

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第8期

台灣數學教育學會

2006年12月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2006 年 12 月出版 NO.8 2006

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北師範學院數學教育研究所

李源順

台北市立師範學院數學資訊教育學系

林素微

國立花蓮師範學院數學教育系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹師範學院數學教育教育系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東師範學院數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師電子期刊 2006, 第八期

台灣數學教師（電子）期刊
**Taiwan Journal of Mathematics
Teachers**

第 8 期

2006 年 12 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 8 期

2006 年 12 月

序言.....	1
劉祥通	
數學教育研究者當前面臨的挑戰	3
陳榮治	
教師亟待學習的評量專業：以MiC「型與符號」的評 量為例.....	11
曾志華	
等量公理前置教學活動之實踐與探究.....	21
王志銘、康淑娟	
低年級數學教學現場.....	41
楊惠津	
活動報馬仔	50

ISSN 1815-6355

序言

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

數學教育圈一份重要的刊物-台灣數學教師電子期刊，已進入第八期了，要為此份刊物寫序，論輩份我資歷尚淺，愧不敢當。但是，假使寫序是一種「分享」，那就應該欣然接受！本期有四篇好文章，我有幸事先拜讀：

1. 陳榮治教授的「數學教育研究者當前面臨的挑戰」，述說一位研究者作研究時需要「學校的配合」、「捕捉老師的教學實景」和「蒐集與分析學生的資料」。
2. 曾志華老師的「教師亟待學習的評量專業」，以脈絡數學為例，提供數學教育工作者思考「如何配合教學目標設計評量問題？」
3. 王志銘與康淑娟兩位研究生，為了發展學生的等式概念，設計前置教學活動，並且在課室教學實踐以觀成效。
4. 楊惠津老師的「低年級數學教學現場」，從教學實務的觀點，提出對「建構數學」與「一綱多本」的看法。

以上四篇，分別從研究、評量、設計教學與教學實務的觀點談數學教育，此四個方向都是數學教育的重要面向，數學教育還有哪些面向值得探討與發表呢？個人認為還有以下重要的面向：

1. 學生的概念發展（解題表現與迷思概念）：學生是學習的主體，「學生怎麼想？怎麼解？」決定了老師應該教什麼？以及怎麼教？所以，學生的數學概念是數學教育工作者非常重要的課題。
2. 中小學的數學結構知識：數學的發展已有幾千年的歷史，今天我們看到的數學教科書只是一種陳述數學知識的版本，教科書的內容蘊藏豐富的結構知識，需要數學教育工作者闡述與解析，以幫助第一線老師

的教學。

3. 教師的專業發展：教師專業發展影響教學的品質，也影響下一代的國民素質與國家的競爭力。至於教師專業該如何發展？以及利用什麼機制發展？需要數學教育工作者一起努力與探索。
4. 教師信念：教師的數學信念、數學學習信念與數學教學信念，影響他們怎麼教數學，也影響他們決定該教哪些數學內容。
5. 科技融入數學教學：哪些數學教學的網站可以取得有力的教學資源？哪些單元可以用計算機的教學活動來輔助以幫助學生的學習？哪些軟體可以幫助老師克服學生學習上的困難？這些都是現代的數學教師必須面臨的挑戰。

「寫作可以引發思考的活絡，也指引閱讀的方向」，期待同道為數學教育多寫作與多發表，也盼望「台灣數學教師電子期刊」稿源不絕，成為數學教育永遠的活水。

數學教育研究者當前面臨的挑戰¹

陳榮治

國立嘉義大學應用數學系副教授

摘要

本文是作者最近幾年，在美國參與課程研究計劃的一些心得分享。雖然國內與國外教育制度並不完全相同，但各國教育制度不斷革新，向上提昇，確是世界潮流。例如：在國內，教育部於九十二年，公佈國民中小學數學課程綱要。在美國，NCTM(2000) 公佈了「學校數學的原則和標準」，接著 2001 年，布希政府通過了「把小孩帶上來」法案 (*No Child Left Behind Act*, 記作 NCLB) 等等。凡此種種革新及政策，究竟如何影響老師的「教」及學生的「學」？則需透過嚴謹的科學化「研究」加以探討及確認，由此可見「研究者」角色的重要性。當然，「研究對象」的合作也很關鍵。

基本上，我們的計劃主要是想進一步探究美國中等學校數學課程(含教科書)與學生學習成就上的相關性。本文簡述我們執行計劃時所遭遇的一些真實挑戰，並分享一些看法。在美國政府推行 NCLB 法案後，由於對學校及各級行政單位，被課以學生學習成效連帶之責，以致於多少阻礙了研究者與各級學校、基層老師間一些積極主動的合作意願。在台灣，由於各校升學競爭壓力大，所以大環境對研究者的挑戰類似。筆者希望藉由這份數學教育專業刊物的傳遞，讓學校及數學老師們瞭解問題與挑戰，喚起大家重新思維，樂於合作，朝雙贏方向努力，以創造國內日後更佳的數學教育研究環境，進一步更用研究成果，引導新政策上路，造福下一代。

關鍵詞：學習期望、把小孩帶上來、強化責任制、科學化研究、標準版。

¹文中所談的挑戰，來自中等學校數學課程研究計劃**，承美國聯邦政府教育部補助(補助號碼: R303T010735)，在此謹表謝意。然而文中內容，純屬作者看法，不必然反映其政策或立場。

**本計劃總主持人為 Dr. Barbara Reys and Dr. Robert Reys, University of Missouri-Columbia, USA.

壹、前言

近幾年來，國內外的數學教育普遍受到重視，許多改革持續發生，課程方面就是很明顯的例子，現今每一年級的學生，應該學些什麼數學？很多課程標準，都把「學習期望」明確化，這是嶄新的趨勢（教育部，2003；Reys, Dingman, Sutter & Teuscher, 2005）。而且，如果我們仔細檢視現今國內外教科書的習題，將不難發現：過去機械式的練習題，已多數被靈活性的思考題所取代。同理，評量方面也相對受到影響。事實上，課程、教學與評量本來就是環環相扣。

「把小孩帶上來」這個法案，明訂各校需要報告學生的學習表現，因此，增加各校的壓力，亦即；各學校都希望能夠迅速提升學生的數學學習表現。這個法案凸顯的一個基本精神是「更強化的連帶責任制」，包括強制性的要求各學區採用「地區性報告卡」(local report cards)，此報告卡需明載每個學生在各學區及各校內對於州政府舉辦的各種評量表現資料，而且，小孩就讀的學校，如果被評定為需改進的學校時，各學區必須通知家長，給予老師及學校行政人員適度壓力，以便他們能夠更用心地提升學生的學習成效。萬一小孩就讀的學校都沒有改進，家長也可以選擇將小孩轉到比較好的學校去就讀。

再者，這個法案要求地方政府和學校要妥善利用補助基金，專款專用，老師在課堂上更要善用科學化研究出來的有效教學方法及策略。這裡所謂的科學化研究，指的就是應用嚴格的、系統的和客觀的程序去獲得可靠的、有效的相關結果或知識之研究。（請參閱 <http://www.ed.gov/nclb/landing.jhtml>）。

如此一來，難怪許多學校及老師，汲汲尋找所謂的有效方法及策略。回想筆者參加2003年在美國芝加哥舉辦的美國教育研究協會(AERA)年會中，Whitehurst (2003) 博士當時是教育科學研究中心主任，他在演講中就提到：許多學校行政人員，迫切想知道市面上有哪些可用的數學教材，能快速有效提升學生的學習。

基於聯邦政府政策上的要求與各級學校的迫切需求，因此，政治領導人及提供研究資金的機構，都站出來鼓勵及支持學術單位從事相關研究，尤其是科學化

研究的結果(NRC, 2002, 2004) 更被視為各學校能否提升學生學習成就的偏方。

照理說，這樣的環境，看起來是絕佳的機會，催化研究者踴躍提出研究計劃，好好探索數學教育諸多問題之根源所在，以便讓各級學校教師，進一步明白如何幫助學生學習數學。或許也因如此，美國數學教師協會(NCTM) 的研究委員會呼籲大家：行動的時候到了(Time is ripe for action)！ 因此，提議「研究行動方案」(An Agenda for Research Action, Middleton, et al., 2004)。

事實上，若從深一層檢視，NCLB 法案中的「強化責任制」以及一般教育資訊的透明公開化，都可能阻礙各級學校與研究者的合作意願，顯然一些學校並不是很樂意師生分心來配合演出，我們可以理解學校的思維，他們一方面擔心研究者為搜集資料而影響該校的正常教學，另一方面，可能也不喜歡研究者拿該校的學生表現與其他學校的學生表現，比較孰優孰劣？同時，很多學校也沒有足夠耐心，等待研究者的最後結果出爐，提供可能解答或偏方，來獲得好處。坦白說，很多學校尋求問題解答或偏方的普遍期望是「立即的獲得有效的策略」，以便立竿見影，馬上提升學生的學習成效。下述實例就是我們的經驗：

在 2002 年，美國聯邦政府教育部資助我們研究小組經費(美金\$1,200,000)，進行一項為期三年的研究計劃。此研究主要目的，是檢視中等學校老師使用數學教科書情形，並探討其與學生的數學學習成就之相關性。我們需要使用不同教科書的中等學校來參與，其中，一種教科書稱為標準版(Standards-Based)，是國科會資助學術單位研發出來的教材(Reys, Robinson, Sconiers & Mark, 1999)。另一種教科書稱為民間版(Commercial Version)，也就是市面上各書商自行開發及推銷的教材。最初，我們依據一些樣本抽樣指標，經過幾個月的討論與聯繫，最後，我們選定 11 所中等學校，分布在美國六個州，包含約八十多位數學教師及四千多位學生，參與這項為期三年的研究計劃。

貳、 徵得學校同意參與之挑戰

當我們根據一些指標，選取可能的學校，來參與這個計劃時，我們曾經努力化解疑慮，試圖說服一些學校，卻面臨很多阻礙。通常，很多學校會提出一些問題如下：需要花費我們老師多少時間配合？需要花費我們學生多少上課時間？學校及老師能獲得哪些好處？研究結果如何公佈？等等。待我們詳細回答他們提出的問題後，往往不少學校都打退堂鼓，不願意參加。例如：我們擬定每年春天，學校需要安排兩天，進行年度的評量測驗，由我們提供統一試題，考完後收回，再由我們統一集中閱卷。很多學校一聽到學生要接受測驗，態度往往就趨於保留。雖然，我們也承諾提供學校及老師一些小額經濟上補助，但許多學校(約三分之二)仍然拒絕。

絕大多數學校拒絕參與的一個主因，是關心如何公佈學生的評量結果？在哪兒公佈？換言之，擔心學生的評量結果萬一欠佳，可能影響校譽，甚至惹來家長不滿，這些顧慮，當然也不是完全沒有道理。一般而言，學校的行政人員及老師，都不喜歡時下流行的以學生的成績優劣，來替學校貼標籤。因此，我們承諾研究報告中，每一所參與的學校及老師，一定都保持匿名方式。

再舉例來說，我們接洽一位任教於郊區一所大型學校的數學科主任，討論參與我們研究計劃的細節。本來，他徵詢學校數學老師後的反應是普遍支持的，所以他建議教務主任能參加我們的研究計劃，然而，一陣子過後，原教務主任換人，新主任上台，欲重新評估再決定。新主任希望我們再一次到該校提供簡報，所以我們也認真配合照辦。不料，事後該校決定不參加。甚至，我們後來進一步得知，該校也決定使用不同版本的數學教科書，而原先我們接洽的科主任也離職了。這些都是活生生的實例，也說明了「變化」可能隨時隨地發生，而這些變化對整個研究計劃也會造成某種程度上的困擾或衝擊。

參、 搜集與分析學生的評量測驗資料之挑戰

為了解學生一年來的學習成果，我們需搜集與分析學生的評量資料。基本

上，評量測驗分成兩部分，第一部分是選擇題型式(我們稱為 The TerraNova Survey)，可用電腦協助計分，所以快速又準確。第二部分是非選擇題型式(我們稱為 The Balanced Assessment)，必需仰賴人工閱卷來計分。這些考試題目，均由美國專業的數學評量資源服務機構所研發，所以選題嚴謹，通常都具備一定的信度和效度。

每年為了批改四千多份的非選擇題試卷，我們聘請許多在職數學老師，集中講習三天，針對每一小題如何計分，由研發機構測驗專家，向所有閱卷人員詳細說明計分要領，務使每一位閱卷者，給分標準儘可能趨於一致，減少誤差。

在此，值得一提的挑戰，包括其一：非選擇題誠然增加我們很大人力負擔，不過，現今評量的題型趨勢，顯然朝著選擇題(Multiple Choice)，簡答題(Short Constructed Response)，及延伸題(Extended Constructed Response)方向發展，一般主要認為非選擇題常具有較高的鑑別度，比較適宜評量學生的思考方式或理解程度。當然，在這種情況下，如果參與的學生人數愈多，挑戰性也就愈大。

其二：過去年代，學校常把這類標準化測驗分數，視為學生之間的能力差異，或老師用於改進教學，但如今標準化測驗成績，卻常被視為學校之間的辦學優劣指標，或用來衡量學校老師教學的有效性，難怪有些學校及老師會猶豫不決是否參加？需不需要自討苦吃？

其三：一些學校行政人員及老師，基本上是懷有抗拒的態度，尤其比較資深的老師，一般寧願安於現狀。尤其針對學生要接受評量這件事，似難釋懷。直覺上，他們認為：可能因參與這項研究，而需增加承受「辦學不力」或「教學效率不佳」之風險。記得有一位主任就率直地說：他認為參與這項計劃，簡直有害無益。也因為如此，我們更需努力說服他們，提昇視野，就長遠來說，如果將來大家都能分享研究成果，那麼他們的貢獻，肯定是很有意義的。我們再三強調研究的「主要目的」，並保證對於研究結果，一定慎重處理。

肆、 捕獲老師教學實景之挑戰

老師在學校的責任，包羅萬象，例如：維持與經營學習環境，設計適當的教案，引導學生探索問題並適時佈題，批改學生作業，進行評量考查，與扮演溝通橋樑等等。至於參加類似的研究計劃活動，雖然研究人員非常需要他們的協助，但坦白說，我們知道通常並不是基層老師最優先或必要的職責。

參與我們研究的老師們，需要配合我們的規劃，做一些額外工作，包括填寫調查表，記錄上課進度，接受我們面談等等，其中最大的干擾是定期接受我們研究人員實地教學訪視。部分老師不諱言的說，現場教學訪視帶給他們壓力，他們憂心研究人員評量他們的教學表現，也有老師承認：定期的教學訪視，帶給她失眠和不快。但整體而言，多數老師還算坦然接受。

事實上，我們研究人員希望老師們儘可能用平常心看待訪視活動，不要特別地準備或變更任何既定的教學活動，我們不希望老師因為我們的造訪，就刻意讓整個教學過程，格外精彩起來。也正因為這個緣故，我們研究人員事先並不告知老師，究竟我們在課堂上要搜集哪些資料(Weiss et al., 2003)？

伍、 結語

不可諱言地，研究者與其研究對象之間的協同合作，通常是使該研究能否成功達成很重要的關鍵。因此寄望，研究人員與其研究對象都應體認彼此的重要角色，相輔相成。唯有基層老師樂意協助，才能完成科學化研究。同時，科學化的研究成果，也可提供老師運用，以達成更有效的教學(Wilson & Blank, 1999)。為活化如此的循環系統，雙方在新時代，都需注入新思維，兩者之間不能疏離，才能互蒙其利，從而引導新的政策上路(Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002)。不過，現在研究群體與資助單位，也需了解的事實是：目前大環境下，許多學校及基層老師，樂於參加研究的意願及彼此的信任感均逐漸降低，這似乎是普遍現象。

最後，筆者希望用美國數學教育學家 Seeley (2005) 最近在 NCTM 刊物「訊

息報導」上的呼籲做結論：

讓我們創造新資源，擺進有用的資訊，給那些負責學生學習者的手中！

讓我們創造新的機制，請求研究群體，解答我們最需要面對的問題！

讓我們用(科學化的)研究成果，指引有關改進教與學的政策之擬定！

讓我們擴展個人或機構為一群體，使其研究重點擺在教學與研究兩者之連結！

參考文獻

教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。

Middleton, J.A., Dougherty, B., D'Ambrosio, B., Gutstein, E., Hala, M., Heid, M.K.,

de Loach-Johnson, & Reys, R. (2004). An agenda for research action in mathematics education: Beginning the discussion. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(2), 74-80.

No Child Left Behind Act. (2001). Public Law No. 107-110. Retrieved from

<http://www.ed.gov/policy/elsec/leg/esea02/index.html>.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2002). Scientific research in education. Committee on

Scientific Principles for Education Research. Shavelson, R.J., & Towne, L., Editors. Center for Education. Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.

National Research Council. (2004). On Evaluating Curricular Effectiveness: Judging the Quality of K-12 Mathematics Evaluations. Committee for a Review of the Evaluation Data on the Effectiveness of NSF-Supported and Commercially Generated Mathematics Curriculum Materials. Mathematical Sciences Education Board, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and

- Education. Washington, DC: The National Academies Press.
- Reys, B., Robinson, E., Sconiers, S., & Mark, J. (1999). Mathematics curricula based on rigorous national standards: What, why, and how? *Phi Delta Kappan*, 80(6).
- Reys, B.J., Dingman, S., Sutter, A., Teuscher, D. (2005). Development of state-level mathematics curriculum documents: Report of a survey. Prepared by the Center for the Study of Mathematics Curriculum. Available:
<http://www.mathcurriculumcenter.org/news.html>.
- Seeley, C. (2005). Using research to improve teaching. *The NCTM News Bulletin*, 41(8), 3.
- Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Schmidt, W.H., & Houang, R.T. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Kluwer Academic Pub., The Netherlands.
- Weiss, I.R., Pasley, J.D., Smith, P.S., Banilower, E.R., & Heck, D.J. (2003). Looking inside the classroom: A study of K-12 mathematics and science education in the United States. Chapel Hill, NC: Horizon Research, Inc.
- Whitehurst, R. (April, 2003). The institute of education sciences: New wine, new bottles. Paper presented at the meeting of the American Education Research Association. Retrieved from <http://www.ed.gov/rschstat/research/pubs/ies.pdf>.
- Wilson, L.D. & Blank, R.K. (1999). Improving mathematics education using results from NAEP and TIMSS. Council of Chief State School Officers, State Education Assessment Center.

教師亟待學習的評量專業：以 MiC「型與符號」的評量為例

曾志華

嘉義市興安國小教師

摘要

國內九年一貫課程的實施，讓第一線教師在課程發展上擁有較高的自主性，然而筆者發現，多年來由學校教師所發展出來的課程計畫其中的評量一項，往往一再地受到忽視、敷衍，這顯示教師的評量專業亟待學習和提升。基此，本文以美國威斯康辛大學數學科學教育研究中心和荷蘭 Freudenthal 研究中心共同合作開發的一套數學課程(MiC)當中的評量為例，提供作為數學教育工作同仁借鏡和參考。

關鍵字：評量、脈絡數學、型與符號

壹、前言

開學了，又是一個新學期的開始。筆者從事小學教育工作十五年，接觸過六十四年版、八十二年版課程到最近九年一貫課程，的確看到了教師在課程發展的自主性正逐漸地提高。然而，自主性的提高卻並不等於教師專業的提高。我們從學校新學期教師自行發展的數學課程計畫來看，就其中評量計畫這一項而言，顯而易見的，都只應付式的評量。因為，從一到六年級的評量方式全部都是「觀察、實作、紙筆測驗、寫作業、口頭報告」這幾個範疇，無一例外。難道一到六年級的數學課程目標都一致嗎？教學內容都一樣嗎？其實不然！這幾個評量的範疇在課程計畫裡也沒有發現具體可行的評量方案。這種現象不僅一到六年級都是如此，幾乎這些年來也都是如此。教師有關評量的專業，實在有待學習和提升。

筆者認為，課室中教學之後的評量對象主要是學生。所以，首先必須弄清楚

到底要評量學生什麼？而這個問題的答案和評量的目標是有密切關聯的。因為評量所獲知訊息，就是在告知教師教學目的是否已經達到。是故，評量必須和課程的目標、教學方法及內容結合在一起才是好的評量。本文作者在彰化師大研究所攻讀博士學位期間，曾經接觸過一套美國中學數學課程教材，名為「脈絡數學：5到8年級的連結課程(Mathematics in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8, 簡稱 MiC)」。除了對於其中的脈絡化數學課程感到有趣之外，其中的評量設計更令筆者覺得印象深刻，頗值得借鏡並作為國內教師發展評量之參考。本文先概略介紹此課程發展的背景，再以其中「型與符號」這一單元的評量設計為例加以闡述。

貳、MiC 課程發展背景、內容及目標

1991 年春至 1995 年間，美國國家科學基金會(NSF)提供 \$ 5,000,000 的經費贊助位在威斯康辛大學的數學科學教育研究中心，和荷蘭 Utrecht 大學的 Freudenthal Institute 的研究員一共四十多位組成一個課程發展小組共同研究這套中學數學課程教材。這些成員包括主持人 Dr. Romberg，研究助理、數學教授、統計學教授、課程與教學專家、行政首長、中學教師、研究學者等。來自荷蘭的學者主要有 Jan de Lange(當時的主持人)、Koeno Gravemeijer 等人。他們的工作是：發展一份執行計畫的藍圖、創造教材、預試教材、實際測試並修改之後的教材，再交由 Encyclopaedia Britannica Educational Corporation(EBEC)出版。小組成員每年見面一次，監督整個計畫進展的情形，並且提供建議。這一套課程教材總共包括 40 個教學單元(每個單元預計教 2-4 週)，所以，5 到 8 年級每個年級大約有 10 個單元的教材。每個單元均包括：

- 一、一套單元指引(unit guide)。內容有：單元目標說明、該單元和數學課程與評鑑標準(NCTM, 1989)的關聯、該單元的相關研究、和其他單元的關係、討論該單元的數學內容及教學、學生在這單元中的活動概要、建議其他類似的活

動、提供補充的活動給學生回顧或練習。

二、一本學生手冊(student booklet)。手冊裡面是由一些有組織的活動構成。這些活動圍繞著某一個主題(脈絡、社會或數學的),可以讓學生配合一個教學單元在 2-4 週之內使用。這份手冊由荷蘭編寫草稿,小組成員審閱、修改,並且加以美國化(Americanized)。修改訂正之後,在威斯康辛州作預試(pilot test)評估中學生實際使用情形,再修訂之後,再作更廣泛的實際測試(field test)。

三、評量的材料(assessment materials)。提供非例行性的問題,用以評量學生的數學功力(mathematical power)。鼓勵採用多元的評量方式了解學生的成長和成就。

四、教學管理材料(instructional management materials)。內容包括:40 個單元的關係圖、討論每一個年級的單元內容如何安排成為完整的一堂課,描述每一一年級學生在某些單元的先備條件及描述評量的方式。

五、多媒體材料(multimedia materials)。EBEC 將會提供電腦、軟體、VCD 等材料,作為學習之用。

六、科技平台(technological platform),發展電算器讓每個學生使用,教室裡有高效能的電腦、VCD 播放器、監控裝置等。

MiC 雖然是美國和荷蘭合作一起開發出來的中學數學課程,其共同的哲學理念均是「視數學為人類的活動」。不過,Dr. Romberg 拿到荷蘭最初編出來的材料之後,便加以「美國化」並且在美國本土測試、修改,最後才出版。基本上,所謂的「美國化」主要是將其中的課程內容設計、教學方法和評量,以美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM)出版的各項標準,如數學課程與評鑑標準(NCTM, 1989)、教學專業標準(NCTM, 1991)和評量標準(NCTM, 1995)為依歸。所以, MiC 課程的目標就是要發展學生的數學能力(mathematical abilities)或數學功力(mathematical power) (NCTM, 1989)。而其中評量的目的也是針對學生數學能力或功力的發展情況加以評估。

參、「型與符號」的單元目標

在 MiC 課程中，一共包含了 40 個單元。每個單元都固定有三個「大目標」且都是一樣的，亦即評量學生的「概念性和程序性的知識」、「推理、溝通、思考、連結」、「建模、解非例行性問題、分析批判、類推」等。在這些「大目標」底下，再依單元主題的不同，分別列出若干個不同的「子目標」。茲以「型與符號」為例，進一步說明如下：

一、概念性和程序性知識

- (一) 從排列好的物件、圖形和符號中認識其中的”型”(patterns)。
- (二) 有效地使用符號表徵”型”。
- (三) 確認和創造可反覆的、對稱的型。
- (四) 發展配對的概念，以及奇、偶數等概念。
- (五) 透過組合創造出等價、縮短的型。

二、推理、溝通、思考、連結

- (六) 使用配對、對稱、奇偶數、符號、方向等，作有關型的推理。
- (七) 確認用來描述反覆、對稱和成長的型的規則。
- (八) 從描述當中，產生、拓展、轉換型。
- (九) 在解題中，作視覺與符號表徵之間的轉換。

三、建模、解非例行性問題、分析批判、類推

- (十) 從型當中，類推其中的關係和規則。

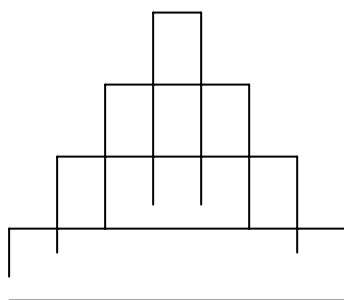
在「型與符號」這一單元之中，MiC 的教學內容與評量問題，均以上述這三大目標及其中十項子目標作為設計的基礎。換言之，課程的設計就是依據上述這些目標來培養學生學習「型與符號」這方面的數學能力或功力，並作為發展評量的架構和依據。綜合觀之，MiC 課程的目標導引了教學的內容和評量的方向，因此教師進行教學與評量時，對於課程目標的釐清相當重要。

肆、配合單元目標設計的評量問題

承上述，學生在「型與符號」這單元的數學功力被置換成「單元目標」具體描述之後，評量也依據這個單元目標所形成的架構來設計。

在 MiC「型與符號」這個單元的內容，一共分為六段(section A~ section F)，每一段都有一個主題，例如，section A 的主題是”配對”(pairing)、section F 主題是”更多的符號和積木”(more about symbols and blocks)。評量的題目則設計在每一段落的最後，即所謂「總結問題」(summary questions)，例如：section A”配對”這個主題，在學生學完主題內容的最後會有二個總結問題：

一、「決定下列圖形是否是偶數或奇數個方塊。解釋你怎麼知道的。」



筆者根據該教師手冊加以分析發現，這個問題實際上是要評量上述十項子目標中的 1(從排列好的物件、圖形和符號中認識其中的”型”)和 6(使用配對、對稱、奇偶數、符號、方向等，作有關型的推理)。學生可能的答案則有「全部點數、配對著數、畫圖重新排列」等。教師可再根據學生的回答，再自行設計評分的方式。

二、「寫下奇數和偶數之間的差異。」

這個問題則是要評量學生十項子目標當中的 4(發展配對的概念，以及奇、偶數等概念)，學生的答案也可能有很多樣。至於第 10 項子目標的評量題目，在 section F 的總結問題裡有這樣的一個範例：

- a. 假設你知道一列由站立和躺下的積木組合起來的長度。若要知道一個躺著的積木有多長，你還必須要知道些什麼？寫下來。
- b. 在一排積木當中，改變站著和躺下的積木，並形成自己的規則。選擇一位同伴並運用自己的規則，把一列積木盡可能的改成最短。你的規則都能夠把一列積木變短一點嗎？

從上述所舉的例子，包括 section A 和 section F 共四個問題範例，可以得知我們究竟要評量學生什麼？其實答案都在單元目標裡面了。此外值得一提的是，這些總結問題並不是我們常提到的總結性評量，它仍是在教學中進行的評量，所以他們又稱之為進行中的評量(ongoing assessment)。另外，在整個單元教完之後，MiC 還編入了一些所謂單元結束後的評量(end-of-unit assessment)。例如，送花(delivering flowers)(如附件)。筆者根據該教師手冊的分析，「送花」其中的評量題目，是可以用來評量上述子目標的第 2,5,8 和 10 項。另本文作者分析「型與符號」這個單元得知，其中類似「送花」這樣的評量題目一共有四個，手冊中建議老師可以僅選擇其中一項來評量，也可以全部評量，可以在學校課堂上做，也可以帶回家當家庭作業，既多元又很有彈性。

伍、 哪些評量方式可以提供有用的訊息？

除了上述的評量題目可供我們作為發展評量的參考之外，MiC 的課程裡也建議老師可以從以下這幾個方向來看學生數學功力的成長與改變：

- 一、師生的對話和訪談。
- 二、教學中，利用檢核表作觀察記錄。
- 三、學生作品檔案。
- 四、學生的札記或其他自我評量資料。
- 五、紙筆測驗。

- 六、實作。
- 七、寫報告或文章。
- 八、模型製作展覽。
- 九、計畫或其他任務
- 十、在教學中發表。
- 十一、二階段考試(考試→回饋→訂正→給類題再做)。
- 十二、回家做作業。
- 十三、同儕評量。

在這麼多種評量方式中，教師可以透過「問、看、聽」等方式瞭解學生做數學活動的表現品質，教師必須要特別注意「平衡的問題」，也就是教師看到的和學生做的作品之間必須取得平衡，才不致於造成過度主觀的評量。所以，評量最好不要只侷限在某一種方式，評量訊息的取得也不應只有一條管道而已。

陸、計分方式

MiC 的計分方式視題目的類型而定，而且主張評量的過程和結果同樣重要。它並且建議教師應該看學生回答問題的內容當中所包含的數學，而不是只看答案的正確與否。學生的解答有它的複雜度、成熟度和精緻度，老師可以根據這些來評分。通常，可以給一些關鍵字(key words)，例如：正在浮現(emerging)、發展中(developing)、快要達成(accomplishing)、精通(proficient)、開竅了(enlightened)、超好(exceeding)等，用來描述學生數學解題、推理和溝通的技巧。教師也可以給一些短語以及等第來描述學生數學能力的成長，這樣會比只給一個分數要好。由此可知，MiC 的評量其實並沒有反對給學生分數，但如果只有給分數，則看不出學生對數學的理解、技巧和態度，以及學生學習上的問題。所以，最好加上一些評語來描述會較清楚些。

此外，MiC 也建議教師公開地和學生討論彼此之間的期望，並且讓每位學生

知道自己的學習成就和進步情形，亦即師生共同參與評量的活動。

柒、 啟示

從美國威斯康辛大學數學科學教育研究中心發展的這套中學數學課程(MiC)來看，我們很清楚的知道它的教學目標，是要培養學生的數學能力或功力，而教學內容和評量的設計也都跟著這個目標來發展。MiC 希望能夠透過評量讓學生再次獲得學習的機會，並且知道自己的進步情形，教師也可以從評量當中獲得一些有用的訊息，作為教學改進的參考。

如果再拿上述 MiC 中「型與符號」的教學內容和上述所舉的一些評量實例來對照便可以發現，它的問話方式、問題內容、問題情境其實都和當時教學所給的問題情境相當類似，表面上並沒有太大的差異。但實際上，兩者是有區別的。因為，在一個熟悉的情境下，探索新的概念，和在一個不熟悉的情境下，探索舊概念是不同的(Romberg et al., 1991, p.151)。前者屬於教學，也就是讓學生在熟悉的情境下學習新概念，後者則屬於評量，也就是把學過的概念，再加以運用。尤其學生運用所學概念在解非例行性的問題上，對於評量學生的數學功力扮演十分重要的角色。所以，對學生而言，問題情境中的概念是新的，則屬於教學的範圍，而概念已經學過了，給定的問題情境是新的，則可以作為評量的題目。

MiC 這套數學課程的內容、教學方法和評量可以說發展的相當完整而連貫。作者撰寫本文的目的之一便是他山之石可以攻錯，而不是全盤倣效。畢竟美國的教育政策與教學環境和國內截然不同。我們從本文所介紹 MiC 課程裡的評量，可以了解它的特色便是目標清楚、多元、有組織和連貫。現今國內教師在九年一貫課程改革的氛圍之下，如何在忙錄的教學工作之餘又能兼顧評量呢？作者建議在學校擔內數學學習領域課程發展的委員們，利用每年寒暑假備課週完成數學課程計畫(通常不到一天即可完成)之後，再撥出一些時間和學年主任共同合作編寫適合於各年級學生的數學評量手冊，進行方式可參考本文所介紹內容，先討論釐

清我們的數學教育要培養學生什麼能力？我們的課程、教學和評量的目標在哪裡？再從教材內容及學校建立(或書商提供)的題庫中挑選或設計符合各單元目標的評量題目及評分標準，如此逐步累積，逐年修正，工作份量便會愈來愈減輕。九年一貫數學課程的實施，也會因為教師如此專業的評量計畫而更加落實。

參考文獻

Mathematic in Context(1997). *Patterns and Symbols: Teacher Guide*, p. 117.

Encyclopedia. Britannica Educational Corporation.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Romberg, T. A., Allison, J., Clark, B. A., Clark, D. M., Pedro, J. D., & Spence, M. (1991). *A blue-print for mathematics in context: A connected curriculum for grade 5-8*. Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

附件

Name _____ Date _____

DELIVERING FLOWERS

Use additional paper as needed.

Suppose that you deliver flowers for a flower shop. You are paid by the number of deliveries you make. The city map is a grid, and each square in the grid is equal to five minutes' travel.

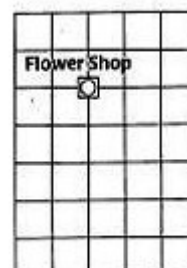
Here are the directions for three deliveries:

- A. *SWSWSEENE*
- B. *ENESSW*
- C. *WSWSENE*



1. Use the grid on the right to locate the place for each delivery. Label the destinations A. B. and C.

2. Can you make all three deliveries in one-half hour or less? Explain your answer.



(引自 MiC, 1997, Patterns and Symbols: Teacher Guide, p.117)

等量公理前置教學活動之實踐與探究

王志銘¹

康淑娟²

雲林縣文安國小

國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本研究主要目的為探討等量公理前置教學活動之實踐歷程，期望在教師教導等量公理前，透過研究者所設計三個教學活動，對教師在教導學生等式概念與等量公理間的銜接能有所幫助。本研究的教學活動設計以等式概念的教學活動出發，逐漸加入文字符號(未知數)於其中，讓學生有了基本的等式概念後，再利用等式的概念來求簡單的符號未知數。

而研究結果顯示：透過半具體的鑽石圖，多數學生可正確使用算式表現固定的數值(鑽石數量)，且能理解數值相等等式成立的概念；透過由具體轉成半具體的代數天秤，學生經由運算判斷天秤是否平衡，且以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答；學生在解兩等式同時成立的問題時，傾向使用較熟悉之乘除法互逆的解法，此外本研究也發現，部分學生對於以分數的方式呈現等式關係(如： $4 = \frac{\triangle}{3}$)較難理解，而以除式的表示方式呈現時(以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$)，則會有較好的表現。在活動實踐後，本研究有以下建議：一、加強學生對於算式中「括號」的認識，例如：括號內的數值可解釋為是「同一群」或「同一類」，學生較易體會；二、強調相同符號代表相同數值，部份學生易誤解相同符號所代表的意義不相同，教學時應要特別提醒學生「同一題中，相同符號代表相同的數值」。

關鍵詞：等量公理、教學活動、等式概念、符號未知數

壹、研究背景與目的

民國九十二年公佈之九年一貫數學能力指標中，六年級學童應能理解等量公理，了解等式左右同加、減、乘、除一數時，等式仍然成立的概念(教育部，2003)。而各家版本之教科書，為能配合自九十四學年度起，自一年級及七年級逐年實施的數學課程正式綱要，於是在課本單元之後加入補充教材，以康軒版為例，即有「等量公理與解題」的單元活動。對於國中教師而言，等量公理是個熟悉的名詞，但就國小教師來說，是個全新的嘗試，在九十二年十一月教育部公佈九年一貫數學課程綱要之前，運用「等量公理」來解未知數的教學活動是到國一才開始教授，因此，等量公理對國小教師教學上是個新考驗。

而等量公理與等式概念有著密不可分的關係，根據廖瓊菁(2001)的研究發現，在國小六年級代數教學教材中，「等式」代表等號左右兩邊的值相等的想法，是學生由算術轉換為代數的關鍵概念，亦是學生學習等量公理的基礎。無庸置疑的，等量公理是學習代數的重要轉折點，而「等式」概念又是等量公理的重要基礎概念，如果能提昇學生對等號概念及符號未知數(代數)的理解層次，將能改善現行國小代數教材及教學設計上的缺失，並與等量公理作較佳的銜接，這對代數概念的教學將會是有助益的。

「等式」概念乍看之下非常容易，但卻也常是學生疑惑之所在。例如，學生在面對等式時，會誤認為等號右邊應該是等式左邊運算出來的結果，而未經運算的數字應該擺放在等式左邊(邱志賢和毛國楠，2002)，簡單來說，學生可能了解 $3+5=8$ ，但不一定認同 $8=3+5$ 。而廖學專(2002)發現學生並未真正了解等式是一種「等價概念」，右邊等於左邊，右邊也會等於左邊。在學習代數時，學生常認為等號是掌控一個算術運算的執行命令，而不是認為等號是比較兩個量的關係的符號，這是造成學生在代數運算上學習困難的原因之一(廖瓊菁，2001)。而等量公理的學習不但是等式兩邊等量的關係，並含有對文字符號概念的理解。因此，本研究目的是想藉由研究者所設計的三個教學活動來作為學生學習等式概

念到等量公理之間的橋樑，讓教師在教導等量公理前，以等式概念教學為出發點，然後慢慢加入文字符號(未知數)於教學活動中，待學生有了基本的等式概念後，再利用等式概念來求簡單的符號未知數，最後教師再進入課程中等量公量的教學活動。

貳、教學活動設計

一、活動設計理念

數學本身是抽象的符號，不易讓學生產生興趣，而故事情境可以使數學變得更有趣、生動，讓學生在面對數學能不再懼怕，並在好奇心的驅使下，樂於挑戰與學習。情境學習理論強調知識是學習者與情境互動下的產物，是在教學活動中透過主動地探究與摸索的過程中獲得 (Brown, Collins, & Duquid, 1989)。因此，本研究一開始的教學活動即以學生所喜愛的偵探故事來引導，期望學生能在挑戰偵探謎題的故事情境下，提高學習興趣，達到有效的數學學習。例如：以福爾摩斯的解碼及柯南救小蘭的偵探卡通故事為教學活動的開端，引起學生的學習興趣。

在數學教育中，提供學生適當的具體學習經驗、半具體學習經驗、及抽象的學習經驗，有助於學生學習 (劉秋木, 1977)。以等式 $5 \times \square = 2 \times \triangle$ 的教學為例，就可先讓學生實際操作塑膠教具天秤，當右邊放 1、2、3.....10 個積木時，左邊要放幾個才能使得天秤平衡，藉由反覆的具體操作形成心像，成為運思的圖像，之後漸漸轉變至半具體的圖像表徵 (如以「 \square 、 \triangle 」代替積木)，再提升至抽象的符號(如 X、Y)，幫助學生將運思活動對應到符號中，在屢次的活動經驗瞭解並內化 $5 \times \square = 2 \times \triangle$ 的概念。因此，研究者在教學活動一中使用具體的天秤操作情境及半具體的鑽石圖表與代數天秤的圖像表徵方式，讓學童對於純符號的等式為兩邊等價的概念有更具體的體會。同時於教學活動二中加入抽象的符號未知數於等式之內，將等式概念與符號未知數結合，讓學生利用天秤平衡即兩邊相等的概念，求出符合條件的值。研究者於活動三希望學童運用活動一與活動二所學習到

的等式概念與求符號未知數的解的經驗，配合等式成立的條件，能解出符號未知數所代表的值。

根據研究發現，等量公理的代數教學在以多元化的符號表徵未知數，以及利用「天平圖」提昇學生的「等號概念」層次等方面有其教學成效(廖瓊菁，2001)。研究者即以此概念為出發點，參考美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，以下簡稱 NCTM)出版的「3-5 年級代數導航(Navigating through Algebra in Grades 3-5)」，設計三個等式概念教學活動並進行實際教學，透過實際教學活動經驗、學生學習單及學生訪談，對這些教學活動進行探究。

二、 教學活動程序介紹

教學活動一主要是要給予學生基本的等式概念，讓學童可以理解算式與算式之間的等式是成立的，如 $9+4\times 4=7+2\times 9$ 是對的，研究者透過半具體表徵的鑽石圖，讓學生先了解「25(鑽石圖的鑽石數量)」可以由不同的算式來表示，而這些算式也因為它的值都相等(都等於 25)，所以算式與算式是相等的，它們之間的等式是成立的。在此研究者著重於基本的算式間的等價關係，讓學生了解不同算式間，只要值相等，等式即立；等式成立，那麼兩邊算式所表示的量就是一樣的。

經過教學活動一讓學生經驗算式間的等式關係後，教學活動二裡研究者利用學生已經於「教學活動一」經驗的算式等式關係，進行「代數天秤」是否平衡的判斷，由於代數天秤兩邊所放的不再是具體的積木，而是「數字」所組成的算式，因此學生需經由計算算式的數值，來判斷天秤是否平衡，兩邊是否相等。接著研究者將等式概念與符號未知數結合，在代數天秤的兩邊加入符號未知數

($5\times \square=2\times \triangle$)，設定代數天秤在平衡條件下，要學生利用天秤平衡即兩邊相等的概念，求出符合條件的值，在此，符合條件的符號未知數的值會有很多可能。

教學活動三中，研究者想讓學童運用活動一與活動二所學習到的等式概念與求符號未知數的解的經驗，使用邏輯思考的方式，配合等式成立的條件，求出符號未知數。經過教學活動三後，學生能依等式成立的條件，求出符號未知數的值，然後教師即可導入等量公理的教學活動。另外，在教學活動中，研究者提出三種

解法讓教師講授，學生可以依自身的理解喜好選擇所要採取的策略，主要目的是希望學生能體驗到只要等式條件成立，不管從何處著手，皆能求出未知數，代數的解法是多樣化的，不用拘泥於某種方法。

三、 教學活動設計

下面為本研究之三個等式概念教學活動，活動設計如下：

(一) 教學活動一

活動主題	解碼大偵探
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> 1. 了解同樣數值可以用不同算式表示 2. 不同算式所得的值有可能相同 3. 了解兩邊算式的數值相等，則等式成立
活動流程	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師引導：偵探福爾摩斯到一個神秘的房間，發現牆壁上有一幅鑽石排成的圖案，其中竟然隱藏著「數字密碼」，你能幫忙他找出密碼的可能的組成樣式嗎？ 2. 教師於黑板揭示圖 1 之兩鑽石排列圖，並說明數字密碼是一算式，其值等於圖上鑽石的個數，請同學想想可能的答案。 3. 教師圈出圖 1 之結果，如圖 2，再寫出各自所代表的算式。 4. 教師提問：兩圖的鑽石個數相等嗎？那底下那個算式相等嗎？(揭示兩算式所代表的值相同，兩算式相等，完成如圖 3。)請問學生是否加上兩算式後如圖 4，等式也成立嗎？ 5. 請學生完成學習單（附件一），並想一想，你所寫出來的算式都相等嗎？

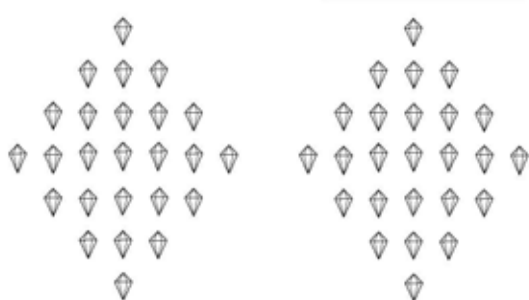


圖 1 鑽石排列圖

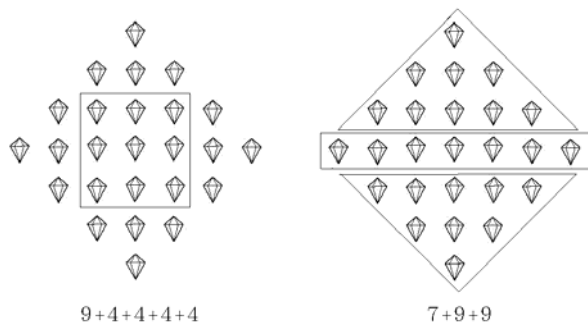


圖 2 圈出數字的可能組合，與寫出可能的式子

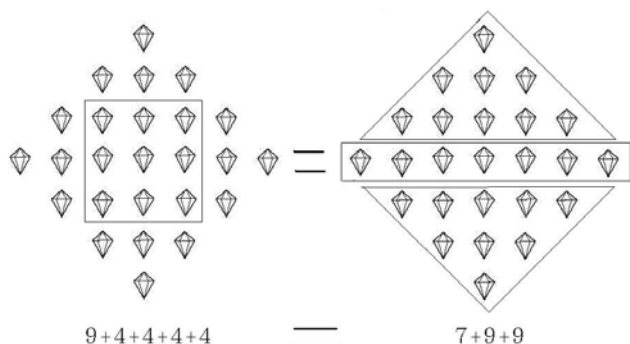


圖 3 鑽石個數相等，故算式相等

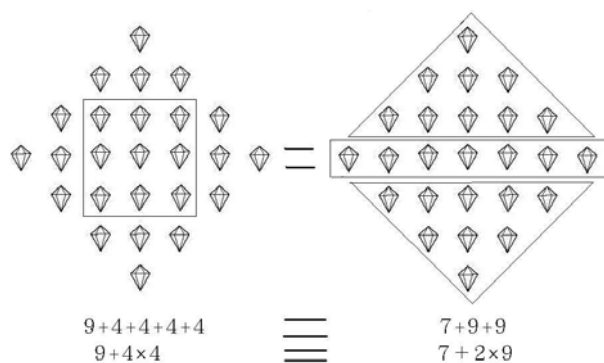


圖 4 算式數值相等，等式成立

(二) 教學活動二

活動主題	代數天秤
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能判斷兩個算式是等式或不等式 2. 了解等式的兩邊的數值必須相等 3. 能利用等式的性質找出算式中符號所代表的未知數
活動流程	<ol style="list-style-type: none"> 1. 各組分發塑膠教具天秤一組及積木，請學童實際使用天秤來秤積木，觀察平秤在怎樣的情況下才會平衡？右邊放 1、2、3...10 個積木時，左邊要放幾個呢？ 2. 教師於黑板揭示圖 5，天秤上放上數字，這個天秤會平衡嗎？如果會為什麼呢？如果不會，它應該會是什麼樣子？教師揭示圖

- 6, 說明天秤上算式值較大的一邊會下沉。
3. 教師使用圖 7 的代數天秤, 當天秤平衡時, 符號所表的數可以是多少? 教師舉例說明, 並畫出表一, 讓學生共同完成。
4. 請學生完成學習單(附件二)

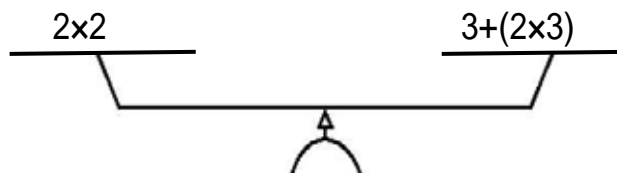


圖 5 數字天秤

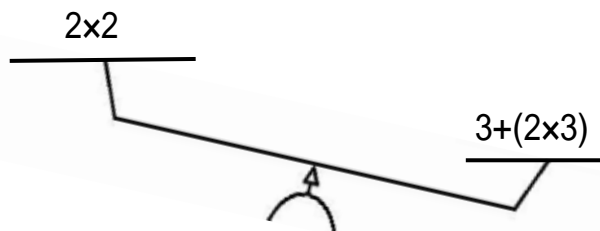


圖 6 天秤兩邊數值不相等時, 會往值大的一邊下沉

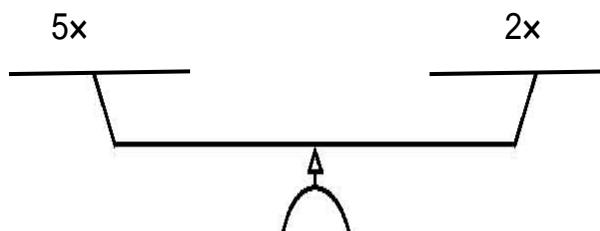


圖 7 代數天秤是平衡的狀態, 符號所代表的數的多少

表一 天秤平衡數值表

□	△
2	5
4	
6	

(三) 教學活動三

活動主題	我是大「判」官
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	1. 能使用邏輯思考兩步驟找出符合兩等式中符號所代表的未知數
活動流程	<p>1. 教師引導：以名偵探柯南為故事主角，說明柯南必需解題壞人所佈下的迷題，才能救出小蘭。</p> <p>2. 教師說明圖 8 兩個天秤均為平衡狀態，柯南需求出兩天秤中的 \square、\triangle 所代表的未知數，請學生發表自己的方法。</p> <p>3. 教師引導學生思考下列三種解法。</p> <p>4. 學生依照自己所學習的方法，運用來解學習單（附件三）。</p>

解法一

如果 $\frac{\triangle}{2} = \square$ ，
 那麼 $\triangle = \square\square$ ，
 而且 $\triangle\triangle = \square\square\square\square$ 。
 因為 $\triangle\triangle$ 和 8 平衡，
 所以 $\triangle\triangle = 8$ ，
 $\square\square\square\square = 8$ ，
 因此 $\triangle = 4$ ，
 $\square = 2$ 。

解法二

因為 $\triangle\triangle = 8$ ，
 所以 $\triangle = 4$ ，
 又 $\frac{\triangle}{2}$ 和 \square 平衡
 所以 $\frac{\triangle}{2} = \square$
 代入 $\triangle = 4$
 $\frac{4}{2} = \square$
 $2 = \square$
 $\square = 2$

解法三

因為 $\triangle\triangle = 8$ ，
 可以記成 $\triangle \times 2 = 8$ 或
 $2 \times \triangle = 8$
 $\triangle = 8 \div 2 = 4$ ，
 $\triangle = 4$ 。
 又 $\frac{\triangle}{2}$ 和 \square 平衡
 所以 $\frac{\triangle}{2} = \square$
 代入 $\triangle = 4$
 $\frac{4}{2} = \square$
 $\square = 2$

解法一：此解法是參考 NCTM 教學導引所寫，從圖 8 上方天秤的平衡狀態，先求出 \triangle 與 \square 兩符號間「整數個」符號的等量關係，再由下方天秤

的相等關係，各別求出 \triangle 與 \square 的值，其中含中遞移的等量關係，如因為 $\triangle\triangle=\square\square\square$ ，又 $\triangle\triangle=8$ ，所以 $\square\square\square=8$ 。

解法二：從圖 8 下方天秤的平衡狀態，直接求出 $\triangle=4$ ，再由上方天秤的平衡狀態，代入下方天秤所得的結果 $\triangle=4$ ，求出 $\square=2$ 。

解法三：與解法二雷同，只是在於 $\triangle\triangle$ 改成以 $2\times\triangle$ 來表示，此處研究者想藉此讓學生了解純符號($\triangle\triangle\triangle\triangle$)也可以用更簡單的方式來表示($4\times\triangle$)，更方便計算。

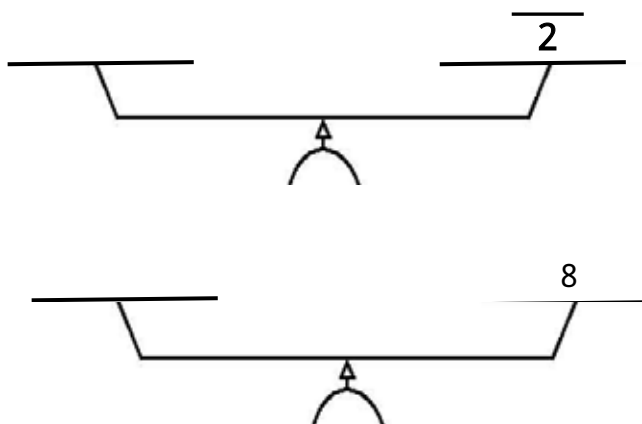


圖 8 兩代數天秤是平衡狀態，求出天秤中的符號未知數。

參、教學實踐

本研究教學實施對象為五下學生，共 21 人(11 男，10 女)，屬於小班教學。在經由研究者課室中從旁觀察、教學後根據學習單與學生訪談，並和合作教師進行教學討論，其教學實踐結果分析如下：

(一) 多數學生可正確使用算式表現固定的數值：

在教學活動一當中，教師是以鑽石圖(25 顆鑽石)來讓學生自由的寫出算式，雖然程度較低的學生對於數值的算式表達，最常以加法來表現，如：

$1+3+5+7+5+3+1$ ，但也發現該班有近 $\frac{2}{3}$ 的學生能同時運用加法及乘法，多樣且

正確的表現出數值為 25 的算式。在學生的學習單中(如圖 9、圖 10)，我們可以發現小甫和小清在創造算式時，能夠靈活運用加法和乘法，尤其是小清部分，其

清楚地知道要先運算所圈出的上下兩部分(1+3+5)，因此賦予括號。但這個部份同時也是許多小朋友在列出算式時，時常會忘記的部分，因為學生通常很直觀的將自己所畫分的區塊轉換成數字，因而發生列式的錯誤（如圖 11），研究者訪談中也發現學生照著所圈的圖，寫出錯誤的算式而不自覺。此與邱志賢與毛國楠（2002）的研究結果有同樣的發現，學生雖有四則運算的概念，但在列式時卻時常會忽略括號，或是不當使用括號，而導致於列式或是解題的結果錯誤。

T：這個式子你是怎麼寫出來的(指著學習單的算式)？

S：就照著圖寫下來的。

T：那你可以告訴老師為什麼照圖是寫 $1+3+5 \times 2+7=25$ 呢？

S：嗯...就上面這個圈的有 1 個、3 個、再來 5 個...然後有上面和上面都一樣，所以 $\times 2$ ，中間還有...7 個再加上去。

T：那這個算式會等於 25 嗎？

S：會啊！

T：那你算一下這個式子的答案是不是 25？

S：...嗯.....好像不是...

T：那要怎麼寫才對？

S：...再上加括號

(訪 950623-S 小曄)

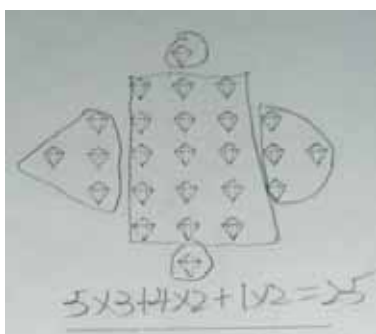


圖 9 小甫運用加法和乘法列式

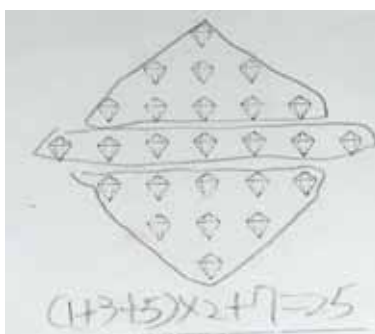


圖 10 小清運用括號列式

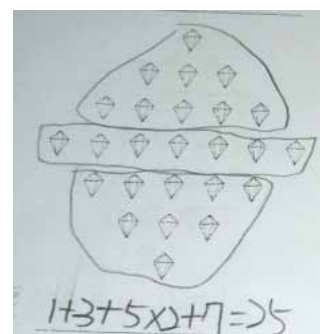


圖 11 小曄直觀的錯誤列

(二) 學生能理解數值相等等式成立

教師透過鑽石圖的引導，讓學生先了解 圖 1 鑽石排列圖兩邊的鑽石數量是

一樣的，然後分別在鑽石圖上圈分出來，經由兩個圖與算式的對照，學生知道相同的數值可以用不同算式來代表，而不同算式與算式之間的值若相等，可以用等號來連接，而成為等式。研究者與林老師的課後討論中，林老師興奮的表示學生上課反應很好，對於班上較低程度的學生，也知道老師所講的：

「這個鑽石圖的效果很棒，這樣一步一步的讓學生來看，學生很容易就懂不同的算式間會相等，連我們班的小佑(班上程度較低者，平常反應很慢)他也有反應。」(訪 950622-林師)

林老師：來，那小佑，你告訴大家下面的這兩算式會不會相等(指 $9+4+4+4+4$ 與 $7+9+9$)？

小佑：……會吧(反應不是很快)

林老師：為什麼會相等呢？

小佑：...因為圖都一樣多。

林老師：圖的什麼一樣多？

小佑：鑽石。 (觀 950622)

而從研究者的訪談中，也得到學生經過體驗半具體的圖象表徵而連結到算式，體會不同的算式，也可能因為值的相等而相等：

T：你所寫的 $9 \times 2 + 7$ 和 $9 + 4 \times 4$ (指出該生學習單所寫)我可以寫成

$9 \times 2 + 7 = 9 + 4 \times 4$ (寫在旁邊)嗎？

S：可以啊！

T：為什麼可以？

S：因為都是 25 啊！

T：你怎麼知道都是 25？

S：就它們都是等於上面的鑽石啊！ (訪 950623-S 小儒)

(三) 學生能接受具體物轉換成數字與符號，並經由運算判斷天秤是否平衡。

教學活動二中，研究者先讓學生從操作真實的天秤，然後再將真實天秤轉為用圖像天秤表示，天秤上原本為「具體的積木」，也改成「數字算式」，學生在經

歷教學「活動一」後，很自然的能接受天秤上放置數字與運算符號的算式，並且能判斷兩邊是否相等(平衡)。如圖 12 中，學生小靜能先計算天秤兩邊是否為等值，然後再進一步判斷兩邊是否會是平衡狀態。雖然在判斷天秤是否平衡的過程中，學生會因為整數四則運算的錯誤，而導致判斷失誤，但學童已經具有天秤兩邊必需等量才會平衡的概念，從圖 13 中可驗證研究者的說法，學生小萍對於右邊算式「 $(5 \times 1) + (57 - 17)$ 」運算失誤為「200(正確應為 45)」而導致天秤狀態的判斷錯誤，但以另一方面來看，學童已經知道天秤在什麼條件下才會平衡了。

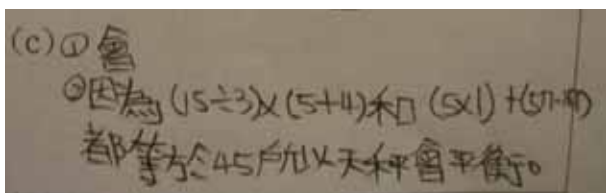


圖 12 小靜先計算再判斷天秤是否平衡

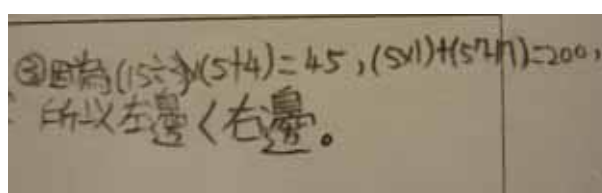


圖 13 小萍因計算錯誤而導致判斷失誤

(四) 學生以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答。

在解決代數天秤兩邊符號數值的問題時，學生採用的方式，與教師教學時的方法相同，均以代入數字，嘗試錯誤的方式來進行。以下是學生學習單中的解題(如圖 14)：

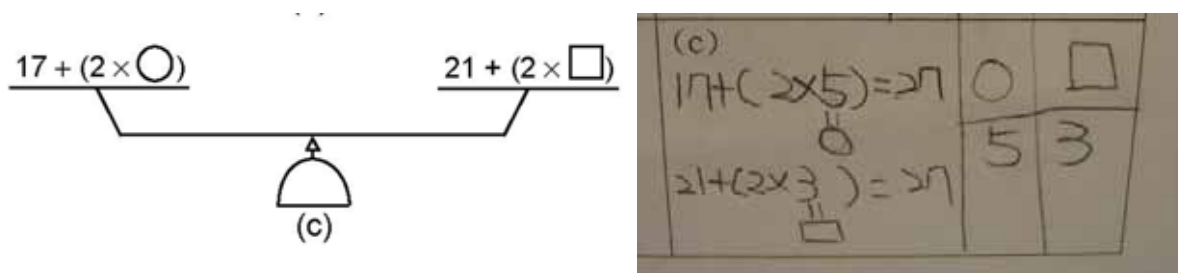


圖 14 小靜以嘗試錯誤的方法解題

解題時，學生試驗發現，在天秤平衡兩邊相等的條件下，當○代入 5，□代 3 時，符合平衡關係，故為其解答。而在運用天秤兩邊相等的關係求未知數時，有部份學生跳脫教師的教法，已可自行運用乘除互逆來解題(如圖 15)。

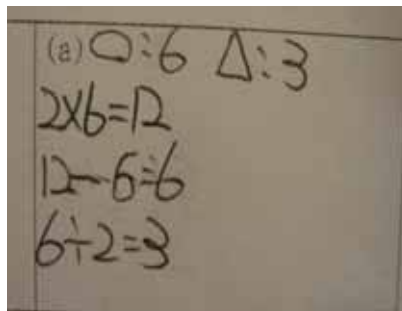
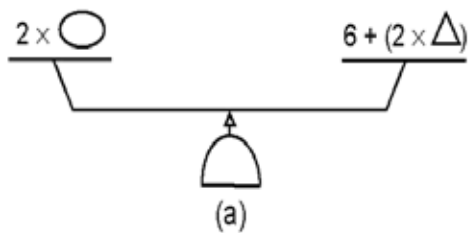


圖 15 小綉運用乘除互逆解題

(五) 部份學生誤解相同符號所代表的意義

學生對於學習單中天秤上的符號未知數，雖能了解符號均代表一個未知數，但忽略了「相同符號」，在同一題目中應代表「同樣的數值」。下面的學習單及訪談可以驗證研究者的說法：

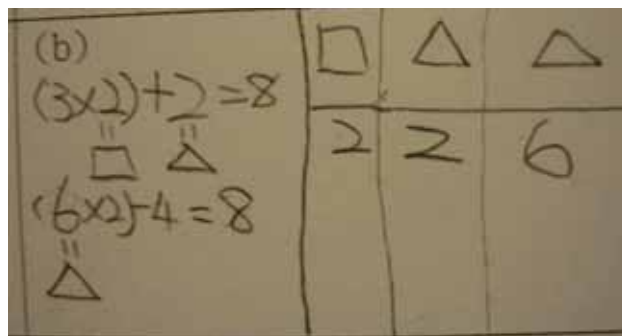
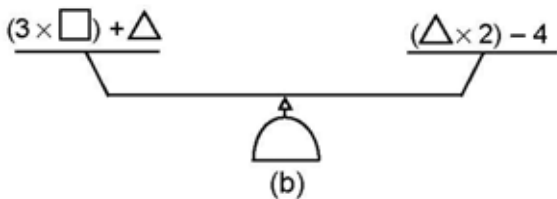


圖 16 小靜不知相同△代表相同的值

T：那你這裡的三角形(Δ)兩個算出來的答案怎麼不一樣？

S：它們都是符號啊！不是代進去相等就可以嗎？

T：不是…同一題的天秤，相同符號代表的是相同的數。(訪 950628-S 小靜)

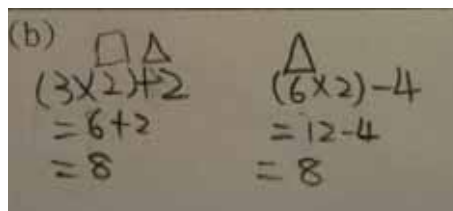
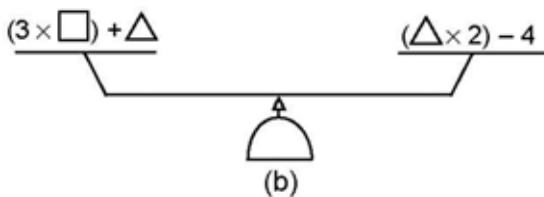


圖 17 小萍不知相同△代表相同

T：小萍，你這一題兩個三角形（圖 17）為什麼代表不一樣的數呢？

S: ...

T: 那你覺得這兩個三角形代表一樣的東西嗎?

S: 是吧?

T: 那答案怎麼會不相同呢?

S: ...想錯了, 所以...兩個三角形應該要一樣吧?

T: 沒錯!

(訪 950628-S 小萍)

(六) 學生較傾向於使用「解法三」來解題

在教學活動三中, 根據學生上課的反應及學習單的解法, 發現「解法一」(源自 NCTM 教學導引)較不為學生所採用, 學生較能接受「解法二」及「解法三」, 而其中以「解法三」為大部份學童所使用的解題方式, 經過教學者與研究者討論, 認為其與學生的先備知識有關, 學生因有乘、除法逆運算的能力, 而「解法三」為三種解法中最直接又簡化之解題方式, 因此, 學生大多採用此方法解題。底下為研究者上課觀察:

小甫:「老師, 為什麼不直接用第三種就好了?」

老師:「為什麼呢?」

小甫:「比較簡單啊!」(多數人應和: 對啊!)

老師:「那第一種不好用嗎?」

小甫:「不好用, 太多了。」

小維:「有點複雜。」(插入對話)

(觀 950629)

(七) 部份學生對於「分數符號未知數」的等式關係較難理解

雖然部份學生對於「分數符號未知數」的等式, 可以很清楚的以天秤兩邊等量關係來解題 (如圖 18), 但總括來說, 學生對於天秤兩邊為倍數關係的等式關係(如: $6=2\times\square$)較能了解, 能運用乘除逆運算來求值($\square=6\div 2=3$), 但對於天秤兩邊有「分數符

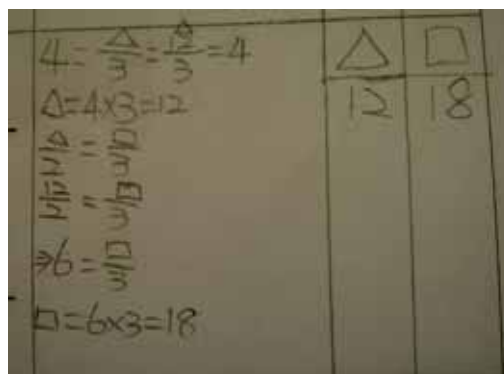


圖 18 小汶以等量關係來解題

號未知數」的等式關係，則解題錯誤較多，雖然國小五年級學童已學習過分數，但對於具分數型式的符號未知數之等式，仍有困難。多數學童對於「 $4 = \frac{\triangle}{3}$ 」的想法，雖認為是表示 $\frac{1}{3}$ 個 \triangle 和4相等，但對於接著要求一個 \triangle 為多少則有困難，有趣的是，當研究者訪談時，提醒學童「 $\frac{\triangle}{3}$ 」就是「 $\triangle \div 3$ 」，「 $4 = \frac{\triangle}{3}$ 」也就是「 $\triangle \div 3 = 4$ 」，則大多數的原本求不出 \triangle 之值為多少的學童，都能以「 $\triangle = 4 \times 3$ 」求出 $\triangle = 12$ ，可見乘除法逆運算對學童而言還是較熟悉的概念。因此，在研究者與教學者討論後，認為教學活動三應以「除式」來取代用「分數」表示「分的符號未知數」，例如：以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$ ，或將「除式的符號未知數」放置於「分數符號未知數」之前，且提醒學童兩者之關係（例如： $\frac{\triangle}{3}$ 也就是 $\triangle \div 3$ ）。

(八) 部分學生仍會以「嘗試錯誤」方式解題，非用邏輯推理的方法。

雖然於教學活動三時，教師以邏輯推理的方式講述解題，但部分學生受「活動二」的影響，將題目中應同時成立的兩天秤「分開解題」，以「嘗試錯誤」的方式解題，一一代入數字於天秤符號中(如圖 19)。若各別來看兩天秤，其答案均符合兩邊相等的平衡關係，但在此兩天秤的平衡關係不但是要同時成立，而且所代表的符號的值是相同的，雖然老師課前再次強調，但仍有部份學生發生活動二中的錯誤，未將同題中的符號視為相同的值。

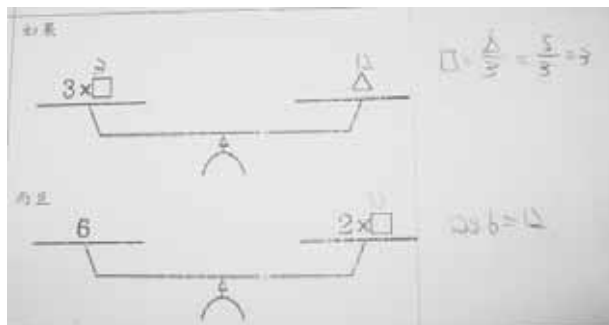


圖 19 小緯誤將兩天秤分開處理

肆、結論

本研究旨在探討學童於等式概念教學活動中之學習表現，從教學活動設計出發到實際教學活動進行，由現場觀察、學生訪談及與教學者之討論，探究教學活動中學生發生之點滴。以下為實施完以述三個教學活動後，所提出的三點建議：

(一)加強學生活括號的認識

學生實際教學中，學生經由教學活動一中半具體的鑽石圖，多數學生可正確使用算式表現固定的數值(鑽石數量)，且能理解數值相等等式成立的概念，但於教學時，應加強學生對於算式中「括號」的認識，例如：括號內的數值是代表鑽石圖中的「同一群」或「同一類」，所以要把它們一起放在括號內，跟「圈起來」是同樣的意思，如此，學生較易體會。

(二)相同符號代表相同的數值

教學活動二以具體天秤轉為半具體的代數天秤，學生能接受具體物轉換成數字與符號，並經由運算判斷天秤是否平衡，且學生以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答，但部份學生易誤解相同符號所代表的意義，因此，進行教學活二時，要特別提醒學生「同一題中，相同符號代表相同的數值」。

(三)用「除式」的表示方法來取代「分數」

經由教學活動三，研究者發現學生由於較熟悉乘除法互逆的運算，於解兩等式同時成立的問題時，較傾向於使用乘除法互逆的解法來解等式問題，另外研究者也發現，部份學生對於「分數符號未知數」的等式關係(如： $4 = \frac{\triangle}{3}$ 或 $\frac{\triangle}{2} = \frac{\square}{3}$)較難理解，但若用「除式」的表示方法來取代「分數」的表示方法，例如：以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$ ，則有較好的表現。

以上的教學活動實踐，研究者藉由學生表現與研究發現的呈現，提供教師進行「等式概念」教學活動之參考，期待未來國小教師所教學的不止於「等量公理」，

而可以於等量公理教學前，更能加深學生對於等式概念的了解。

參考文獻

- 吳宛儒、蔡鳳秋、楊德清(2005)。故事情境融入國小數學科教學之研究～以面積單元為例。 *科學教育研究與發展季刊* 41 期，74-94 頁。
- 邱志賢、毛國楠(2002)。國小六年級學童解未知數文字題之另類概念分析。 *台東師院學報* 第十三期 (下)，40-55 頁
- 教育部(2003)。 *國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域*。台北：教育部。
- 陳霈頡、楊德清(2005)。數學表徵應用在教學上的探究。 *科學教育研究與發展季刊* 40 期，48-61 頁。
- 楊瑞智主編(2004)。 *國民小學數學第十二冊*。康軒。
- 廖學專(2002)。初探國中生等號概念之心像。台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文(未出版)。
- 廖瓊菁(2001)。國小六年級代數教學之研究。屏東：國立屏東師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。
- 劉秋木 (1977)。 *數學教學的決定因素和專業素任*。見台北市立師專研習中心主編。 *國民小學數學研習教師手冊*。
- Brown, J. S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 46(1), 32-43.
- Navigating Through Algebra in Grades 3-5. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series*. Reston, VA:NCTM.

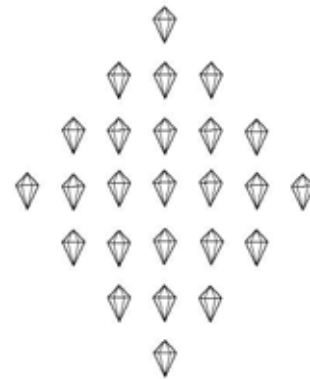
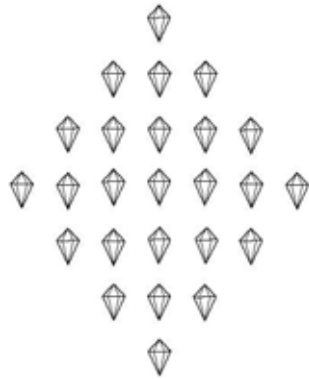
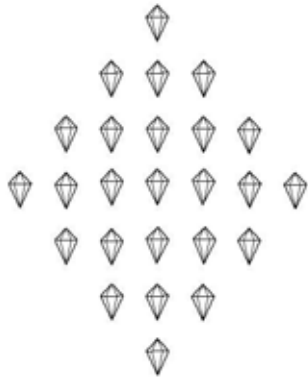
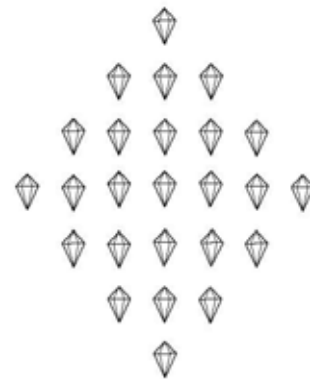
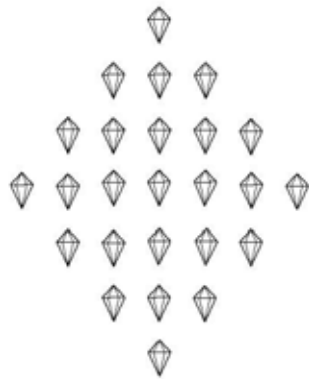
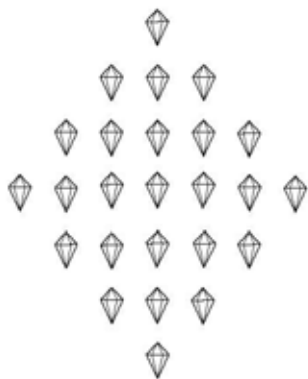
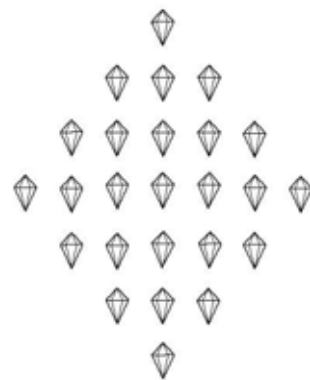
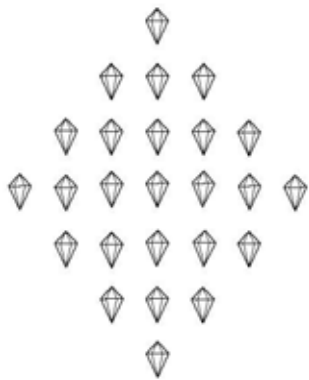
附件一：

解碼大偵探

姓名：

大偵探福爾摩斯來到一個神秘的房間，發現牆壁上有一幅鑽石排成的圖案，其中竟然隱藏著「數字密碼」，你能幫忙他找出密碼可能的組成樣式嗎？

牆上提示：鑽石的個數與數字密碼相等。(請先圈出鑽石的組合，再寫出數字算式。)



附件二： 「代數天秤」學習單 姓名： _____

一、請判斷底下的天秤是不是會平衡呢？如果不會，它會斜向那一邊，並寫出你的理由。

	(a)
	(b)
	(c)

二、如果底下的天秤兩邊要相等，圖形內的數字是多少呢？請寫下來。

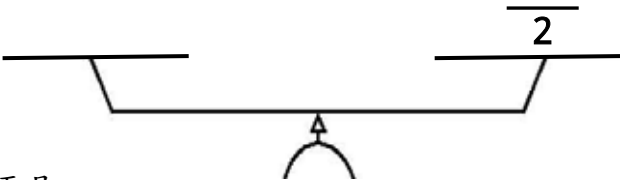
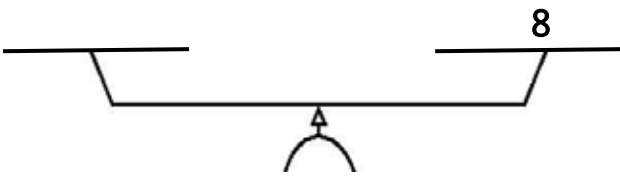
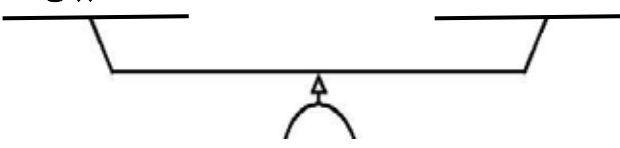
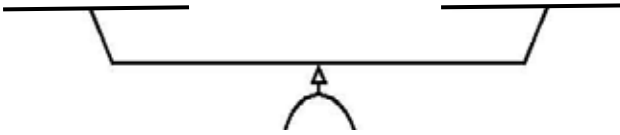
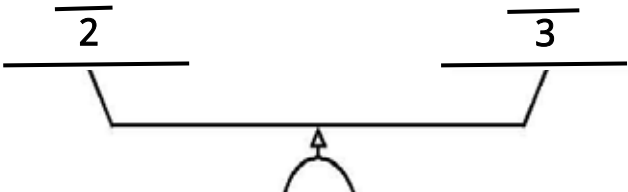
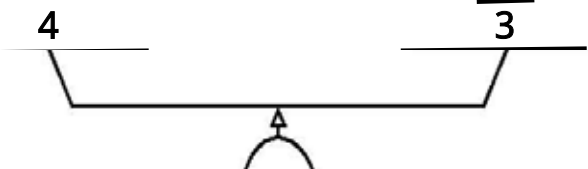
	(a)
	(b)
	(c)

附件三：

我是大判官

姓名：

底下各題的天秤都是平衡的，請根據所給的兩個天秤，找出□和△中的所代表的數字各是多少？你是怎麼知道的？

<p>第 1 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 	
<p>第 2 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 	
<p>第 3 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 	

低年級數學教學現場

楊惠津

臺北教育大學數學教育研究所

摘要

低年級的小朋友最喜歡聽故事，連數學課都不放過。作者擔任低年級教學，在「認識形狀」、「數到十」以及「200以內的數」單元，分享三個故事與數學結合的教學活動。另外，對建構教學和一綱多本教科書也提出一些想法。最後，提出一個好教師應具備的三大要素和大家共勉之。

關鍵詞：數學故事、建構教學、一綱多本

壹、前言

民國七十八年我師專一畢業，就被分發到一個校齡近百的老學校，跨進校園裡，就感受到自己十足是個菜鳥。為了讓自己成熟穩重些，每天著套裝扮老成，讓自己站在學生隊伍裡看得出我是老師也。大家都知道新到一個環境，要學習融入團體，不能標新立異，隔壁老師偶爾傳授一些「學校風氣」注意守則，即感激不盡；若不小心表現「突出」，趕緊說聲小妹不懂事請大家多包涵。學校裡多出的業務，需要老師研習、教學觀摩、或者是特殊生轉進，主任定是曉以大義，請年輕一輩如我者承接任務，說是年輕要多磨練，不然誰叫你是菜鳥啊！磨著磨著，就這樣十多年了，也就磨出一點經驗來。

我歷經低、中、高年級級任導師，目前擔任低年級教學，面對新課程希望小朋友兼具喜愛學數學的樂趣，又能掌握數學核心概念，最好還能熟練計算技巧，擔任第一線的老師更要使出渾身解數，在課程縮短的時數裡設計有趣的數學活

動，達到教學的目標。以下是我在低年級教學現場分享三個故事與數學結合的教學活動。

貳、教學活動分享

一、「認識形狀」單元

學生第一次接觸幾何課程，這個單元目標是認識形狀，老師請小朋友課前先準備家中日常用的盒子如：牙膏盒、餅乾盒、巧克力盒、喜餅盒……，老師也準備了一些孩子比較不會帶來的形狀盒子，如：錐體與柱體。第一節請小朋友家中帶來的盒子放到教室中間預留下來的空地上，任意擺放，老師準備了許多袋子，請第一組小朋友自由拿袋子，將自己覺得哪些盒子應該屬於同一國就放進盒子裡，(這個活動進行前，老師先講了一個分類小故事，但沒有用分類的字眼，)覺得完成就回到位子上，換第二組來，若有覺得前一組的分法不滿意可以拿出來或放進去，就這樣輪到第六組。令我驚訝的是沒想到看似簡單的「分類」活動就在孩子自由心志下有意想不到的收穫，例如說在活動中學童拿與不拿的疑惑、看同學拿出自己放進去的盒子提出的疑問等，都是可以讓老師了解學童的迷思概念，實在是令人興奮。第二節課，教師根據學童以前的經驗做基礎，在這些學童的既有經驗中再建構新的概念，就輕而易舉了，更重要的是，學童學得很開心。那不就是我们想要的？(詳細教學活動見附錄一)

二、「數到十」單元

這個單元的目標是進行 10 以內數的聽、說、讀、寫、做，不過，老師在進行唱讀活動時，一定會遇到學童唱到 10 會繼續唱下去，絕不會乖乖停止的。那不如就讓他繼續唱下去，雖然本單元目標是 10 以內，但是老師一定會遇到一年級小朋友上課經常會發生的場景：「老師，你說的是哪一頁？我不會找。」、「在哪裡？在哪裡？老師你說的在哪裡？」學童說的緊張得不得了，他不知老師也被

他嚷得額頭多出三條線，神經不知死了多少條。在這前提下，今年，我改變了做法，在這單元上課時，就先讓他唱到 50，就算他會他也不想唱下去的情況下見好就收。

唱數到 50 的活動是每節上課的收心操，藉由唱數活動，既讓頑童收收心，每天唱讀下，數字在腦中形成一連串的聲音，像是一條線，可以在線上自由移動(劉秋木，民 85)。今年這一班果真很少人不會看頁數了，省了老師要花很多時間在那兒比畫，將數學中的數數應用在各科學習看頁數上，證明給予學童生活化數學的環境，學童的數感也會敏銳許多。

當然數的概念教學不僅於此，除了唱數外，計數的教學很重要，包含一個對應著一個數，沒看到實體心裡想著數，一邊唱數一邊屈著手指頭數，數數時只唸出聲音，不需藉著動作來數。而在往上數或倒著數時，教師運用真實情境或故事情節來布題，能夠幫助學生了解加減法的關係，當學生建立整數加減的瞭解時，也發展了表徵的技能。

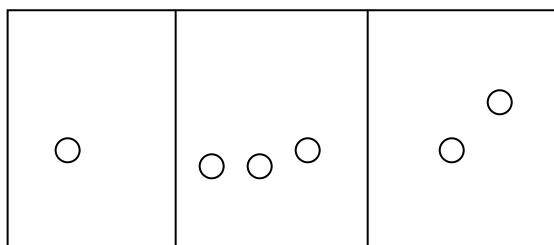
數到十這個單元介紹阿拉伯數字時，老師可以說有關阿拉伯數字原起源於印度，在西元七七三年，當時有幾位印度使節來到阿拉伯帝國的首都巴格達，將一個用新的計數法做成的天文計算表獻給國王當禮物。國王聰明機警，馬上領悟到這禮物的珍貴，迅速召集一流的數學家推廣這個方法，約在七十年後出版了兩本有關印度數字的寫法與計算法的書(Anna Cerasoli, 2003)。這就是現在所使用阿拉伯數字為什麼叫阿拉伯數字，而起源於印度的原因。

三、 「200 以內的數」單元

這個單元緊接上學期「數到 100」的數概念為主，通常小朋友不會有什麼大困難，只是多加了介紹位值概念，老師藉由說故事(Anna Cerasoli, 2003)引起動機，介紹巴比倫有個牧羊人有 132 隻羊，他一面把羊趕進羊圈，一面用手指頭計算。可是十根手指頭馬上就用完了，他想一想就拿起 1 顆小石頭。他打算用這顆小石頭來代表 10 隻羊，並且把石頭放在一邊。接著他繼續用 10 根手指頭數 10

隻羊，結果到最後，每 10 隻羊 1 顆石頭，他總共拿了 13 顆小石頭，剩下的這 2 隻沒辦法算進代表這代表 10 隻羊的小石頭中，但還是可以另外拿 2 顆石頭來代表。不過，為了區別這 2 顆石頭和代表 10 隻羊的小石頭，可以像下面這張圖一樣，把它分別放在不同的地方。

同樣的，13 顆小石頭，乍看之下算不清楚，還是得費工夫去數，因此再用十根手指頭去數這 13 顆小石頭，結果有 3 顆小石頭無法湊成 10 顆一組，我們就把它們放到中間的格子裡。而代表 10 有 10 個的小石頭有 1 顆，就放在最左邊的那一格。



原來 10 進位是因為我們有 10 根指頭！

這個階段的學童最愛聽故事了，連班上無法安靜下來的過動兒都靜下來聽，在我引入位值時，還大聲回應，這堂課又是意料之外的豐收，實在令人開心。市面上或圖書館都可以找到許多有關數學家或者有關數學符號由來的故事，教學者要善用孩子愛聽故事的童心，說故事引發學童學數學的動機，並藉由聽數學家故事，培養學童創造思考的能力。

參、對建構教學的看法

開班親會，家長關切的提出疑問：「老師，建構教學被罵得很慘，現在上課老師還會用建構教學嗎？」

建構教學到底是什麼？

建構教學簡單的說就是在學生既有的經驗基礎下建構新的概念，不管是語文、數學、或其他課程，都是很重要的一種教學歷程。數學建構教學之所以像過街老鼠人人喊打，主因是數學建構教學被過分扭曲，尤其在數概念上的教學，好像小朋友明明會的算式，還要疊床架屋慢慢做起，家長這麼認為，有很多老師看到課本出現這麼多的題型，不明就理也如此認為，無怪乎社會上出現一片韃伐聲。

我要說的是，如果教師能對課程熟悉，這個課程指的不單單是要教的這個單元，而是指課程的架構脈絡，以前舊課程每個單元之前，都會有一頁將本單元課程先後的課程次序用流程表呈現出來，老師看到這頁就會清楚學童學過什麼，未來將學什麼，可是現在民間版本有的就忽略了這些。就我個人而言，對老師而言，這是很重要的基本教學素養，最好老師還能每個年級都教過，就更清楚課程脈絡與學生學習時，將遇到什麼疑難雜症或者有哪些迷思概念。

當年 82 年版數學課程在實驗階段，我任教學校的校長剛好是數學輔導團團長，在校年資最小的我，理所當然被指配”多學習”，觀摩許多場重要建構教學，從恐懼、陌生到認識、熟悉至反思學習。當年在實驗課程觀摩教學檢討大會中，與會教師多有建言，建議小心使用建構教學法，教師方面，多舉辦有關班級經營和數學專業研習，充實教師智能；學童方面，鼓勵開放式班風，尊重同學有不同的意見，培養基本表達能力，數學優秀的學童去幫助低成就的同學，不要讓有些同學成為客人等等，這些都是數學課中不可或缺的組成因子。有時候看到一些教數學口碑不錯的老師觀摩教學，上課中吵吵鬧鬧，課程內容教得很精彩，但仔細看不難發現，課堂中部分學童做壁上觀，發表熱烈的通常是那些表現不錯的學童，讓人不免要為那些弱勢學童叫屈，照理說，成功的教學，不單課程精彩，更重要的是要照顧到所有的學童才是。我在參與課程實驗這段時間收穫許多，面對數學教學活動，學習到老師要如何佈題、如何在班級進行討論中間話、適時運用限定技巧，幫助學生在困惑中反思，提升學童解題的運思層次。

92年正綱公佈後，建構教學依然是重要的教學方法，一個新的概念在建立之初，常須經由學童既有的知識引導，在課堂上討論、運思、辯駁、反思後，成立新概念，這樣的學習才是有意義的學習。

肆、一綱多本教科書

逢選教科書時間，教授要我們分析各版本教材內容，並強調要有所本，也就是說批評要有憑有據，針對課文、習作進行各版本內容分析。我們數學這小組針對兩大版本進行分析並做簡單訪談調查，發現很多學校選用教科書的重要考量，例如以前用習慣了懶得換，因為備課容易，即使課程編排不佳，經由老師彈性處理即可；另外出版商所提供教具的配備輔助教學，以及銷售員的服務態度也列為重要參考之一……。

面對現在一綱多本的教科書，讓我很懷念64年版本的數學，教過64年版本的數學老師一定也有所感，原因是，64年版本的數學課本內容由淺入深、由易入難，課本設計條理分明，沒有干擾學童的插圖，沒有擾人思緒的插圖泡泡，每個概念學習下都有幾題練習題。當初實驗建構教學時即是用64年版本的數學課本，而這幾年使用一綱多本更發現到，64年版本的數學恰是最適合作建構教學的版本，可惜它已「作古」了，難怪現在的老師選定了課本，總是邊教邊罵不想再教，可是下次選的時候，想想罷了罷了，別自找苦吃，而陷入惡性循環中。

數學教育的成敗，我認為最重要的還是課程的設計，說明白些，就是教科書的設計要符合學生認知發展，要符合由淺入深由易而難的教學原理，一本好的教科書，數學教育就成功了一半。因為學測依據教科書，月考依據教科書，家長判斷學童學會了也是依據教科書，教科書怎麼不重要呢？老師再有三頭六臂，也無法逃出教科書這個如來佛的手掌心。所以，教科書的設計首當重要。

有了好的教科書，當然要有好的教學者，才能事半功倍。一個好的教學者不但要具備數學知識、教學技能、還要熟稔學童認知能力，更重要的是教師對數學教育

的信念。

總體而言，九年一貫數學領域沒有解決學生因材施教的問題。只是將整體的標準降低，期望低成就學童能跟得上來。以今年一年級某版本數學課程來說，上學期課程內容非常簡單，幾乎所有的小朋友認為不上課也可以，我班上的一個可愛天真的小朋友，學習成就表現不佳，期中考考了一百分，我稱讚他好棒，他回答我：「老師，不是我棒，是數學太簡單了。」

一下的數學課程突然變得複雜許多，光是第二單元就出現十位數加減不進位和進位的觀念，課本上沒有出現做法，只有橫式和積木排法，排的方式就是直式計算的思考模式，習作上出現的卻是用十元和一元的表達方式，老師相遇，互相探討本單元到底期望孩子學會什麼，哈！真的覺得是個大烏龍，循序漸進似乎省了，原本可以安排不錯的課程，竟然寫得如此「烏魯木齊」。我當然是要以專業立場，對家長曉以大義，千萬別揠苗助長，跟著老師的教學輔導孩子學習就對了。

數學這門科目對大部分的學生來說是一門很頭痛的科目，學生為什麼會怕數學？或許追根究底是在教學上出了問題！荷蘭的學生不怕數學還喜歡數學，是由於他們將抽象的數學可以融入現實生活中(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)。先由概念的建立，自由發揮，最後才是公式的以及抽象符號的補充，讓孩子可以先將數學的基本概念內化以及實際運用之後成為自己的一套系統，所以對於數學便不再恐懼。

以前教高年級，我的學生喜歡上數學課，因為數學課很好玩很有趣，但是一到國中全毀了，一片哀聲載道，讓我覺得很灰心，好不容易拉拔教大的孩子，到了國中只學背會公式，考不完的試，這樣子學數學哪有快樂可言！

美國的數學教育，全國有 NAEP 數學架構，每一州自訂教育課程大綱與各年段學習課程內容，值得一提的是，就我所知的紐約小學裡，學校課程非常重視小朋友的閱讀，閱讀讓人聯想到語文，但是紐約小學課程是將閱讀融入各科教學，數學也不例外。例如，每個單元結束，老師會發下有關本單元的書單，提供小朋

友自由訂購圖書回家閱讀。這倒是可提供我們為師者一個很重要的訊息，閱讀融入數學，不再只是運算符號跟數字之間的遊戲而已。

伍、 結語

一個好教師，我認為至少要具備三點：第一、了解課程知識，包括縱橫脈絡。第二、具備教學技巧。第三、教學當成事業永續經營。三者缺一不可。我為了了解課程在學童學習時會出現哪些迷思概念，確實嘗試了許多年，當然讓我深入了解課程與學生，也能掌握學生問題及當下要努力的方向，面對家長比較有說服力，更能表現出專業素養，取得家長信任與配合。

參考文獻

- 安娜.伽拉佐利(Anna Cerasoli)(2003)。愛上數學。台北市：如何。
- 劉秋木(民 85)。國小數學科教學研究。台北：五南。
- Berninger, Virginia Wise /Richards, Todd L.(2002). Building a Computing Brain Pedagogically. *Brain Literacy for Educators Amd Psychologists* ,pp204-270.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, Virginia:NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. VA: NCTM.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

附錄

活動名稱	認識圖形	適用年級	一年級	教學節數	2 節
教學準備	課前蒐集生活中各種盒子、塑膠袋				
設計者	楊惠津				
<p>本活動設計特色：以故事、活動方式呈現，目的在了解學生的先備知識。所以活動一：目的為了第二個活動做準備，喚醒舊經驗。活動二：建構出對基本圖形的構成要素之初步概念（如正方形由 4 個等邊組成），活動三：讓所學與生活結合，從中發現許許多多的基本幾何圖形。</p>					
教學活動流程					
具體目標	活動主題及進行方式	主要活動與問話			
<p>2. 1. 聽故事，了解分類概念。 給各種圖形盒子，讓學生試探認識各種基本圖形，並了解其是否有基本圖形構成要素的概念。</p>	<p>一、 聆聽故事，初步了解分類概念。</p> <p>二、 檢測是否有基本圖形（三角形、正方形、長方形、圓形）的概念</p> <div style="text-align: center;"> <p>個人思考</p> <p>↓</p> <p>個人發表</p> <p>↓</p> <p>全班共同檢討</p> <p>↓</p> <p>意見分享</p> </div> <div style="border: 1px dashed blue; border-radius: 50%; padding: 10px; margin-top: 20px; background-color: #e0f0ff;"> <p>這活動學得很快，幾乎所有人都認識基本形體，甚至角錐也說得出來。教具吸引他們的目光，熱烈回應。</p> </div>	<p>☞活動一：引起動機<聽分類小故事></p> <p>小朋友圍坐在老師前，老師開始說故事：</p> <p>森林裡一年一度運動會，會場上熱鬧滾滾，大會主席山羊爺爺請每個家族集合，這時，豬小弟趕緊跑到豬媽媽身邊，白鴿姐姐飛到樹枝上和鳥類們在一起，高個子馬弟弟在會場中央哭了起來，原來他在馬群中顯得特別的高，他不知道要走到馬群中，還是走到長頸鹿群中？聰明的貓頭鷹爸爸告訴他：「不管你長得高或矮，你都屬於馬群呀！不會因為你的身高改變了你的馬名字。」</p> <p>小朋友，假設你長得很胖，有時候媽媽會說你胖得像隻豬，那你會不會變成「豬」，當然不會，你還是道道地地的人，這是不會改變的。</p> <p>☞活動二：<看看屬於哪一國？></p> <p>教室中間的空地上放了許多小朋友及老師事前先準備的各種盒子<老師也要事前準備以防小朋友帶來的類型太少></p> <p>步驟一：第一組小朋友拿起老師預先準備的袋子，將自己認為同一國的，放進同一個袋子。覺得沒問題了，就可以回到位子。</p> <p>步驟二：第二組小朋友將他覺得擺錯袋子的盒子拿出放到認為合適的袋子裡。覺得沒問題了，就可以回到位子。</p> <p>步驟三：重複前步驟，一直到第六組全班小朋友輪完</p> <p>本活動流程重點：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 檢測小朋友學前教育幾何中的迷思概念。 2. 尖叫聲、質疑聲響起，老師要適時提問，直到大家滿意再繼續活動的進行。 <p>本活動發現：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 特別小的正方形或長方形容易受小朋友的排斥。 2. 球形與圓形容易混在一起，與小朋友的生活經驗有關。材質的硬軟也是小朋友排拒的對象，老師只要稍微提醒胖瘦高矮黑白都是好小孩，小朋友就很容易接受這裏的分類標準。 			

活動報馬仔

一、 2007/04/27~2007/04/28

2007 年原住民學生數理科教/學理論與實務學術研討會

地點：國立台東大學師範學院

二、 2007/07/08~2007/07/13

31st International Group for the Psychology of Mathematics
Education(PME 31)

地點：Seoul, KOREA

三、 2007/11/15~2007/11/17

School Science and Mathematics Association Annual
Conventions

地點：Indianapolis, Indiana

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 () 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請 e-mail 至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw