分數與小數之間的轉換可以直接利用「F⇔D」耶，真神奇…（欲罷不能的表情）

當每位學生人手一台電算器時，老師並未告知學生電算器上按鍵的功能，然而從學生(如 S17、S21、S40)的反應中可清楚發現他們在好奇心的驅使下，不斷地嘗試與探索電算器按鍵上的功能。因此，學生主動探究的精神逐漸被引起。此正呼應了先前的一些研究報告：將電算器適當地融入於數學教學中不僅讓學生樂於學習數學而且對於學生學習的態度與精神也具有正面效果(Dunham,1996; Ellington, 2003; Jones, 1996)。

(三)增加對電算器的使用信心

在學生的學習過程中發現，學生對電算器似乎還是存著些許的懷疑態度，因此，藉由進一步佈題讓學生透過電算器的再次操作，解決心中對電算器的存疑，

進而獲得對電算器的信任。

S14：老師，這台電算器會不會突然秀逗？

S19：對阿！！我也覺得不怎麼安全耶…..

T：那你覺得該怎麼辦呢？

S14：嗯…多試幾次囉。

S19：哈哈哈…如果不準確，多試幾次也沒用。

T：舉例說吧，你覺得$19\frac{3}{40}$**介於哪倆數之間呢？**

S19：讓我想想…$19\frac{2}{40}$**與**$19\frac{4}{40}$**，曉得了，那**$19\frac{3}{40}$**的小數應該介於 19.05 與 19.1 之間，嗯…那我就可以大概知道電算器有沒有出槌了。**

T：讚！！！（露出欣慰的表情）

學生對電算器雖充滿了好奇心，但電算器對他們而言仍是陌生的，因此他們對電算器仍存著些許不信任。從 S14、S19 與老師的談話中可發現，老師可透過再次驗證電算器的功能以幫助學生進行解題，讓學生對電算器的使用不再感到懷疑，甚至信任其功能。

二、學生對數學知識的建立

(一)學生對於「＝」與「 ≒」概念更清楚

當學生在完成學習單二的過程中，發現某些除法算則無法除盡，因此，只能取大概的值，且利用電算器按鍵轉換的功能，發現這些數無法轉換回原來的分數；而可以整除的數卻可以轉換成原來的分數，在這學習的過程中，學生對「等於」與「近似值」的觀念更加清楚。

S29：老師，「24÷7」不能除盡….那，小數那一格要寫多少？

T：嗯…寫到小數第二位。

S29：老師，為什麼「3.43」不能利用「F D」轉換為原來的「$24÷7=\frac{24}{7}$**」？**

T：你認為呢？

S29：(想了一下)，啊~~~我知道了，因為「3.43」是「$\frac{24}{7}$」的近似值，所以……

T：那你想想….「2.625」可不可以利用「F↔D」轉換呢？

S30（S29 之夥伴）：我知道….可以，因為「2.625」＝「$2\frac{625}{1000}$」….

從學生 S29、S30 利用「F↔D」按鍵將分數與小數之間作轉換，卻發現有些分數與小數之間的轉換可以互換回來，但有些卻不行，在這討論的過程中，更加瞭解了「＝」與「≐」概念之意義。

(二)利用分數與最簡分數之轉換過程，加深學生對公因數與等值分數的概念

當學生利用電算器在完成學習單二中分數與最簡分數之轉換過程中發現,若將分數利用「SIMP」漸漸地轉換成最簡分數，再按「X↔Y」鍵而其中間過程所呈現的數字為分子與分母的公因數；而在這漸漸轉換成最簡分數的過程中，所呈現的分數值均相等，因此，學生對公因數與等值分數的概念更加深刻。

S11：老師，我知道了，利用「SIMP」、「X↔Y」可以很快的知道分數在化成最簡分數時，分子與分母同除以的那個數喔…..

T：例如呢？

S11：$2\frac{625}{1000}$利用「SIMP」可轉換成$2\frac{125}{200}$,再按「X↔Y」會出現 5，

T：那「5」代表什麼意思呢？

S11：「5」是分子「625」與分母「1000」的因數，也就是「5」是分子與分母的公因數。

S13：老師，$2\frac{625}{1000}$利用「SIMP」可轉換成$2\frac{125}{200}$,再按「SIMP」鍵又可出現$2\frac{25}{40}$，再按「SIMP」鍵最後可出現最簡分數$2\frac{5}{8}$。

T：那你覺得這些分數有什麼關係呢？

S13：這些分數都相等ㄚ….

T：為什麼？

S13：因為它們只是將分子分母同除以同一個數而已，而且再轉回來其最簡分數還是一樣…..

T：有沒有其他的看法呢？

S11：老師…這些分數 $2\frac{625}{1000}$ **、** $2\frac{125}{200}$ **、** $2\frac{25}{40}$ **、** $2\frac{5}{8}$ **我也可以用「F ↔ D」將它們都轉換成小數，而且它們的值都等於 2.625，當然這些分數的值都相等。**

從學生 S11、S13 與老師的對談中可發現學生透過「/」、「F ↔ D」、「SIMP」、「X ↔ Y」之轉換過程中，對於分數與最簡分數之間觀念的呈現更為清晰。

(三)學生從數字的關係中找到型與規律

商是 7，餘數是 1 的算式，學生在討論的過程中發現其答案不只一個，並能從數字間關係，發現每一個數被 7 除皆餘 1，進而推論出規律為 7n＋1。

S4：老師，我們這一組討論出來的答案有 15÷2、22÷3、29÷4……

T：很好，那你們有沒有發現什麼…..

S13（與 S4 同組）：我知道了…..被除數可以為 7n+1，除數為 n….

當學生在完成學習單二中表格內商為 7，餘數為 1 時，發學現符合此條件的算式已不再是唯一了，且也似乎察覺到算是中被除數與除數之間存在著微妙的關係，當他們接著完成學習單二的過程中，已慢慢地可以發現被除數與除數之間的關係，而且他們也能更進一步地歸納出關係式出來。

綜合上述活動發現，呼應了先前的一些研究結果：適時、適當地將電算器融入教學中，有部分的數學概念可以較輕易地被教導，且也可以幫助學生在數學觀念的瞭解與成長，更可以幫助學生發現樣式，進而對一些數學規則與數學式產生意義化的瞭解(Demana, 1999; Hembree & Dessart, 1992; Huinker, 2002)。

肆、 教學反思

這次活動不論對學生或老師都有一些意想不到的收穫，一台電算器在課堂上

引起了空前的迴響與反應，這也呼應了先前一些相關研究結果：電算器適當地融入課室中，將有助於教與學(Campbell & Stewart, 1993; Hembree & Dessart, 1986, 1992)。下列將這次教學中的發現分別從學生與老師的觀點做以下的歸納：

一、學生：

(一)在一般上課中，紙、筆計算似乎還是目前國中數學課的主軸，電算器幾乎很少出現在課堂上，而且大部分的老師擔心學生使用的時機不對或濫用，因此會限制學生使用，然而透過這次將電算器融入教學活動中發現，學生對電算器的新鮮感與好奇不但提昇了學生學習的動機與興趣，且藉由透過電算器，讓學生進行操弄、探索、發現與驗證，更加提昇了學生主動探究的精神。

(二)透過電算器的使用，藉由符號表徵模式內的轉換，建立了學生相關的數學概念，並讓學生學習從資料中看出規則，推論規則的結果，產生規則的代數式。

(三)透過此次的教學活動發現，學生雖然可以經由電算器算出其答案，但仍需具有相關的數字常識去檢測其答案是否合理，因此，可藉此發展學生數字常識，提昇學生後設認知的能力。

二、老師：

(一)此次的教學活動中發現部分學生對此電算器操作技巧不熟練，在他們的學習過程中又面臨了另一個挫折，但是電算器新奇的功能反卻啟動學生主動探究學習的動力，正面迎向挑戰。

(二)在整個教學的過程中發現，部分的學生往往沉迷於機械性的操作動作，只注意電算器所顯示的答案，卻忽略了在學習過程中其他相關的數學概念，因此，老師適時地介入與引導教學是很重要的。因為，老師必需隨時讓學生清楚地知道，電算器只是輔助他們解題的工具，而非解題的全部，也就是說要讓學生知道在適當的時候使用適當的計算方法之觀念（NCTM, 2000）是很重要的。

(三)在這次教學活動中體驗出選擇適當的教材、設計適當且有意義的教學活動內容，再將電算器適時地融入其中，利用電算器來輔助學生學習，在學生學習的過程中可以達到事半功倍的效果。

伍、 結論

面臨新科技時代的到來，以往傳統的教法已無法培養出適合現今社會所需要的人才，因此，教材需要改變，教法更需要改變。在學習的過程中，教師的角色從「知識灌注者」逐漸轉變為「學習促進指引者」；學生的角色也從「被動的訊息接受者」轉變為「主動積極的參與者」。而電算器的融入不再只是為融入而融入，Bartos（1986）和 Suydam（1982）也指出當我們對問題的焦點由計算的過程轉換為解題的過程時，電算器可以幫助學生建立問題解決的策略。

因此，有意義的學習蔚為二十一世紀的主流，電算器不只提昇了學生的學習動機與興趣，也建立與穩固了學生某些數學概念，更激發了學生主動探究的精神及多元化的思考，進而達成有意義的學習。給孩子們的是帶得走的能力，而不是背不動的書包，此正與九年一貫基本精神不謀而合啊！

陸、 參考文獻

林勇吉（2003）。*電算器輔助教學對國小五年級學童數字常識學習之個案活動*。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。

陳淑美（1998）。數學焦慮症新解。*光華，23（7）*，84-92。

黃敏晃（1997）。國小數學新課程下評量改革的一些想法。國立嘉義師範學院八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編。

Bartos, Joyce J.（1986）. *Mathematics Achievement and the Use of Calculators for Middle Elementary Grade Children.* Dissertation Abstracts International47:12227A

Campbell, P.H.＆Stewart, E.L.(1993). *Calculators and Computers: Early Childhood Mathematics.* Ed. Robert Jensen. NCTM Research Interpretation Project. New York: Macmillan Publishing Company, 251-268.

Demana, F. (1999). *Bridging the Gap from Arithmetic to Algebra Using the TI-73*. 2000 Teachers Teaching with Technology College Short Course Program at the Ohio State University.

Dunham, P.H.(1996). *Looking for Trends: What is new in graphing Calculator Research.Proceeding of Eighth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.* Ed. Gail Goodell. Reading, Mass: Addison Wesley Publishing Company, 120-124.

Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes, *Journal for Research in Mathematics Education*, *34(5)*, 433-463.

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, *106*, 5-61.

Hembree, R., & Dessart, D.J. (1986). Effects of hand-hand calculators in precollage mathematics education: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 83-99.

Hembree, R., & Dessart, D. J. (1992). Research on calculators in mathematics education. In J. T. Teey (Ed.), *Calculators in Mathematics Education: 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.22-31). Reston, VA: NCTM.

Huinker (2002). Calculators as Learning Tools for Young Children's Explorations of Number. Teaching Children Mathematics,*8（6）*, 316-321.

Jones, P. (1996). *Handheld Technology ＆ Mathematics: Towards the Intelligent Partnership.* Paper presented for Topic Group 18 Roles of Calculators in the Classroom at the Eighth International Congress of Mathematics Education, Seville, Spain.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics***.** Reston, VA: NCTM.

Suydam, M. N.(1982).*The use of calculators in precollege education:Fifth State-of the-art-review.* Columbus, Ohio: Calculators Information Center.(ERIC) Document Reproduction s Service No. Ed171573)

Waits, B. K., & Demana, F. (2000). Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future. In M. J. Burke & F. R Curcio (Eds.), *Learning Mathematics For a New Century: 2000 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.51-66). Reston, VA: NCTM.

Williams, S.E. ＆ Bright, G.. W. (1998). *Investigating Mathematics with Calculators in the middle Grades: Activities with the Math Explorer*^{TM} *and Explorer Plus*^{TM}, 99-104.

附錄

發現新大陸（學習單一）

親愛的同學們，現在你們手上都有一台電算器，請你「觀察」看看，『它』與我們一般所使用的計算器不同的地方在哪裡？

想要玩玩看嗎？探險之旅開始了，各位柯南們，請你們運用你們的智慧來破解這些「按鍵」密碼吧，並將你們所找尋到的蛛絲馬跡紀錄下來。

Are you ready ? Let's go **…….**

學習單二

一、請用一個生活情境的問題來說明此算則「7÷2＝3…1」。

二、你認為「$\frac{7}{2}$」此數字是怎麼來的？請用一個生活情境的問題來賦予其意義。

三、你認為「$3\frac{1}{2}$」此數字是怎麼來的？請用一個生活情境的問題來賦予其意義。

四、你認為「3.5」此數字是怎麼來的？請用一個生活情境的問題來賦予其意義。

從一~四題中，你發現了什麼呢？請寫下你的發現。

五、請用電算器完成下列表格

算式	商＋餘數	分數	帶分數	最簡帶分數	小數
24÷7					
	商（7）餘數（1）				
					1.125
			$2\frac{625}{1000}$		
				$19\frac{3}{40}$	

完成表格的過程中，你發現了什麼？請寫下你的發現。

樣式規律的試探性教學：以建構碎形為例

邱琬珺

嘉義市民生國中

本文摘要

本篇是針對近年漸受重視的樣式規律（pattern）的數學概念所設計的教學活動。由於碎形（fractal）在結構上具有某些特定的韻律與規則，因此，筆者選擇以碎形中的科赫曲線（Koch Curve）與謝賓斯基墊片（Sierpinski Gasket）為題材，配合 GSP 電腦動態幾何軟體的具體操作與呈現，發展出三階段關於碎形樣式規律的試探性教學活動。本教學活動於寒、暑假期間校內舉辦的科學營或數學營中實施，對象是國中八、九年級學生，期望讓孩子們在沒有課業的壓力下，提升學習數學的興趣。筆者選擇五位九年級的學生進行這項教學活動的預視，根據其學習表現，可發現：提高學習興趣，學生熱烈討論；培養數學能力，學生增進歸納思維；以及，培養數學經驗，學生增強等比概念。

關鍵詞：GSP 動態幾何、碎形、樣式規律

壹、引言

碎形幾何（Fractal Geometry）是近幾年新興的一門數學分支，是一個關於數學外型的研究，展現在從未結束的自我相似性（self－similarity）中，觀察大自然的現象、形狀與韻律，諸如葉子、樹的分支、波浪的形狀、山形的邊緣，都有著自我相似的形式。自我相似性是碎形理論中的重要特性，它的特徵是若將圖形的細節不論是放大或縮小，其細節部分的形狀與原本的整體圖形存在著某種意義的相似（林琦焜，2001）；且具有精細的結構，即在任意小的比例尺內包含整體圖形（張遠南，1998）。

由於碎形在結構上具有某些特定的韻律與規則，而舉凡通性、花樣、式樣、圖樣、特色、模式、韻律、結構…等，都是樣式規律（pattern）的型態之一（曹

通訊作者：
邱琬珺 doki520@cyccatv.net.tw

亮吉，2003）。因此，筆者選定以數學家按一定規則創造出的定率碎形（deterministic fractal），如科赫曲線（Koch Curve）與謝賓斯基墊片（Sierpinski Gasket），運用 Key Curriculum 公司所發展出來的 The Geometer Sketchpad 4.0（動態幾何軟體，簡稱 GSP）輔助學生學習。由於 GSP 能有效地把數和形的潛在關係及其變化動態地顯示出來，隨時觀察到各種情況下的數量關係及其變化，因此，本活動設計的精髓在藉由 GSP 的視窗環境，讓學生從定率碎形的製作方式與生成情形中，探索幾何圖形的樣式規律，希望讓學生能夠由實務操作中，掌握數、量、形的概念與關係，進而抽象化，將圖像與符號作有意義的連結。

對於熟悉舊教材或習慣傳統教學的教師而言，黑板上的平面操作對教師的教學與學生的學習著實都是一大負擔，加上時間與進度的壓力，教師與學生們變得難以發現課程內容引人入勝之處。因此，激起筆者對樣式規律相關活動設計的興趣，為免流於如課本內容形式上的枯燥乏味，期望與數學幾何世界中的奇觀結合，並在電腦軟體的輔助下，利用電腦提供情境，幫助學生了解碎形的規律性。

本教學活動於寒、暑假期間校內舉辦的科學營或數學營中實施，對象是國中八、九年級學生，期望讓孩子們在沒有課業的壓力下，提升學習數學的興趣，而教師也能因沒有教學進度壓力，在活動中盡情融入個人的教學創意。

貳、教學理念

基於以上的理由與動機，整個教學活動共分成三階段來進行，第一階段準備活動「認識碎形」、第二階段發展活動「深入碎形的樣式規律－GSP」、第三階段評量活動「Fractal Mission Possible！」。以下分別陳述此三階段的設計理念，詳細活動內容見附錄。

一、第一階段：認識碎形

此階段為探索幾何圖形變化間的樣式規律拉開序幕，目的在向學生簡單介紹碎形的由來、意義與形成，並展示一些介紹碎形的網站，讓學生更能認識與熟悉碎形隱含的規律，並藉此激發其學習數學的興趣。在欣賞完多樣化的碎形之後，

向學生介紹科赫曲線（Koch Curve）與謝賓斯基墊片（Sierpinski Gasket)。先淺談其生成情形，並在引導學生臆測其中隱含的規律性後，進入第二階段。

二、第二階段：深入碎形的樣式規律－GSP

本階段的主要目的是，讓學生在接觸科赫曲線與謝賓斯基墊片後，能透過 GSP 工具的操作，將其內在運思實際呈現出來，並透過觀察、討論，深入了解碎形的樣式規律，找出其圖形生成的某些通則，並活用之。

首先，讓學生以 2~3 人自由分組，熟悉會使用到的一些功能，如點、線段、中點、著色、隱藏、等分線段、旋轉、和迭代；之後，在有了前一階段對碎形的粗淺認識後，在沒有教師的引導之下，可讓學生先用紙筆模擬前階段中二個碎形例子的生成情形。這能使學生在熟悉 GSP 的功能之後，更有效地在電腦上活用與呈現。由於這二種碎形的生成情形，皆隱含迭代或遞迴的觀念，因此在探討其樣式規律時，會自然形成一個非常有趣的課題。因此，本階段的第一部分是，先讓學生在個人實際操演後，請學生簡單紀錄下他的繪製過程與發現，當個解說員，解說即將深入碎形的 GSP 的一些重要功能鍵及其運用，使其在繪製與紀錄的過程中，加深對碎形樣式規律的思考。第二部分則是，希望學生在前一部分所觀察碎形的生成與變化中，運用所學，達到內化的過程，並在繪圖與操作中，更加了解線段長與比例及圖形變化中的樣式規律。

由於，此活動的施行對象設定在八、九年級的學生，考慮其目前的認知發展階段，對於尋找科赫曲線與謝賓斯基墊片的樣式規律仍顯過難，因此，除了讓學生彼此討論個人發現與臆測外，筆者也配合 GSP 軟體的運用，製作出當學生討論或思慮出現瓶頸時，可在筆者給予引導的程式中（如圖 1 與圖 2)。讓學生自己利用“+”與“-”鍵，觀察圖形每一次的生成過程，包括科赫曲線的線段數、總線段長與謝賓斯基墊片未被挖空的三角形數與總面積的變化。透過這樣一種間接引導的方式，期望學生不僅可藉由具體操作呈現其內在運思，也能透過軟體的輔助，彼此腦力激盪；由操作中類推思考與延伸意象，獲得啟發；探求圖形變化間的樣式規律，經歷臆測、質疑再辨正的過程。

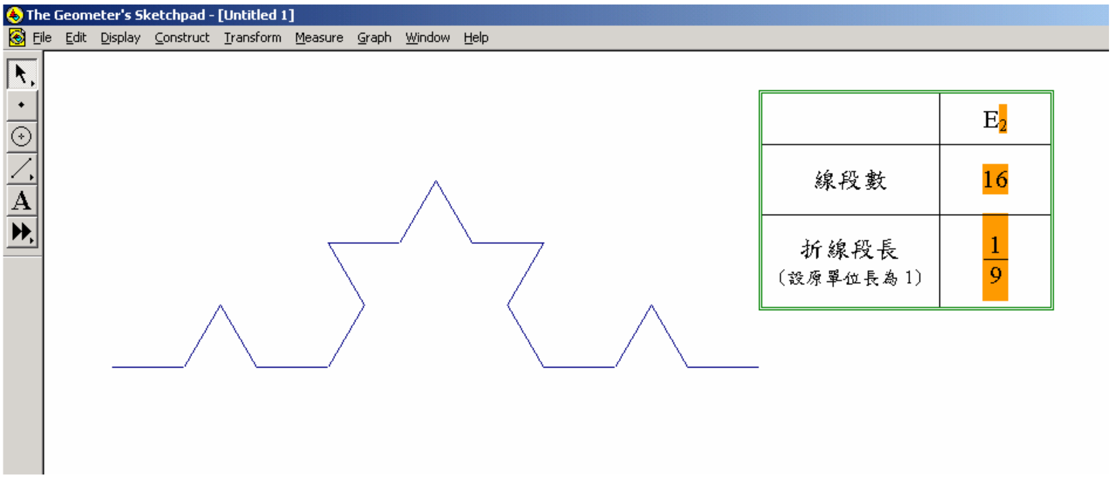


圖 1　科赫曲線生成後的線段數與折線段長計算的 GSP 畫面

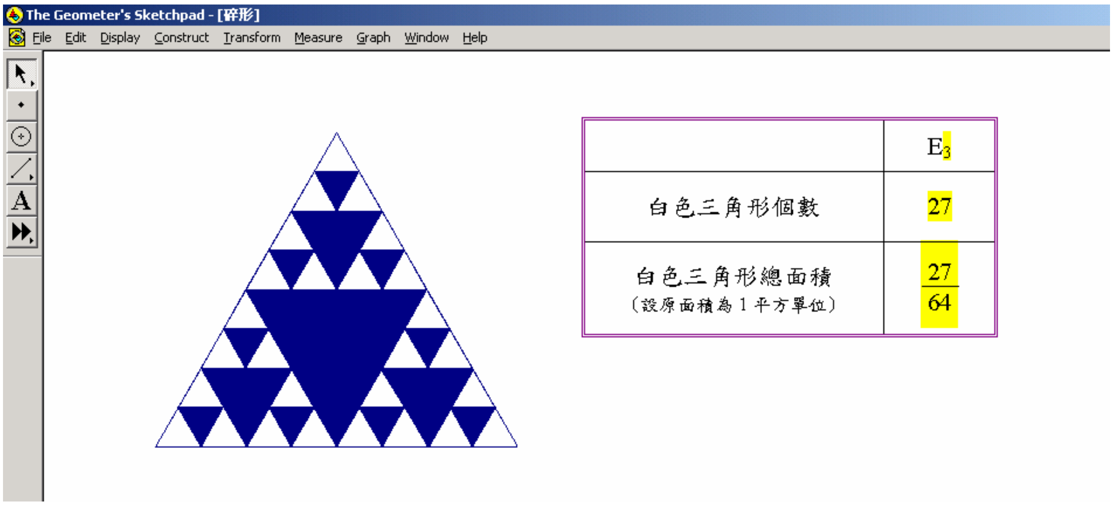


圖 2　謝賓斯基墊片生成後的三角形數與總面積計算的 GSP 畫面

三、第三階段：Fractal Mission Possible！

最後階段是集前二階段之大成，對學生作一個綜合評量，除了著重趣味性之外，也希望讓學生能發揮小組創意與數學知識。本階段的兩大任務是：第一，讓小組發揮所學，應用前二階段的數學知識，說明筆者所給碎形的製作方式，並紀錄下來；第二，請各組學生根據小組討論的想法與創意，製作一個不同於老師給予且其生成具有規律性的碎形，並附予問題情境，而後小組間交換所得，並評量其碎形的設計是否具有樣式規律。

參、教學實踐與分享

為初步試驗以上三階段教學活動的可行性，筆者立意取樣了五位自願但尚未接觸數列與級數課程的國三學生（以下簡稱姿、瑩、南、儂、益），於課後時間進行這項教學活動。其中姿、瑩是女生，南、儂、益是男生，希望透過這五位學生的實際反應，與讀者分享此試探性教學活動的初步結果與心得。

於活動實施期間，筆者盡量讓學生們利用自己的原型知識處理碎形隱藏的樣式規律，儘量不干涉學生之間的互相討論和修正彼此的想法。因此，在學生找尋樣式規律的過程中，GSP 軟體扮演一個非常重要的角色。它除了引發學生的學習動機與學習興趣之外，學生更可透過它的操作，走出思路的陷阱，使原本停滯難以行進的討論延續下去。根據這五位學生的表現，筆者有以下三點觀察心得與讀者分享。

一、 提高學習興趣，學生熱烈討論

一直以來，學生總是認為他們學數學只是為了應付接踵而來的考試與即將到來的學測，很少有機會去體會數學的另一番面貌，因此，在第一、二階段活動進行時，學生們個個嘆為觀止，也有人言道：「哇～不知道還有這種數學世界。(姿)」所以，在三個階段活動進行的過程當中，學生們也就顯得興緻特別高昂。例如，在討論金華玉樹生長情形的樣式規律時，有三位學生表示：

益：「如果這樹會生錢，哈哈！一天生 2 張一千塊，那我就變有錢人了！」

南；「聽你在胡扯！趕快討論啦！」

儂：「第一天長 1 枝，第二天長 2 枝，第三天長出 4 枝，再來 8 枝，哼哼！跟前面討論的差不多嘛！第六天會長出 $2^5 = 32$ 枝。」

益:「那如果我問你第 n 天長出多少呢？」

儂和南搶著回答：「我知道！2^{n-1}。」

益：「所以我說如果長錢，10 天後我就有 50 萬了！」

南：「錯！是第 10 天長出 512 張一千塊，所以那天你 1＋2＋4 8＋16 ＋32＋64＋128＋256＋512＝1023 張一千，有 100 萬了，笨！」

益：「對厚！哈哈！」

在這樣的對話中，每一個人對於新問題的出現總是躍躍欲試，討論氣氛非常熱烈，在分享彼此想法的過程中，不但凝聚個人零碎的概念，也修正、補強彼此思慮的不周延處。由此可見，同學間彼此討論的功能有時遠大於教師的直接教學，因為，學生能透過彼此溝通，以口語互相傳遞個人的數學思維，並從對方的訊息中反思自己的思維。

一、 培養數學能力，學生增進歸納思維

由於活動二、三階段是想讓學生在不熟悉解答方式時，利用自己的原型知識處理問題，懂得自己尋求解題的途徑。因此，鼓勵學生運用直覺與過去的數學學習經驗去觀察、臆測，進而利用歸納的思維，局部推理出碎形隱藏的樣式規律。例如，在討論科赫曲線 En 的折線段數時，三位學生之間發展出以下的對話：

儂：「簡單嘛！這用數的就知道了啊！」

南；「你白目啊？！那 En 怎麼數？」

儂：「對厚…..也就是說，得像老師說的找規則，是吧？」

益:「找規則的話，E_0 的折線段 1 條，E_1 的折線段變為 4 條，可以看成是 1×4，那 E_2 的折線段就變為 16=4×4 條，E_3 的變 64=16×4 條，E_4 的變 256=64×4 條，所以 E_5 就是 256×4=1024 條。再往下算，E_6 就 1024×4=4096，但是沒辦法找到 En 啊！」(邊看著 GSP 畫面即如圖 2-1 邊說道）

儂:「是不是 E_1 時有 2^2 條，E_2 時有 2^4 條，E_3 時有 2^6 條，E_4 時有 2^8 條？啊，2 就是 2×1，4 就是 2×2，8 就是 2×4，所以最後應該有 2× n 。」

南：「厚，不是啦！你漏講了啦！應該是 $2^{2\times n}$ 條！」

在以上的對話中，不難看出一開始儂直覺認為在看得到圖形之下，求數目用數的就可以解決問題，而在與其他同學的討論中，才發現必須將具體轉為抽象。因此，他們一邊觀察電腦畫面中，圖形每一次的生成後科赫曲線的線段數的變化，一邊透過過去的數學學習經驗臆測可能隱含的規律，最後，將所得結果類推至 En 圖形，並歸納出其最後結果。另外，在討論謝賓斯基墊片 En 未被挖空的三角形數的部分，有兩位學生表示：

儂：「嘿嘿！這一次我不會再回答錯了！跟前面的差不多，只是圖形不太

一樣而已，但道理一樣嘛！$3=3^1$，$9=3^2$，$27=3^3$，$81=3^4$，所以到 En 時候，結果應該是 3^n。這一題比較簡單！」

瑩：「別太臭屁哦！我們也已經有結果了。被你搶先而已。」

從上述的對話中可看出，之前的科赫曲線討論過程與結果已成為他們的前置經驗，所以，在解類似的問題時，已能快速歸納結果。

由此可見，學生從解題中已漸漸形成他們個人的解題策略，不僅可以詳細說明個人的解題內容，也能充份理解問題的真實數學意義，組織其個人的思考策略。

二、 培養數學經驗，學生增強等比概念

部分學生似乎已能透過具體觀察及探索，發現圖形變化間隱含的樣式規律，並且察覺其內在的數學概念－等比。例如，在討論科赫曲線 En 的折線段數時，師生之間發展出以下一段對話：

姿：「可以寫 $4\times E_{n-1}$ 嗎？」

師：「你為什麼會問可不可這樣寫？你覺得可以的理由是什麼？」

姿：「因為下一個圖形的數目都是前一個圖形的 4 倍，每一個都跟前一個有關，所以…….」

師：「很好，但 E_{n-1} 本身代表的意義是生成圖形，其實你應該用別的符號代表，不過沒關係，你可以繼續往下做哦！這在數學上其實是一種遞迴的關係，你不妨試著找找 En 和 E_0 的關係，會有重大發現哦！」

由姿的回應，可看出她在找尋樣式規律時，已察覺出數量間的比例關係，且進一步用符號表徵出結果。而從其第三階段碎形設計的訪談與設計草圖（圖 3-1）中，更可看出她和瑩在概念的建構上雖不夠完備，但已能作為檢驗的工具，將其應用與推廣。師生三人的對話片段如下：

師：「你們準備怎麼著手？」

瑩(半推半就下)：「想從那個斯基什麼片的做做看。」

師：「謝賓斯基墊片！不過這和你們的設計有什麼關係？」

瑩：「嗯～那個什麼墊片的不用利用正三角形的三邊中點連線嗎？所以我們就想說如果改用正方形應該也會有規律才對，然後就這樣啦！」

姿：「老師，我們現在正在驗算。不過應該對吧？」

師：「那你們就試試看吧！」

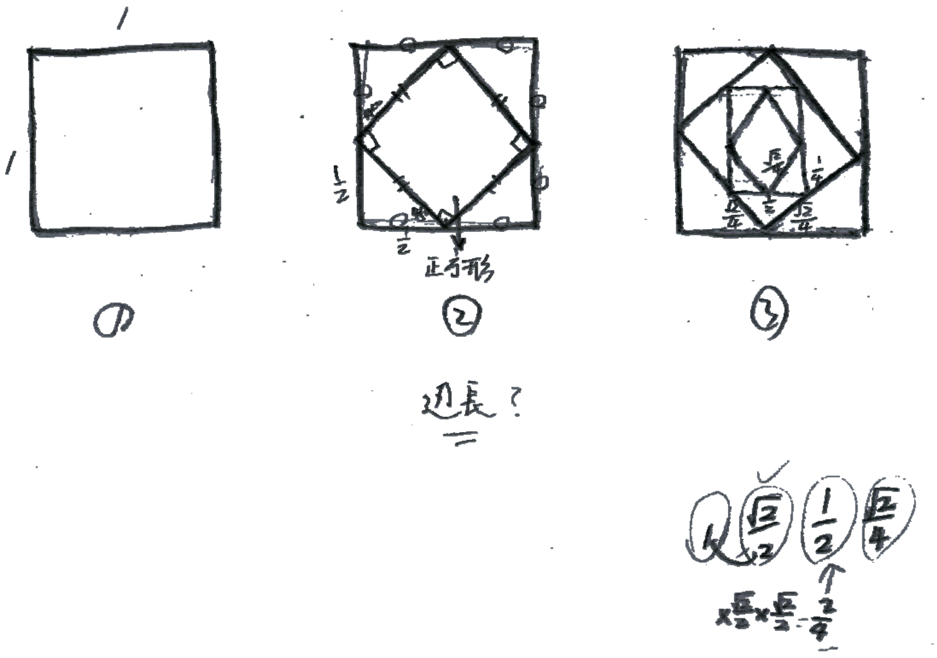


圖 3-1　姿與瑩碎形設計草稿

再由姿與瑩兩人所繪的草稿圖（圖 3-1）中可看出，她們是先運用邊與角度驗證所得的四邊形是一個正方形之後，開始思考：每一次生成後所得的正方形邊長是否具有樣式規律？由圖 3-1 的右下角處，更可清楚看出她們運用等比概念的檢測過程。

由此可見，學生在這樣的教學活動過程中，似乎可以發展出豐富的創造性思考，也能類推及運用建構碎形的概念，進而提升自己的數學經驗與能力。

肆、教學省思

長久以來，要將國中的數學課程完全與生活結合，是一件非常困難的事，因為，課程內容多偏向於抽象概念與邏輯，對大多數的數學教師而言，這一直是一個令人非常困擾的數學教學問題。再者，教師因為授課時數與課程進度的限制，在以升學為主的考試壓力下，常常過度重視理論與解題技巧的講述。為了試探能否擺脫這樣的困境，個人於是在寒假或暑假時辦理的科學營或數學營中，初步嘗試如何實施本教學活動，就是希望，學生能在活動時間充足、設備齊全之下，重拾學習數學的樂趣、重新體驗一次數學知識的豐富。

由於參與本活動的學生只有五位，所以，在學生遭逢困境或思路瓶頸時，筆者比較能適時予以引導、協助，致所見到的學習結果多是正向的回饋，但是，卻可能因此而疏漏許多教學的細節。企盼其他教師在參考或運用此教學活動時，要視學生的個別情況，增減或調整活動的內容。對於活動進行時學生的數學概念建構，筆者有幾點建議：

1. 除了等比概念的建構外，教師可視當時狀況，將部分國中階段未能深入的概念納入教學之中。例如，談到科赫曲線的折線段數部分，學生找出生成 En 的折線段數是 2^{2n} 條時，可以拉回最開始 E_0 時的 1 條情形，而後慢慢引入零次方的概念。
2. GSP 是幫助學生作圖像與抽象連結的一項媒介，教師亦可視狀況考量，是否將 GSP 的功能納入教學內容，或可以選擇其他更有幫助的工具。
3. 由於學生在解題時，易陷入只由結果找規律的迷思之中，因此，教師需多加了解、試探學生的解題歷程與數學思維內容，必要時協助其理解問題的內在數學意義。

伍、參考文獻

林琦焜（2001）：碎形專題－從 Cantor 集到碎形。**數學傳播**，25（1），頁 3－14。

曹亮吉（2003）：**阿草的數學聖杯**。台北：天下遠見。

張遠南（1998）：**數學古今奇觀**。台北：銀禾文化事業有限公司。

Mandelbrot, B. B.（1967）. How long is the coast of Britian？Statistical self–similarity and fractal dimension. *Science*, 156, 636–638.

Mandelbrot, B. B.（1982）. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: Freeman.

附錄

第一階段　準備活動：認識碎形

教學時間：45 分鐘

教學目標：

1. 透過一些碎形的網站，讓學生能踏入碎形的世界，引發動機，激起學習興趣。
2. 透過科赫曲線與謝賓斯基墊片的介紹，讓學生能發現碎形隱含的規律性。

活動步驟：

1. 簡單介紹碎形的由來、意義與形成。
2. 展示一些介紹碎形的網站。

   碎形 Fractal

   http://alumni.nctu.edu.tw/~sinner/complex/fractals/

   Sprott's Fractal Gallery

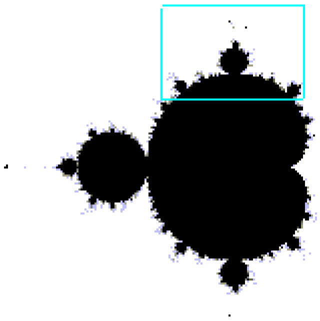
   http://sprott.physics.wisc.edu/fractals.htm
3. 淺談科赫曲線與謝賓斯基墊片圖形的生成情形，引導學生臆測其中隱含的規律性。

教師參考資源：

許多自然現象，如雲的邊界、山形的邊緣、海岸的形狀、閃電的交叉、氣體的彌漫、液體的湍流、葉子的分支…..等，雖然到處充滿著破裂、扭曲與雜亂，但仍有著規律（張遠南，1998）。

約四分之一世紀前，西元 1967 年，一位 IBM Thomas J. Watson 研究中心的研究員　Benoie Mandelbrot 開始研究上述的不規則，並用一個單詞「碎形」(fractal）來表示這些圖形，它是由法文動詞 frangere （破壞）的形容詞 「fractus」來的，其意義即為破碎的、分裂的、不平坦的。之後針對英國海岸線長度的不確定，導出了碎形理論的重要概念（Mandelbrot ， 1982）。並提出一套新的幾何學，他稱之為碎形幾何學（Fractal Geometry）。下圖 1.1 即為有名的碎形圖形　Mandelbrot Set，這個圖形有很細緻的結構，類似的形狀無窮的重複出現，而且不管你如何把圖形放大，你所看到的形狀，跟原圖形幾乎是一樣或類似（如圖 1.2 為

圖 1.1 的局部放大圖)，而這就是碎形的基本特性。



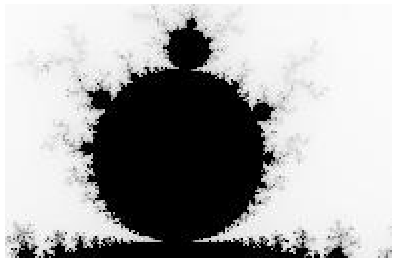


圖 1.1　Mandelbrot set　　圖 1.2　圖 1.1 的局部放大圖

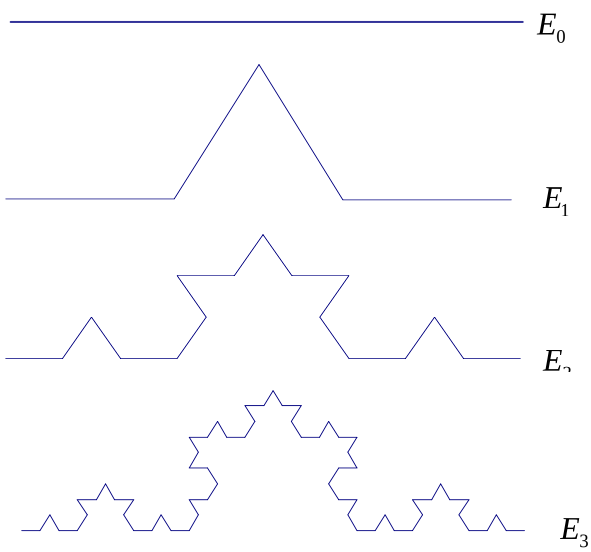
（資料來源：Mandelbrot ， 1982）

以下為本活動運用之定率碎形，簡述如下：

◈Koch Curve（科赫曲線）

瑞典數學家科赫（Helge von Koch ， 1870－1924）於 1904 年發現了科赫雪片（Koch Snowflake)。科赫雪片是由一個正三角形的三邊不斷生成，為討論方便，我們只取其中一邊作為討論，而其生成結果稱為科赫曲線。

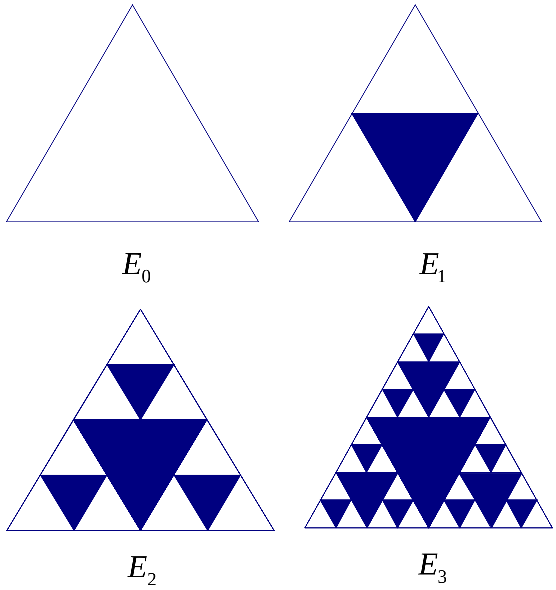
其生成的過程是這樣子的，設 E_0 是單位長線段；從 E_0 中去掉中間的 $\frac{1}{3}$ ，並用底邊在去掉的線段上的正三角形的另外二邊代替，由此得出四條線段組成圖形 E_1 ；而後再對 E_1 的每一條線段進行同樣的過程得 E_2 ；如此繼續，以至無窮，最後的極限曲線，便是科赫曲線。



◈ Sierpinski Gasket（謝賓斯基墊片）

這個例子是波蘭數學家謝賓斯基（Waclaw Sierpinski ，1882－1969）於 1916 年提出，說明一個等腰三角形，取出中間的一相似部分，在多次重複後與科赫曲線是相同的道理。

其生成的過程是，設 E_0 是一正三角形，將三角形每一邊的中點連線，會分割成四個小正三角形，我們把中央的那塊倒立的正三角形拿掉，由此會剩下三個相同的正三角形組成圖形 E_1；接下來對 E_1 中剩下的每個三角形進行同樣的過程得 E_2；如此繼續，以至無窮，最後便形成謝賓斯基墊片。



第二階段　發展活動：深入碎形的樣式規律－GSP

教學時間：90 分鐘

教學目標：

1. 能利用動態幾何軟體 GSP 畫出科赫曲線與謝賓斯基墊片。
2. 透過 GSP 工具的操作，將其內在運思實際呈現出來，並透過觀察、討論，深入了解碎形的樣式規律，找出其圖形生成的某些通則。

活動步驟：

1. 讓學生以 2~3 人自由分組。
2. 讓學生先熟悉 GSP 軟體會使用到的一些功能，如點、線段、中點、著色、隱藏、等分線段、旋轉、和迭代。
3. 先讓學生用紙筆模擬前階段中二個碎形例子的生成情形，請學生簡單紀錄下他的繪製過程與發現，當個解說員，解說即將深入碎形的 GSP 的一些重要功能鍵及其運用。

   問題導引：

   ①當個解說員，解說即將深入碎形的 GSP 功能鍵及其運用。

   ②紀錄下你繪製 Koch Curve（科赫曲線）的過程。

   　繪製過程中，對於科赫曲線，你有什麼數學上的發現？

   ③紀錄下你繪製 Sierpinski Gasket（謝賓斯基墊片）的過程。

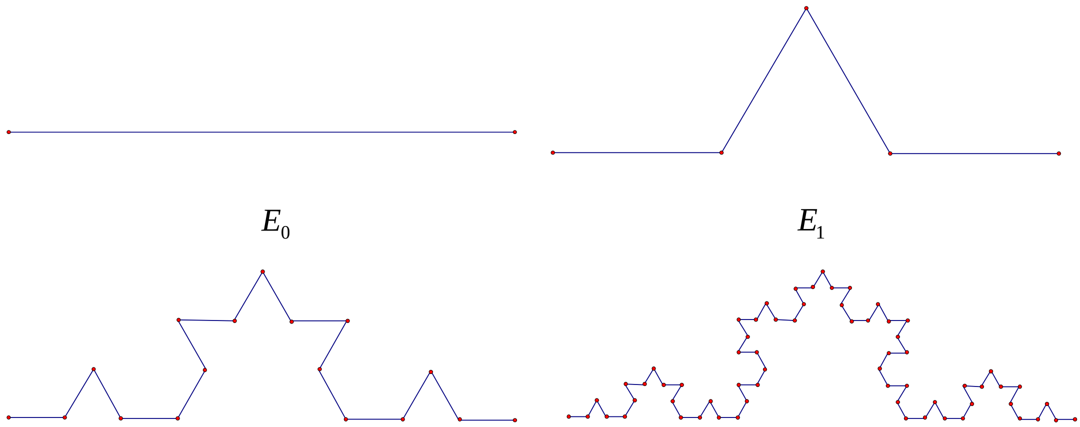
   　繪製過程中，對於謝賓斯基墊片，你有什麼數學上的發現？

4. 觀察碎形的生成與變化，在繪圖與操作中，更加了解線段長與比例及圖

形變化中的樣式規律，並運用所學，探求圖形變化間的樣式規律。

教師佈題：

◈科赫曲線（Koch Curve）



E_0　E_1　E_2　E_3

若上列為科赫曲線的生成圖形，依照此規律生成，則

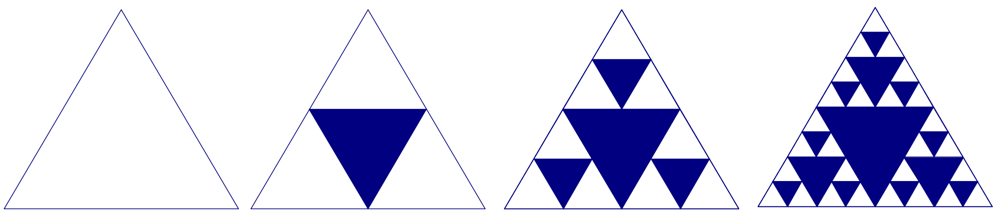
《1》折線段數的討論：生成 En 時，其圖上將有幾條折線段？試找出通式。

《2》折線段長的討論：設 E_0 是單位長為 1 單位的折線段

①生成 En 時，其圖上的每一條折線段長為多少？試找出通式。

②若一個生成圖形預備只用一條繩子圍出，則生成 En 時，繩長需多少單位？

◈謝賓斯基墊片（Sierpinski Gasket）



E_0　E_1　E_2　E_3

若上列為謝賓斯基墊片的生成圖形，依照此規律生成，則

《1》三角形個數的討論：生成 En 時，其圖上剩下多少個未被挖空的三角形（即圖中的白色部分三角形）？請找出通式。

《2》三角形面積的討論：設 E_0 是面積為 1 平方單位的三角形，生成 En 時，其圖上剩下未被挖空的三角形（即圖中的白色部分三角形）的總面積為何？請找出通式。

5. 小組發表討論結果。

6. 小組間互相質疑與辨正結果，並得出結論。

第三階段　評量活動：*Fractal Mission Possible*！

教學時間：90 分鐘

教學目標：

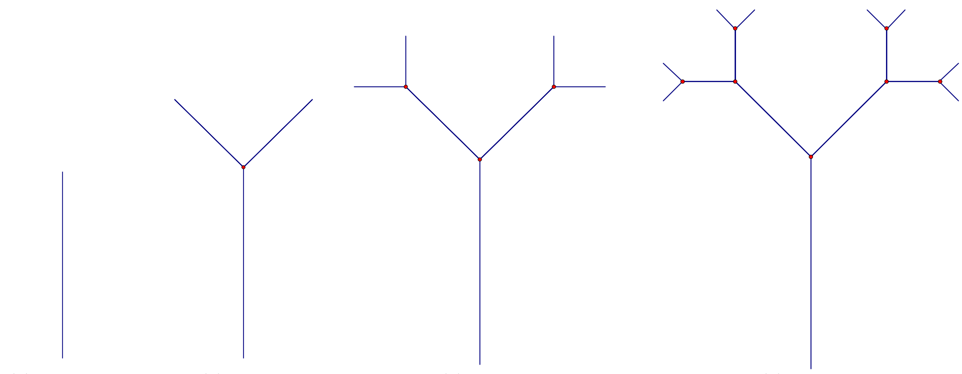
1. 學生能運用所學數學知識，觀察、臆測出給定碎形的生成與製作方式。
2. 學生能發揮小組創意製作新碎形，培養反省思考的能力，替小組創作的碎形附予問題情境。

活動步驟：

1. 讓各組學生討論並說明出所給定之碎形圖形的製作方式，並紀錄下來。

   問題情境：

   相傳東海龍王在他水底的龍宮種了一顆金華玉樹，在他播種後的第一天，非常奇妙地樹開始長高到 1 公尺，第二天在樹頂上長出 2 枝新枝，每一新枝為原長度的一半，而且夾成直角。



第一天　　第二天　　第三天　　第四天

①如此生長下去，請預測一下，六天後，這棵樹會長成啥模樣？

②你們認為這棵樹的生長情形有什麼樣式規律嗎？討論一下，並紀錄下結果哦！

2. 請各組學生根據小組討論的想法與創意，製作一個不同於老師給予且其生成具有規律性的碎形，並為它設計題目，以利別組同學探尋其樣式規律。

   問題情境：

   發揮你們的創造力與想像力，運用之前所學，自己設計一個碎形。

記住，你們的碎形必須是可以不斷生成，且具有某種樣式規律的哦！

討論出來後，先為你們設計的碎形**命名**，而後將你們**碎形的生成情形畫下來**，並針對你們的碎形**擬幾個關於它生成前後樣式規律的問題**。

3. 交換小組間的所得，並評量其碎形的設計是否具有樣式規律。

評量表

<table>
<tr><td rowspan="2">第　組
評量</td><td colspan="3">碎形外型</td><td colspan="2">碎形設計</td><td rowspan="2">小組
特色</td><td rowspan="2">總分</td></tr>
<tr><td>切合
主題</td><td>美麗
迷人</td><td>具有
創意</td><td>具備樣
式規律</td><td>題目適
切性</td></tr>
<tr><td>評分
（±5分）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>驗證區</td><td colspan="3">驗證碎形是否能無限生成</td><td colspan="2">1. 檢驗碎形生成是否隱含樣式規律？並說明之。
2. 觀察其出題方式是否適切？若是，計算其結果；若否，修正其題目，並計算出修正後該題的結果。</td><td>給分理由：</td><td></td></tr>
<tr><td>教師評量</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

教師評估學童分數學習成效與學童真實表現之落差

李慧鳳

新竹市陽光國小

本文摘要

本文內容主要目的是藉由對現職國小教師施以「教師對學生分數概念學習認知之問卷」，探究教師對學生學習分數概念認知之知識。從國小教師評估學童分數概念的學習情形和學童分數概念真實的學習情形之間的落差做一分析。以下分成樣本說明、教師對學生分數概念學習認知之問卷、統計結果以及從形成落差的可能因素中提建議等四項說明之。

壹、 樣本說明

一、教師樣本

因為分數教材從二年級到六年級均有分布，國小教師會輪替擔任各年段教師，因此不考量年段因素，要求受測者每題都需回答做評估。

本研究是以現職國小教師為施測對象，包括正式教師、代課老師以及實習教師，並以方便抽樣方式取樣施測，委託八位現職教師協助選取樣本並施測，72位教師中，包含14位男教師，58位女教師。其中正式教師64位，代課教師4位以及4位實習教師。畢業的科系：數學系9名，理工系9名，其他科系54名；擔任數學教學年資不到一年的有7位，1-5年的有16位，6-10年的有26位，11-15年有18位，16年以上有5位。

二、參考數據來源

本研究中學生參考數據，除了異分母分數符號大小比較是研究者依方便取樣，對某小學四年級二個班級共70名學生人施測，再進行統計所得參考數據，其餘各題為參照文獻中台灣區施測結果，包括楊壬孝（民78）測試國中小學生分數概念的發展、詹婉華（民92）測試台灣區高年級分數概念，以及黃靖瑩（民92）台灣區中年級分數概念等研究中所得結果作為參照數據。

通訊作者：李慧鳳
tungma0528@yahoo.com.tw

貳、 教師對學生分數概念學習認知之問卷

問卷之內容依現職教師有關學生分數學習的認知知識為研究目的，因此題目的編制以分數數學內容包括等分概念、單位量概念、等值分數概念以及分數的意義四部分作為設計項目。題目來源和題目內容如下：

一、等分概念—

(一)題目來源：詹婉華（民 92）測試台灣區高年級分數概念，以及黃靖瑩（民 92）台灣區中年級分數概念改編。

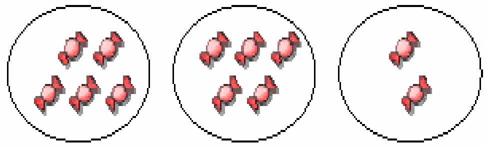
(二)題目內容：

讓國小中、高年級學生回答下面的問題，你認為答對率可能是多少？

中年級（　）25% 以下　（　）26-50%　（　）51-75%　（　）超過 75%

中年級（　）25% 以下　（　）26-50%　（　）51-75%　（　）超過 75%

＊姊姊買了一些糖果，他把全部的糖果分成 3 堆（如右圖的樣子），請問其中一堆是不是全部糖果的$\frac{1}{3}$？



①是。因為分成三堆，其中一堆就是$\frac{1}{3}$

②是。因為只有第 3 堆不是$\frac{1}{3}$

③不是。因為沒有平分成 3 堆

④不是。因為沒有 1 堆是 3 個

⑤其他＿＿＿＿＿＿

二、單位量概念

(一)題目來源：詹婉華（民92）測試台灣區高年級分數概念改編。

(二)題目內容：

用下面的題目，抽測五年級學生，請你估計答對率約有多少？

（　）25% 以下　（　）26-50%　（　）51-75%　（　）超過75

康康的盒子裡有7個紅彈珠，3個紫鈕扣和5個綠彈珠。請問盒子中綠彈珠占所有彈珠的幾分之幾？

三、等值分數

(一)異分母分數大小比較

1. **題目來源：**參考Behr＆Post（1992）有理數和小數概念教學設計問題。
2. **題目內容：**

利用通分後來比大小是五六年級的課程，用下面的題目抽測四年級學生，你認為答對率會有多少？ **＊比較$\frac{7}{8}$和$\frac{5}{6}$哪一個數大？並請說明理由。**

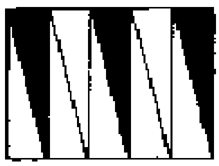
(二)分數圖形表徵下的大小比較

1. **題目來源：**詹婉華（民92）測試台灣區高年級分數概念改編
2. **題目內容：**

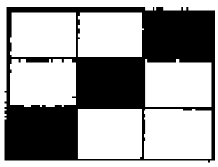
用下面的問題抽測高年級的學生，你認為答對率有多少？（　）25% 以下 （　）26-50% （　）51-75% （　）超過75% 並說明各選項學童會選擇的百分率及原因。

下列2個相同的長方形甲和乙，哪一個著黑色的部分面積比較多？　。

甲



乙



1. 甲多　　2. 乙多　　3. 一樣多

四、分數的意義

(一)分數是數線上的一值，具有稠密性：

1. **題目來源：**楊壬孝（民78）測試國中小學生分數概念的發展改編
2. **題目內容：**

以下面的問題抽測六年級學生，你認為答對率可能是多少？

（　）25% 以下　（　）26-50%　（　）51-75%　（　）超過75%

學生可能的答案有哪些：（　　　　　　　　　　　　　　　　）

在右圖數線上$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$之間可以找到多少個分數？　　圖 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

(二)分數是兩數相除的結果

1. 題目來源：楊壬孝（民78）測試國中小學生分數概念的發展改編
2. 題目內容：

讓國小六年級學生回答下面的問題，你認為答對率可能是多少？

（　）25% 以下　（　）26-50%　（　）51-75%　（　）超過75%

學生可能的選項排序為何？從最可能到最不可能的選擇順序為(　　　　　　　)

＊將一條長17公分的絲帶平分成四段，每段長多少？請選出你認為最正確的答案。①4公分，餘1段。　②4公分，餘1公分。　③$4\frac{1}{4}$公分　④$\frac{4}{17}$公分

參、 國小教師評估學童分數概念學習成效之統計結果

根據題目設計的雙向細目表，統計現職國小教師在「等分概念」、「單位量概念」、「等值分數」以及「分數的意義」四種分數數學內容答對率的評估，再與學生學習的真實情形答對率做一比對，如下表一：

表一：國小教師對學生分數學習評估與學生真實情形之對照表（n＝72）

學習表現 / 教師人數百分比 / 分數數學內容		學生真實表現答對率	老師預估答對率的人數百分比			
			25% 以下	26-50%	51-75%	超過 75%
等分概念	中年級	36.57%	9.7	26.4＊	44.4	16.7
	高年級	49.62%	2.8	6.9＊	29.2	61.1
單位量概念		21.67%	9.7＊	12.5	48.6	27.8
等值分數（異分母大小）		55.71%	43.1	33.3	15.3＊	6.9

等值分數（圖形表徵）	甲多	18.8%	58.3＊	25.0	5.6	0
	乙多	46.79%	9.7	36.1＊	34.7	11.1
	一樣多	34.32%	34.7	30.6＊	18.1	1.4
分數的意義	數線上一值	21%	41.7＊	22.2	23.6	8.3
	兩數相除的結果	47%	2.8	31.6＊	44.4	20.8

註1：表中數字後＊表示學生真實情形的落點區間

註2：表中學生真實表現根據

由上表可以看出教師的預估和學生的真實表現差異很大。超過60% 教師低估學生在分數的「等分概念」、「單位量概念」、「分數是兩數相除結果」等概念的表現。有76% 的教師低估學生在「等值分數」分數大小比較的表現。超過45% 教師高估學生在「等值分數」圖形大小比較的表現。在「分數是數線上一值」的評估上有41.7% 教師的預估情形和學生表現較為接近，是教師評估問卷中表現較好的一題。

肆、 建議

依據問卷統計結果，對教師在進行分數教學時，提出以下三點建議：

一、教學前先進行前測，以了解學生先備經驗，前測問題中可以列出不等分情境以及單位量不是總量的情境，以檢驗孩子的迷思概念

「等分概念」和「單位量概念」都是基礎的概念，學生在第一階段分數學習時就有的課程了，日後的分數教材或是一般的評量都未特別提出，教師可能以為學生都已經學得此概念，未再進行評量及檢驗，而忽略了學生可能的分數概念迷思。因此建議教師在教學上可以教學前先進行前測，以了解學生先備經驗。前測問題中增列不等分情境以及單位量不是總量的情境藉以察覺孩子的迷思概念。

二、教學中教師應加強學生表徵的活動，避免表徵單一化，以增進學童對概念的了解

Behr 等（1984）、Post＆Lesh（1984）均強調表徵間的轉換能力是影響學生數學學習、問題解決及產生有意義學習的重要因素。分數具有多重意義，學習益顯困難，教師在進行教學活動時應增加學生表徵的活動，避免單一化的表徵，

增進概念的連結。

三、評量時，教師應多了解學生的解題策略和錯誤類型，而不是只有注意對錯

等值分數是分數教材中重要的一環，也是學生容易產生迷思概念的教材內容。學過形式化演算法則的學生，除非有特別的限制，否則都用形式化演算法則來解題，避免孩子學習時只是引入算則做機械式的運算，建議教師在異分母大小比較教學時，先開放性解題，察覺學生解題多樣化，找出學生多樣欠缺的概念和錯誤類型，教學時較容易啟發學生建構他們的學習。

伍、 參考文獻

呂玉琴(民87)。國小教師分數教學之相關知識研究。台北師院學報，11，393－438。

林業泰（民93）。國小教師對高年級學生分數概念的了解。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文。(未出版)

陳瑞發（民92)。國小低年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文。(未出版)

黃靖瑩（民92)。國小中年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。(未出版)

楊壬孝（民76)。國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號：NSC－76－0111－S－003－10)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝（民77)。國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號：NSC－77－0111－S－003－09A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝（民78)。國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號：NSC－78－0111－S－003－06A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

詹婉華（民92)。國小高年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。(未出版)

蔡玉宜（民93）國小教師對中年級學生分數概念的了解。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。(未出版)

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., &　Silver, E. A.(1983). Rational—number concepts.

In R. Lesh, & M. Landau, (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp. 91–126). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R.(1984). Order and Equivalence of Rational Number: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323–341.

Behr, M. J., Harel, G.., Post, T. R., & Lesh, R.(1992). Rational number , ration, and proportion. In D.A. Grouws(ED), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 296-333*.

活動報馬仔

（一）2005/11/19~2005/11/20

93 年度數學教育成果討論　地點：台南

方式：

1. 專題演講 (1)鄭湧涇教授(2)蔡今中教授(3)左台益教授
2. 分兩組成果報告(一年期或多年期計畫執行完畢者)
3. 壁報展示(多年期計畫尚在執行者)清單請見附件電子檔

對象：數學教育相關研究者(優先參加)、研究生共 80-100 名

（二）2005/11/07~2005/11/11

「真實的科學與數學(師資)教育：荷蘭與台灣」研討會，即將在國立新竹教育大學舉辦，線上報名即將開始。

（三）2005/11/08~2005/11/12

教育評比國際研討會，即將在國立師範大學數學館舉辦。

（四）2005/12/16~2005/12/18

中華民國第 21 界科學教育學術研討會，即將在國立彰化師範大學舉辦。

（五）2006/01/09~2006/01/013

數學教育研究論文寫作工作坊。

國外參訪教授 Dr. Kath Hart, Dr. Judith Sowder and Dr. Edward Silver。

（六）2006/01/13~2006/0/14

「數學課程發展與教學創新之遠景」國際學術研討會。

地點：國立嘉義大學民雄校區

參考網址：http://163.27.48.15/~gsme/2006math/

國外參訪教授 Dr. Robert E. Reys and Dr. Barbara J. Reys。

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（ ）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw