

ISSN 1815-6355

台灣數學教育學刊(電子)第9期

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第9期

台灣數學教育學會

2007年3月

台灣數學教師(電子)期刊  
Taiwan Journal of Mathematics  
Teachers  
2007年03月出版  
NO.9 2007

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴 國立台北師範學院數學教育研究所

李源順 台北市立師範學院數學資訊教育學系

林素微 國立花蓮師範學院數學教育系

金鈞 國立台灣師範大學數學系

梁淑坤 國立中山大學教育研究所

蔡文煥 國立新竹師範學院數學教育教育系

劉祥通 國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗 國立屏東師範學院數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

## 發行宗旨

- 一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：
  1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
  2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
  3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
  4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
  5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
  6. 介紹國內外數學教育現況。
- 二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。
- 三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。
- 四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師電子期刊 2007, 第九期

台灣數學教師（電子）期刊  
**Taiwan Journal of Mathematics  
Teachers**

第 9 期

2007 年 03 月

# 台灣數學教師（電子）期刊

## 目錄

第 9 期

2007 年 03 月

---

---

數學教學的準實驗論文.....	1
林福來	
「以兒童為中心」數學教育再思：半世紀香港小學數學課程發展的啟示 .....	3
黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂	
數學表徵融入數學教學之經驗分享.....	26
蔡宜芳、楊德清	
「新台灣之子」數學學習初探.....	36
姚如芬	
運用古文本於數學教學－以開方法為例.....	56
蘇意雯	
活動報馬仔 .....	68

---

---

ISSN 1815-6355

## 數學教學的準實驗論文

林福來

台灣師大數學系

台灣數學教師期刊在總編輯楊德清教授及各位編輯委員的努力耕耘下，已走過最艱難的兩年。總共出版了三十多篇，都很貼近數學教師的論文。為中文版台灣數學教育學術期刊，奠立良好的基礎。

接下來，台灣數學教師學會繼續敬邀德清教授，為這份刊物奉獻心力。

新的一期，四篇文章探討的數學教育領域各具特質。

首先，由香港數學界同仁提供的論文，對香港近半世紀的數學教育進行省思。東亞幾個國家，包括新加坡、韓國、台灣、香港、日本等，在國際學生數學成就評比，例如 TIMSS-2003，學生在數學成就都領先世界上其他參與國家的學生表現。但是從學生問卷分析他們的學習興趣與自信心，發現這幾個國家學生高自信的百分比遠低於那些成就不如的國家。東亞社會的學生數學教育呈現「高成就、低自信」的現象，應是未來這地理區塊的數學教育界，需共同協力探討原因，尋求因應改進之道的重要工作。現在，香港由黃毅英教授領軍的團隊，針對「以兒童為中心」的數學教育訴求，從課程發展的軌跡，省思香港的數學教育問題。這種將教育的現象放置在半世紀的尺度上，進行批判分析，對捕捉真相，是夠大的一張網。「以兒童為中心」所以成為教育訴求，反應的是傳統「以教師為中心」的教學，根深蒂固，難以撼動。回顧 TIMSS-1995、TIMSS-1999、TIMSS-2003 的資料，香港的學生在數學科的表現，”高成就低自信”的現象之變化趨勢，似乎可以提供數學教育界一面很好的自省鏡子。

台灣社會最近十五年來人口成份快速變化。目前，每七個多一點的新生嬰兒中，即有一位是外籍母或父，即所謂「新台灣之子」。這些小孩在多元文化的成長環境下，教育呈現哪些現象，在台灣社會是一個新興的教育問題。姚如芬教授親自探訪這樣的家庭、這樣的小孩、小孩集中的學校，在第一線接觸，為我們揭開”新

台灣之子”的數學學習面紗。

數學表徵轉換是促進數學了解的有效策略。同樣的概念，可以有不同的表徵，語文表徵、符號表徵、圖像表徵、範例表徵、類比表徵、動態表徵、…等等。適當的將不同表徵融入數學教材，搭配表徵轉換的”連結”功能，對促進數學了解，一定有具體成效。蔡宜芳老師，做給我們看。

促進數學了解的教材是多元而多面相的，表徵是一種，古文本也是。它將融入古早人類文化活動融入當下的數學學習，是很合適的數學文化緬懷之旅。尤其帶引學生進入時光隧道，回到從前，思考當時的知識、處理問題的條件限制等等，定出問題解決時不可跨越的鴻溝，如此，品味、欣賞古人的智慧、結晶，定有所感。蘇意雯教授在本期為我們提供一篇”開方法”的古文本，看她怎麼融入教學中。

上述四篇各有所長的論文，豐富了這一期的生命。往後希望有更多實際教學的準實驗論文，投到本刊，供第一線的教師們分享、參考。

# 「以兒童為中心」數學教育再思： 半世紀香港小學數學課程發展的啟示

黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂

## 壹、 引言

自 2000 年起，我們開始探索第二次世界大戰後香港小學數學課程發展的歷史。於這數年間，我們訪問了十多位當年參與其事的關鍵人物，並分析了相關的文獻。總括來說，在近半世紀香港小學數學發展的漫漫長路中，我們看到「以兒童為中心」的數學教學實驗在 1960 年代得以引進和在香港推行，同時展現出一條現代化、本土化、普及化、規範化與專業化的道路。鑒古識今，這些歷史事件給予我們許多啟示，其中之歷史脈絡及意義詳見鄧國俊等(2006)。本文試從當年特定的「以兒童為中心」的數學教育實驗探討更廣闊的「以兒童為中心」教育改革的思潮，希望讓有關人士有所參考。

「以兒童為中心」的理論非常廣泛。總括來說，就是讓學生成為學習的主體。在過往數十年間的各种課程改革均有「以兒童為中心」的影子，包括學生自我發現、主題式學習、學科統整、重視跨學科的共通能力(包括數學及一般的問題解決能力)、著重傳意及動手等「建構式學習」和在資訊科技的背景下提出「範式轉移」等。台灣自 1990 年代初推動教育改革，重要的教改議題包括：自學方案、建構式數學、多元入學管道及九年一貫課程等。而 1996 年開始大力推行的「建構式」數學課程，惹起不少爭論。而「以兒童為中心」這理念與「建構式」數學課程其實息息相關，因

此，回顧香港數學課程發展的歷史，其中的反思也許能給當前台、港兩地的數學課程改革一些啟迪。

在討論歷史帶來的啟示之前，我們先簡要地介紹香港小學數學課程「以兒童為中心」理念的引進和發展。

## 貳、 香港小學數學課程的發展

### 一、 「以兒童為中心」理念的引進

我們探索的範圍自 1940 年代開始至 1983 年《小學數學科課程綱要》的頒佈<sup>1</sup>。在所探討的 40 餘年間，一共出現了一個小學算術課程及 1967 年、1973 年和 1983 年的三個小學數學課程。

香港第一份小學算術課程出現於 1959 年（或更早）。當時，香港社會仍存「過客心態」、香港只屬「暫借之地」，教育體系包括教科書和教學法（甚至教師）仍受中國內地的影響。故此《小學算術課程》只是粗糙的綱要，基本取材自中國內地或英國既有的內容，表述亦屬點列形式。雖然香港政府於 1950 年代初，已有意識地排拒中國影響，利用「學校準用小學課本各表」（1954 年）監控教育，並有教育司署官員<sup>2</sup>編著教科書（後期則有現代教育研究社出版算術教科書），但 1959 年算術課程仍沒有無清晰之理念，本土化之課程還未出現。

至 1960 年代，西方教育改革千帆並舉，本港數學教育工作者（包括官員及學者）紛紛放洋（主要是英國）考察。與此同時，英國政府亦希望殖民地能靠攏西方的思維，以抗衡共產主義，因而開拓了不少殖民地官員赴英一開眼界的機遇。這批人先

<sup>1</sup> 1983 年以後的發展，包括「目標為本課程」和 2000 年新小學數學課程，都不在我們的研究範圍。

<sup>2</sup> 如羅宗淦。



後前往西方參加會議或留學，接觸到現代化的數學教學，而其中一位就在赴英期間接觸到「以兒童為中心」的「納菲爾特數學試驗計劃」<sup>3</sup>。

這些人員回港後，透過教師教育及研討會等場合，於香港逐步宣揚「以兒童為中心」這理念，並作出試驗和實踐。與此同時，1950年末英美的「新數學運動」已於香港中學著陸和得到了實踐，而小學仍然沿用「傳統數學」，故此存在小學也來推行「新數學」的訴求。不過「新數學」在中學的推行出現了不少問題（詳見黃毅英、黃家樂，2001），小學數學何去何從陷於兩難（馮源，1968）。幸而當年的課程委員會的成員遇上了「納菲爾特數學試驗計劃」，經過一輪調適，他們成功地於1967年催生了本港第一份本土化的小學數學課程，其中既有現代數學的元素，亦比「新數學」較為親和。雖然課程本土化的發展仍屬初階，文件中只有課題沒有教學法，但已將「算術」擴展到「數學」，並引進了不少現代化的元素。這個課程亦啟動了本土數學教科書的出現，包括現代教育研究社按新課程出版教科書，更有學者及主理教師教育的人員於小學作出試驗，教材經逐年修訂後，最終成書。隨著社會上整體本土意識之強化，本土化「以兒童為中心」小學數學課程的格局已漸漸形成。

## 二、「以兒童為中心」意念的來源

「以兒童為中心」這教育理念，強調尊重兒童、鼓勵個別發展、支援自主學習、促進獨立，其思想淵源可追溯至盧梭（Rousseau）、裴斯培洛齊（Pestalozzi）、福祿布爾（Froebel）、蒙特梭利（Montessori）和杜威（Dewey）等人的教育哲學。例如，英國哲學家懷海特（A. N. Whitehead）於其1929年著作《教育的目的》（The aims of

---

<sup>3</sup> 本文以後簡稱「納菲爾特數學」。

education and other essays) 中便提出每個兒童應體驗發現的喜悅 (every child should experience the joy of discovery), 所以自我思考和發現是一個非常重要的教育目的, 而非獲取知識本身。其哲學根源來自「過程哲學」(process philosophy) 的教育理念: 過程重於成果。與此同時, 皮亞傑的智性發展理論於 1940 年代得到發展, 進一步強化以上的想法。事實上, 不少學者把皮亞傑視作建構主義的鼻祖。「納菲爾特數學」便開宗明義便提出「做過後便明白」(I do and I understand), 並在其簡介以中文寫出「嬉玩者懂得矣」<sup>4</sup>。這便是「納菲爾特數學」的基本理念 (The Nuffield Foundation, 1965)。由此可見, 「以兒童為中心」的想法與近年「建構式」教育之理念實有不少吻合之處 (黃毅英, 2003 及 2004)。

香港引入以兒童為中心的數學教學, 主要是參考「納菲爾特數學」的理念。早在「納菲爾特數學」出現之前的 1940、1950 年代, 英國已開始全面檢討小學數學的教學。英國數學學會 (Mathematical Association) 於 1938 年便成立一個小組委員會探視這些問題, 只因二次世界大戰一度中斷, 但戰後旋即繼續探討。該小組在 1955 年發表的報告確認, 「活動」(activity) 和「經驗」(experience) 是兒童學習的基礎。只有通過不同的遊戲 (play)、實驗 (experiment)、操作具體實物 (material aids) 等, 兒童才會從「活動」和「經驗」中慢慢體驗到事物的關係, 從而建立「數」與「形」的概念以至基本的數學思維模式 (Mathematical Association, 1955)。「納菲爾特數學」重視學生「動手」, 然後「明白」, 在其簡介中已清楚的提出。據 Griffin & Howson (1974) 指出, 這個以「動手」為主的思潮, 源遠流長。在過往 200 年不斷重覆提

---

<sup>4</sup> 該手冊於 1965 年的初稿, 於當年只供內部傳閱而非為出版 (not for publication)。封面和封底都印有「嬉玩者懂得矣」的手寫字樣。但到 1967 年正式印行以至後來的多次重印, 這個手寫字樣依然保留於封底。以一份英國的刊物而言, 是頗為特別的。

出，其中包括盧梭（Rousseau, 1712-1778）認為「自己掌握事物的原則，較從他人學習所得的，更清晰和更具說服力」（1762年 Emile 一書），康德（Kant, 1754-1804）提出「『動手做』是『理解』的最佳方法」（1802年 On Education 一書），福祿布爾（Froebel, 1782-1852）建議「不要經常即時和直接回答兒童的問題，讓他們掌握足夠的能力和經驗」（1826年 On education of man 一書）等。

### 三、 深化「以兒童為中心」理念的契機

雖然「以兒童為中心」的數學教育理念透過 1967 年小學數學課程成功登陸，但效果並未令人滿意。理由是讓兒童探索、動手、發現、主動學習這些理念和當時著重操練的氛圍可謂南轅北轍。明顯地，一份文件無法改變以考試為主導不求甚解之學習慣性。其中背誦最為嚴重的要算是水流問題、和差問題、時鐘問題等典型算術應用題。

因此，在 1967 年課程推出後，主事者深知一份課程文件不足扭轉局面，於是決心透過各種場合（如教師教育及研討會等）主力消除這些典型題的死記硬背，並推廣「以兒童為中心」的教學理念。1969 年更邀得「納菲爾特數學」的核心人物 E. E. Biggs 訪問香港，進一步確認了課程改革路向。又逐步透過教育電視、教師中心、調整小學會考題目等，將課程改革元素滲透到教科書和課堂教學之中。

1972 年，香港推行十進制，學生無須再作複雜單位的換算，騰出了大量的教時。主事者掌握了這個黃金機遇，再透過把教具送到學校進一步深化課程改革，進一步消除典型算術應用題的操練。雖然 1973 年與 1967 年的課程在文字上沒有多大分別（甚至 1973 年以「第二版」命名），但教與學已默默地起著變化。可以看到，主事

者意識到真正的課程改革不在於課程文件的改寫，而是需要把改革意念付諸實踐，這確是一種進步的思想！

與此同時，跨學科的活動教學於 1972 年出台，跨學科與數學科之間在教學理念與實踐上雖然有重重衝突，但各方面都能有智慧地互相借勢，最終做到相輔相承。

#### 四、 課程改革與專業發展的互動

雖然香港的課程向來均是中央主導，且帶著強烈的教育控制意味，但小學數學課程改革的倡導者深明要推動「以兒童為中心」這一教學理念，非要得到教師隊伍的認同與內化不可。故此自 1970 年代開始，有關方面已超越了課程文件的撰寫而轉向加強與教師隊伍的互動，將改革意念散播。與此同時，香港自 1967 年社會騷動之後，本土意識開始萌芽，「壓力團體」的成立如雨後春筍，包括了教育行動組和教育專業人員協會數學組之成立。前者發表了《小學教科書調查報告》。後者則舉辦各式各樣的數學活動，出版《今日數學教學：研習班特刊》、《數學教學途徑的探討》、《小學數學教學調查報告》、《數學教學》季刊等。他們既為官方帶來落實改革之壓力，亦提供了前線之支援。

在一連串的官民互動下，小學數學教育改革乘著一輛輛的「順風車」向前邁進。到 1983 年的課程定稿時，絕大部分課題的教學建議都曾在課堂內或教師工作坊等場合實踐過。草稿更於 1980 年作出諮詢，當時教師接到新課程時，並不覺得是什麼改革，並表示不少教學手法已在施行。事實上，1983 年版與 1967/1973 年版課程沒多大分別，只是一本附有經實踐的教學建議的「擴充版」（見圖 1）。

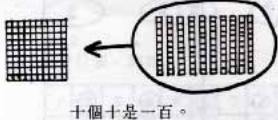
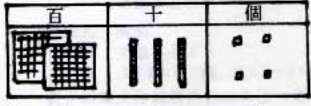

二年級					
項目	學生活動/教學建議	詞彙舉例	用具	備考	
<p>上學期</p> <p>2.1 三位數 百位。 讀數，寫數。 每百一數。</p>	<p>通過實際活動認識三位數：</p> <p>1. 百</p> <p>(a) 在數綫或十行表上，從一個適當的數起順數至 100。</p> <p>(b) 數積木、算珠、小木棒、紙皮石等物品，每十個一數。</p>  <p>十個十是一百。</p> <p>(c) 數積木，每百個一數。</p> <p>2. 百位</p> <p>(a) 用積木幫助練習讀數和寫數，例如：</p>  <p>讀作 二百三十 四 寫作 234</p> <p>(b) 用算柱表示三位數。</p> <p>(c) 做下列一類的練習加深對百位的認識，例如：</p> <p>234 = <input type="text"/> + 34</p> 	<p>百。</p> <p>百位。</p>	<p>數綫(100cm尺)。</p> <p>十行表，積木，算珠，小木棒，紙皮石。</p> <p>算柱。</p>		

圖 1：1983 年香港小學數學課程綱要一瞥

課程改革推動者與民間積極分子，經過近 20 年細水長流的努力，所希望做到的不只是一本新的課程文件，更重要的是創造出具官民互動的課程發展模式和促進教師成長的專業發展路向。雖然由於種種機制上的問題，小學數學課程的實施不一定很理想，但仍能穩步邁向「以兒童為中心」這教學理念。

### 參、「以兒童為中心」及「建構式」理念：現代化、本土化與專業化的反思

「以兒童為中心」的理念雖然有其獨特的教育意義，不過香港在推行這個理念時，仍面對不少困難。特別地，西方與中國的社會脈絡不同，西方理念的引入與本土如何協調（麥肖玲，2003，頁 37-38），是當年香港推行「以兒童為中心」理念的

一大難題，相信亦是台灣推動「建構式」數學教學的困難之一。

### 一、 理念本身及其實踐困難

「以兒童為中心」究竟如何以兒童為中心呢？從我們所能收集到 1970、1980 年代的參考文章中（如周刁玉珍，1976；Chan, 1980），甚少探討「進步主義與傳統的數學教學的異同」、「以學科、社會及兒童為中心的數學教學理念與實踐」、「以兒童為中心的數學教育改革如何配合普及教育」、「校內評估及公開考試如何配合以兒童為中心的數學普及教育」和「師資培訓及教師專業化如何配合以兒童為中心的數學普及教育」等議題。可見，當年香港教育偏向處理實際施教問題而忽略理念上的探索與反思。

麥肖玲（2003，頁 36-37）認為，即使在西方，「以兒童為中心」的精神很難完全落實，當中原因有三，其一是「主體」與「學習」這兩個理念本質上存在著矛盾，因為兒童無論身體或心智都不成熟，需要成年人的照顧及指導，而「學習」包含了依附的意思。因此，兒童的主體性是有限的。其二是兒童有多大主體性受到當時的社會制約，例如，盧梭在《愛彌兒》(Emile) 一書根據自然主義精神設計男孩的教育。可是，書中第五章關於女孩的教育，卻非常傳統。基本上，書中女孩(蘇菲)的教育只是賢妻良母的培養。她的主體性根本被壓抑了。第三，教育不能完全隨兒童的心之所向。教育目標包括了知識與態度的培養。假如完全依照兒童的喜好任其發展，教育的成果（起碼是社會一般期望的成果）便會減少。麥肖玲（2003，頁 36-37）亦提到，夏山教育曾令不少教師嚮往，可是，今天夏山的教學被評為「不足」，自由學習的原則在實踐時被視為鬆散放任、監管不足 (Lamb, 1992; OFSTED, 1999; Neill,

1968)。此外，如果完全以兒童為中心，到他們長大時未必能適應成人社會的規則。因此，即使在西方，「以兒童為中心」僅是一個相對、而非絕對的理念。

此外，近年亦有一些學者乾脆否定「以兒童為中心」這理念，並提出取代性的見解。Egan (2002) 認為「以兒童為中心」是在理念上犯了根本的錯誤，他本人大力提倡學養心智理論，以擺脫「以兒童為中心」、「以學科為中心」及「以社會為中心」這三個課程理念所造成的鐘擺現象。鄧國俊嘗試將其學養心智理論引入數學教育 (2003, 2005) 及師資培訓中(2002)。英國數學教育學者 Ernest (1991) 以哲學及社會學理論為基礎，把一些影響教育的社會團體分成為：工業訓練者、科技實用主義者、古典人文主義者、進步主義教育工者和大眾教育工作者。Ernest 所信奉及提倡的是大眾教育工作者信念，其數學哲學是社會建構主義，數學知識被看成是可改正的和經驗的，嚴謹的科目界限瓦解；從社會價值的介入和科目的社會歷史發展角度，數學被看成是受文化局限和充滿社會價值，而數學教育本身是要肩負社會改良及文化的造的任務。

## 二、東西教育理念差異

1960、1970 年代，香港普遍強調權威，並以學科為中心及教師為中心 (楊延堦，1976；余榮燊，2003)，加上傳統中國人對良好學習態度的理解，如「勤有功、戲無益」、「業精於勤荒於嬉」，推行「以兒童為中心」的課程有一定的困難。鄭肇楨(1985) 在〈遊戲與學習〉一文開始時，也要糾正一下這種「缺遊戲文化」。他感慨的說：「以前的人常說：『勤有功，戲無益。』其實這句話最少後半句是錯的。以往，老先生們及家長常拿它來訓示兒童，當然是未明遊戲對兒童的作用」(頁 183)。

再者，傳統華人社會強調長幼尊卑分明，強調尊師重道。因此，教學以教師為中心、以典籍為權威，是華人社會的普遍現象，甚至可說是華人社會倫理關係的一部份，這又是另一個與「以兒童為中心」互相徑庭之文化因素。此外，家長的意向也是關鍵的因素。他們一方面希望孩子快樂，另一方面卻擔心孩子少學了內容，將來升到傳統班或轉到不施行活動教學的學校會跟不上，這顯然與源自科舉的考試文化有關 (Wong, 2004)。這意味著他們認為愉快學習與有效學習不能兼得 (麥肖玲, 2003, 頁 39)。這些因素至今仍是推行「以兒童為中心」及「建構式」教學的一個障礙。

試舉一個數學教學實例：在一個研討會<sup>5</sup>中，美國數學教育專家闡述了建構主義式的教學。當時提出借助學具 (manipulative) 讓小學生發現數學結果，然後分組匯報。教育專家一再強調，要點是老師不能干預，縱使學生得到一些錯誤的結果 (並作匯報) 時，教師不應插嘴，不用糾正。因為這些糾正應由學生日後慢慢發現。當然這中間還帶有不應用教師權威迫令學生接受知識的這個概念。這顯然與福祿布爾所言「不要經常即時和直接回答兒童的問題」，有共通之處。可以想見，這種論點當場引起華人學者的一陣哄動。難怪顧泠沅 (在後來的一個場合) 寫了「尋找中間地帶」一系列文章 (顧泠沅、易凌鋒、聶必凱, 2003; Gu, 2000)，東西方在這些教育問題上的觀點仍是南轅北轍，可以想見。

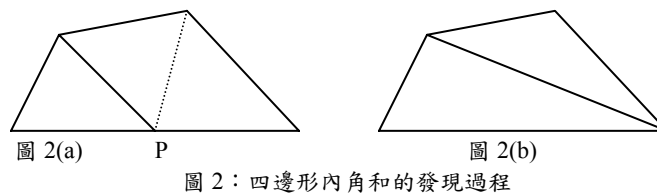
再舉一個實例，就是多邊形內角和的「自我發現」：學生已知三角形的內角和，學生在老師的引導下，知道需要把四邊形割成三角形去求四邊形的內角和，於是老

---

<sup>5</sup> Heddens, J. W. (1994). Using manipulatives in primary school teacher preparation. Presentation at Workgroup on primary school teacher preparation, ICMI-China Regional Conference on Mathematics Education at Shanghai, 15-20 August.



師讓學生自行探索。有學生如圖 2a 的分割，老師說這是可以的，因為三個三角形的內角和共為  $540^\circ$ 。扣去 P 點的平角就是  $360^\circ$ 。但以「中國式的自我發現法」，老師容忍這種做法是不智的。因為這是很難推廣到 n 邊形內角和的規律，老師必須引導學生在一開始已用對角線分割。否則，這個「劇本」就演不成了。從這個例子，老師作為導演的角色至為明顯（見圖 2b）。



### 三、 成果與過程取向問題

莫禮時（1996）指出，「以兒童為中心」理念(或是「建構式」)與傳統教學的其中一大分別，在於內容（content）（或結果, product）取向與過程（process）取向之不同（見圖 3）。

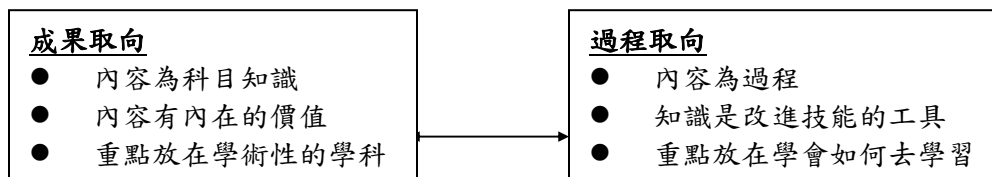


圖 3：課程內容成果取向與過程取向的比較（取自：莫禮士，1996，頁 25-26）

在課程層面中，究竟「過程」與「結果」如何平衡（Howson and Wilson, 1986），是數學教學現代化與本土化思考的重要課題。這其實不只是「平衡」的問題，黃毅英（1995）便提出了「怎樣在教授數學知識之同時，以之作為培養深層能力的基礎」（頁 71）？上面的「中國式的自我發現法」例子就是把「知識」維持在教學的主線，

在這個主線上培養能力。香港課程發展議會（1992）便提出「學生學習數學科，是學習用以建立數學知識的特有計算及思考方法，並學習如何在不同情況下鑒別、應用及傳遞數學的知識（即學生是學習數學的認知學習過程技巧）。同時，學生亦學習有關數學的知識、概念、通則、標準模式和步驟，以及理念的關係（即學生是學習數學的內容或成果）。……課程發展議會工作小組決定將認知學習過程及內容納入數學學習目標的架構中，這個學習目標架構正好與其他國家所編訂的架構相符。」（頁 2）按照這個定位所發展的香港數學課程（和其他東亞地區的數學課程）與英美的數學課程有所不同，就是沒有把問題解決、傳意等作為獨立的課程標準（Wong, Han & Lee, 2004）。

Howson & Wilson（1986）曾對「過程為本課程」作出不少批評。Gardner（1989）也指出進步主義<sup>6</sup>受到質疑，而 1983 美國頗為震撼的報告書《國家正處危機》（National Commission on Excellence in Education, 1983）正正指出忽視基本功讓美國走向庸才教育，並促請重新重視歷史、數學、科學這些核心科目（見Gardner, 1989, p.8）。而即使說要由結果轉向過程，由學科轉向跨學科的能力，我們又是否有足夠的社群論述？大家是否有足夠的準備呢？（黃毅英，2005）。

## 肆、 討論：現代化的陷阱，本土化的意義和專業化的價值

### 一、 兒童為中心還是以僱主為中心：現代化的陷阱？

撇開一些非主流觀點，在港台兩地，「以兒童為中心」這取向似是教育現代化

---

<sup>6</sup> 進步主義起於 20 世紀初，以杜威（Dewey）、克伯屈（Kilpatrick）、波特（Bode）等為代表。他們強調經驗世界之變動性，而且真理亦隨之而變，世間無絕對的真理。故此，它否認權威，崇尚自由與民主，重視適應與進步，並強調人性的尊嚴，故亦強調以兒童為中心（楊國賜，1979）。

理所當然的方向，但是現實是否真的如此。即使在美國進步主義最昌盛時期，學校課程取向也並非確實以兒童為中心，而是潛藏着以社會效能和社會重建的思想為主體。按Kliebard (1995, pp.134-173)、Kennedy (2005, p.12)的分析，David Snedden (1868-1918)、Harold Rugg (1886-1960)等進步主義的核心人物為例，社會為中心的思想在進步主義佔有重要的地位。換言之，這些思想雖然關心兒童的利益，但更重要的是教育產出對社會的貢獻。事實上，這種既提出以兒童為中心，但隱含扭曲兒童成長發展的本性、只為成年人世界服務，歷史上屢見不鮮。羅素(Russell, 1950, p.146)探討教師的職能時，亦不忘對教師提出警告：「教師的職責並非教導自己所認同的，而是灌輸僱主認為有用的信念和偏見。」Kennedy (2004)分析香港2001年推出的《學會學習》(課程發展議會，2001)時就一針見血地指出，《學會學習》雖然以以兒童為中心為主調，但是基本的政策是基於人力資本的開發和革新是對新的全球經濟需要的恰當回應的這個取態。正如前文提及，不少教師及家長仍然考慮學生的前途，避免兒童長大後未能適應成人的社會，而為兒童設計「最適合」兒童未來適應生存於社會的課程。

這使我們想到，究竟誰在為兒童決定課程？教育的策劃者有多真心讓兒童變成學習的主人(甚至進行社會批判，導致最終要推翻現有建制)，還是只是用「世界變了」作唬嚇、以兒童為中心作幌子，攫奪兒童學習的「代言權」進行教育控制與霸權主義呢？又或如姨媽姑爹(1999，頁17)所言：「以教育服務要社會適應全球經濟需求，俯仰大財團鼻息，教育只能培訓只知『識做』、不懂獨立思考的『買辦』，甚麼『個人發展』到頭來都只不過是虛飾之辭。」值得我們深思！

## 二、 學生自行建構還是合模於所謂「建構式」的課程標準：現代化的陷阱？

近年盛行的建構主義課程，無論在理念與實踐上，都為「以兒童為中心」的數學教學發展注入了新力量（黃毅英，2004b）。在建構主義和教育民主化的思潮下，以兒童為中心的數學教學，就是要讓學生成為學習的主人翁（而非教師或課程），讓學生重新發明（re-invent）及自行建構數學（黃家鳴，2000；Tsang, 2005），讓學生在學習環境中實現「小民主」（張奠宙，2005）。

雖然理論上「課程」可以有更廣泛的意義，可以是一種沒有「範本」、由教師彈性執行的計劃，甚至只是一種有利學習（建構）環境的設置（所謂「範式轉移」）。但是，在華人地區的現況而言，要把建構主義在學校建制上落實成課程就會衍生課程文件，包括教材和教學指引等。這些基本上都只是一種大人眼中估計學生的「假設性學習軌跡」（hypothetical learning trajectory）（Masters & Forcester, 1996; Simon, 1995）。這就可能重覆了「新數學」的覆轍（黃毅英，2003）。當時，Kline（1973, p.1）就有一個「笑話」：

老師問：「何以  $2 + 3 = 3 + 2$ ？」

學生說：「因為均等於 5。」

老師說：「不對，是因為加法的交換性質。」

華人地區近年數學課程改革中亦反覆出現類似問題，例如一題多解本來是培養高層次思維能力的手段，樣板化後，老師可能硬生規定「一題，必須學生提供『五個解』之類。與此同時，多重表徵本來是促進多元了解的方法，於是乎又要學生必

須同時學會特念數學概念的算術、代表和圖象表示（於是不少學生其實是做完了  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$  才返回來畫圖之類，而不是本來善於用圖像去理解：圖4），變相倍增了學習負擔。每一概念均學習多重表徵，教時不變，於是不是大量減省了知識點便把教學變得擠迫了。

所謂「全方位學習」亦有類似情況，在「表現主義」的扭曲下，變成了全方位考試，而學校教育側重塑造下一代合模於成人所擬定的一種「人格套餐」（周昭和、黃毅英，2000）。

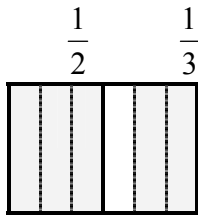


圖4： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$  的圖示

### 三、「以學生為中心」還是「以學習為中心」：本土化的意義

其實「以兒童為中心」與「以教師為中心」是否一定水火不融呢？Perry, Tracey, & Howard（1998）的實證研究便發現「以兒童為中心」與「傳遞式教學」形成兩個不同的維度。換言之，可能存在既以傳遞方式教授而同時以兒童為中心的情況。第三次國際數學及科學錄像研究提出了「東方」數學課堂的特性，就如 Ausubel(1961, 1968) 所說的「既以教師為主導，亦以學生為中心」（Leung, 2004；黃毅英，2002）。確切地，就如 Watkins & Biggs(2001)所指出的「以學習為中心」(Learning centered)。

再返回上面內角和的例子，從另一個角度審視，這不是堅持教師預設劇本的問題，而是學習的目的在於既發現  $n$  邊形內角和為  $(n-2) \times 180^\circ$  這事實，掌握了三邊形、四邊形、五邊形內角和的規律，同時亦達到具體到抽象這種數學能力的訓練。

我們看不到比老師預設的多邊形分割法更有效的達到這學習目的的途徑。故此，這劇本是為了學習的緣故需要堅持的（除非我們發現更好的學習理由），這正正體現了「以學習為中心」（而非簡化的教學模式，教師或學生為中心）。

與此同時，不少學者提出基本功是創意的不可或缺之基石。Gardner（1989）透過中國幾種傳統藝術，包括書法和京劇的學習，指出基本功向大師模仿（modeling）是創新的階梯（頁 257）。如果「入法」是「出法」的必要條件（Wong, 2004），教師就有佈置這種有利學習條件的責任，包括提供紮實的基本功訓練。在數學本身而言，運算技巧其實是概念的一部分，不可偏廢，問題只在於是否盲操瞎練。有計劃的練習題及好教師引導可促進學生的運算和加深學生的瞭解。由此看來，港台兩地實在引進推動「以兒童為中心」及「建構式」理念時，亦要加入本土化的思考，而非將西方一套照單全收。

#### 四、 學養教學隊伍的渴求：專業化的價值

Peddiwell（1939）有如此一個著名的劍齒虎的故事。話說石器時期，人們發展了「徒手在清澈澗中捉魚」、「以粗樹枝擊殺小毛馬」和「以火唬嚇劍齒虎」的課程。後來氣候突變，清溪混濁不堪，小毛馬紛紛離開，劍齒虎亦患病死去，換來的是難以擊倒的羚羊和嚇不倒的北極熊。於是有人提出世界變了，教育也應隨之而變。此時智者說：「學校教導學生徒手捉魚，並不是真的為了捉魚，而是培養他們某種素質……。」故此，學習「課程內容」（又或傳統基本功等）也可以成為培養「過程能力」的手段，個中拿捏當然涉及教師的專業了。

當然，要避免現代化的陷阱和對本土化作深刻思索，在在亦需要專業化的教師

隊伍。自古至今，原則與理念易得，良師難求。唐朝黃檗禪師就有這麼的一段對話：

黃檗示眾云：「汝等諸人，……還知大唐國裡無禪師麼？」時有僧出云：

「只如諸方匡徒領眾，又作麼生？」 檗云：「不道無禪，只是無師！」

（宋·圓悟（編）《碧巖錄》，頁 1125）。

今天，各地的課程改革良多，單靠重編教學內容，恐難達至有效的改革成果，必須有賴教師的努力。陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）就曾提出「學養教師」的觀念：「這種勇於迎接時代挑戰的數學教師，無論對數學、教育、及學生性向均能掌握，本身亦須為思索者，研究者與課程設計者。具有這些知識和能力的，我們可稱為『學養教師』（頁 53-54）。

## 伍、 結論

從香港數學課程發展歷史的探索中，可以體現課程發展的複雜性。一個看似理所當然的「以兒童為中心」，但在引入香港數學課程時，卻仍經歷漫漫長路。首先，由 1960 年代眾官員的接觸、引入，1970 年代的發展，至 1980 年代的官員與教師互動，部分「以兒童為中心」的「動手」、「探索」、「體驗」確能在數學教學課堂中推行和生根。因此，在 1983 年編寫小學數學課程時，已不僅是文件的內容，也是課堂的實踐。

事實上，1960 年代至 1983 年間的數學課程發展問題眾多而複雜，如「以兒童為中心」理念本身及實踐之困難、東西教育理念的差異、成果取向和過程取向的困惑、誰在設計課程中扮演主導的角色等，都引起不少的爭議。事實上，這不僅是香港引

入及推動「以兒童為中心」課程取向的困惑，也必然是台灣推行「建構式」課程標準的困惑。說回香港，能否說數學課程已達致「以兒童為中心」，甚至是否應推行「以兒童為中心」的數學課程，仍有很大商榷之處。

最後，我們深覺，在後現代社會環境中，課程發展所涉及的，是一個「在相互協調和相互合作」的過程（Slattery, 1995, p.118）；而且，課程發展「……不應以一種模式檢視，不應以封閉系統檢視，而應該視之為一個開放的系統，是所有參與者的一個旅程，一個需要懷著熱情去體驗的旅程，而不是一個目的地。」（Ornstein & Hunkins, 1998, p.19）。如果以這個角度來看香港數學課程發展的歷史，港、台兩地的官員必須深思。

### 參考資料

- 余榮燊（2003）。〈從事小學教育三十六年紀要〉。《春秋雜誌》，第 932-933 期 9-10 月號，頁 9-13。
- 周刁玉珍（1976）。〈香港小學教學試驗計劃第一次週年報告〉。《課程發展》，第一期，頁 20-25。〔English: Chow, M. C. (1976). The first annual report on the pilot scheme in primary schools. *Curriculum Development Journal*, 1, pp.17-21.〕
- 周昭和、黃毅英（2000）。《從課外活動「持分」失衡看教育產品指標化的權力展現》。香港：香港中文大學教育學院香港教育研究所。後載曾榮光（編）（2005）。《廿一世紀教育藍圖？香港特區教育改革議論》（頁 369-408）。香港：香港中文大學出版社。
- 姨媽姑爹（1999）。〈香港教育：其問題與假改革〉。載蔡寶瓊、黃家鳴（編）《姨媽姑爹論盡教改》（頁 17-18）。香港：進一步出版社。
- 香港課程發展議會（1992）。《數學科學習目標（小一至中五）》。香港：香港課程發展議會。



- 張奠宙 (2005)。〈數學證明・數學意識・數學文化〉。載黃毅英 (編)《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》(頁 55-59)。香港：香港數學教育學會。
- 莫禮時 (1996)。《香港學校課程的探討》(陳嘉琪、溫霈國譯)。香港：香港大學出版社。
- 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強 (1994)。教(學)無止境：數學學養教師的成長。載林智中、韓考述、何萬貫、文綺芬、施敏文 (編)。《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》頁 53-56。香港：香港中文大學課程與教學學系。〔後載蕭文強 (編)《香港數學教育的回顧與前瞻》(頁 129-137)。香港：香港大學出版社。Later published in 黃毅英 (編)。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》(頁 38-45)。香港：香港數學教育學會。〕
- 麥肖玲 (2003)。〈「以兒童為中心」的理念在中、港的變契與矛盾〉。《課程與教學季刊》，第 6 卷第 2 期，頁 31-48。
- 馮源 (1968)。〈小學裡是否也將教授新數學——小學數學新課程之研究〉。《柏立基師範學院校刊》，頁 22-23。
- 黃家鳴 (2000)。〈現實情境作為數學學習的起點：荷蘭經驗〉。《數學教育》，第 11 期，頁 34-46。
- 黃毅英 (1995)。〈普及教育期與後普及教育期的香港數學教育〉。載蕭文強 (編)《香港數學教育的回顧與前瞻——梁鑑添博士榮休文集》(頁 69-87)。香港：香港大學出版社。
- 黃毅英 (2002)。〈優秀數學教學的要素〉。《數學教育通訊》，第 1 期，頁 14-15。
- 黃毅英 (2003)。〈「建構主義教學」：慎防重蹈「新數學運動」的覆轍〉。《數學教學》2003 年 3 期，4-5。
- 黃毅英 (2004)。〈從兩岸數學教育改革略參建構主義〉。《數學教育》。第 18 期，頁 23-25。
- 黃毅英 (2005)。〈通識教育：一個遙不可及的夢——這究竟是否我們的夢？〉。《教師中心傳真》，第 55 期，頁 6-7。
- 黃毅英、黃家樂 (2001)。〈「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啟示〉。載

- 黃毅英 (編)《香港近半世紀漫漫「數教路」:從「新數學」談起》(頁 9-111)。  
香港:香港數學教育學會。
- 楊延燻 (1976)。〈小學數學:研習班、教學中心與教學試驗計劃〉。《課程發展》, 第 1 期, 頁 32-37。
- 楊國賜 (1979)。〈當代美國進步主義與精粹主義教育思想之比較研究〉。載國立台灣師範大學教育研究所 (編)《西洋教育思想(下)》(頁 1035-1043)。台北:偉文圖書出版社有限公司。
- 課程發展議會 (2001)。《學會學習:終身學習、全人發展》。香港:中華人民共和國香港特別行政區。
- 鄭肇楨 (1985)。〈遊戲與學習〉。載鄭肇楨 (編)《教育途徑的拓展》(頁 183-190)。  
香港:廣角鏡出版社。
- 鄧國俊 (2005)。〈初中有向數的教與學:隱喻理論與學養心智理論的啟思〉。  
黃毅英主編,《蕭文強教授榮休文集:迎接新世紀重新檢視香港數學教育》(頁 126-140)。香港:香港數學教育學會。
- 鄧國俊及鍾永康 (2003)。〈數學史與數學課程改革:學養心智理論的啟思〉。  
鄧幹明及曾倫尊主編,《學會學習:數學課程改革評析》(頁 92-109)。  
香港:香港數學教育學會。
- 鄧國俊 (2002)。〈哲理式領悟與中學數學教師教育〉。梁成安主編,《廿一世紀教師的專業成長教育研討會論文集》(頁 63-70)。澳門:澳門大學教育學院及澳門教育暨青年局。
- 鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂 (2006)。《香港近半世紀漫漫「小學數教路」:現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》。香港:香港數學教育學會。
- 顧泠沅、易凌鋒、聶必凱 (編) (2003)。《尋找中間地帶——國際數學教育改革的大趨勢》。上海:上海教育出版社。
- Ausubel, D. P. (1961). In defense of verbal learning. *Educational Theory*, XI, 15–25.
- Ausubel, D. P. (1968). Facilitating meaningful verbal learning in the classroom. *The Arithmetic Teacher*, 15, 126–132.

- Chan, S. C. (1980). *Report of Kei Hin (Epiphany) Primary School on the "Activity Approach" teaching method (1972-1979)*. Hong Kong: Kei Hin (Epiphany) Primary School.
- Egan, K. (2002). *Getting it wrong from the beginning: our progressivist inheritance from Herbert Spencer, John Dewey and Jean Piaget*. New Haven: Yale University Press.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.
- Gardner, H. (1989). *To open minds: Chinese clues to dilemma of contemporary education*. New York: Basic Books.
- Griffith, H. B. & Howson, A. G. (1974). *Curricula and society*. London: Cambridge University Press.
- Gu, L. (2000, July–August). *Exploring the middle zone*. Paper presented at the 9th International Congress of Mathematics Education (Gathering of Chinese scholars), Tokyo/Makuhari, Japan.
- Howson, G., & Wilson, B. (Eds.). (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kennedy, K. (2005). *Changing schools for changing time: New directions for the school curriculum in Hong Kong*. Hong Kong: The Chinese University Press.
- Kennedy, K. (安桂清譯) (2004) 〈人力資本概念的轉變及其對亞洲部分地區學校課程改革的影響〉。載羅厚輝、徐國棟、鍾啟泉、楊明全(編)。《香港與上海的課程與教學改革》(頁23-40)。香港：香港教育學院。
- Kliebard, H. M. (1995). *The struggle for the American curriculum, 1893-1958*. Boston: Routledge & K. Paul.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. New York: Vintage Books.
- Leung, F. K. S. (2004). The implications of the Third International Mathematics and Science Study for mathematics curriculum reforms in Chinese communities. 載裴娣娜(主編)《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇：數學教育與學生發展論文集》(頁122-138)。澳門：教育暨青年局。
- Mathematical Association. (1955). *The teaching of mathematics in primary schools: A*

- report prepared for the Mathematical Association for consideration by all concerned with the development of young children.* London: G. Bell & Sons, Ltd.
- National Commission and Excellence in Education. (1983). *A nation at risk*. Washington, D.C.: U. S. Government Printing Office.
- Ornstein, A. C., & Hunkins, F. P. (1998). *Curriculum: Foundations, principles, and issues* (3<sup>rd</sup> ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Peddiwell, J.A (1939). *The Saber-Tooth Curriculum*. New York: McGraw Hill Books.  
黃顯華中文節譯載蓮華(1993)。《教無止境》。香港：廣角鏡出版社。
- Perry, B., Tracey, D., & Howard, P. (1998). Elementary school teacher beliefs about the learning and teaching of mathematics. In H.S. Park, Y.H. Choe, H. Shin, & S.H. Kim (Eds.), *Proceedings of the ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematical Education* (Volume 2, pp. 485-497). Seoul, Korea: Korean Sub-Commission of ICMI; Korea Society of Mathematical Education; Korea National University of Education.
- Russell, B. (1950). The functions of a teacher. In B. Russell (Ed.), *Unpopular essays* (pp.140-160). London: George Allen & Unwin Ltd.
- Slattery, P. (1995). *Curriculum development in the postmodern era*. New York: Garland Publishing, Inc.
- The Nuffield Foundation. (1965). *I do, and I understand: Nuffield Mathematics Teaching Project* (first draft not for publication). London: Author.
- Tsang, K. W. F. (2005). Invented strategies versus standard algorithms, creativity versus formality. In N. Y. Wong (Ed.), *Revisiting mathematics education in Hong Kong for the new millennium* (pp.141-155) 。 Hong Kong: Hong Kong Association for Mathematics Education.
- Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.). (2001). *Teaching the Chinese learner: Psychological and pedagogical perspectives*. Hong Kong: Comparative Education Research Centre.
- Wong, N. Y. (2004). The CHC learner's phenomenon: Its implications on mathematics education. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 503-534). Singapore: World Scientific.  
〔中譯：黃毅英（2005）。〈儒家文化圈(CHC)學習者的現象——對數學教育的

影響〉。載范良火、黃毅英、蔡金法、李士錡(編)《華人如何學習數學》(頁389-415)。南京：江蘇教育出版社。]

Wong, N. Y., Han, J. W., & Lee, P. Y. (2004). The mathematics curriculum: Towards globalisation or Westernisation? In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 27-70). Singapore: World Scientific. [中譯：黃毅英、韓繼偉、李秉彝(2005)。〈數學課程：趨向全球化還是趨向西方化〉。載范良火、黃毅英、蔡金法、李士錡(編)《華人如何學習數學》(頁24-61)。南京：江蘇教育出版社。]

#### 作者通訊：

黃毅英。現任香港中文大學課程與教學學系教授。香港數學教育學會創會會長。

E-mail: [nywong@cuhk.edu.hk](mailto:nywong@cuhk.edu.hk)

鄧國俊。現職為香港浸會大學教育學系首席講師。

E-mail: [kctang@hkbu.edu.hk](mailto:kctang@hkbu.edu.hk)

霍秉坤。現職香港中文大學課程與教學學系助理教授。

E-mail: [pkfok@cuhk.edu.hk](mailto:pkfok@cuhk.edu.hk)

顏明仁。現職香港教育學院課程與教學學系助理教授。

E-mail: [myngan@ied.edu.hk](mailto:myngan@ied.edu.hk)

黃家樂。現職香港大學教育學院教學顧問。

E-mail: [klwong3@hkucc.hku.hk](mailto:klwong3@hkucc.hku.hk)

## 數學表徵融入數學教學之經驗分享

蔡宜芳<sup>1</sup>

楊德清<sup>2</sup>

嘉義縣國小

國立嘉義大學數學教育研究所

### 摘要

本文的主要目的乃是筆者希望從實際的教學行動中，從表徵觀點探討小五學生在分數除法和異分母比較其原始解法與迷思。

在這次的教學中，透過學生的解題表現和課室間的發表，可看出學生的創意和數學概念的表現是非常多元的，且能透過思考的歷程慢慢建構出自己的數學知識。學生的解題若能透過圖形表徵，則有助於解題成功。好的解題者能彈性運用表徵。適當運用多樣化的數學表徵，能幫助學生數學概念的理解，所以，教師不要急於教導分數符號及算則的學習。

### 壹、前言

筆者任教於國小高年級已邁入第十年，每次接任新班級時，家長最擔心的就是孩子的數學為何學不好？家長認為很簡單的題目，為何他的孩子總是學不會？而學生卻抱怨：「數學對你們大人而言當然很簡單，可是我們覺得很難」。的確，筆者發現高年級的課程中，因數和倍數、分數的除法，小數的除法、異分母的比較，這些單元對高年級學生而言是比較抽象、困難的。因此，造成學生的學習成就總是比較低，甚至造成許多學生慢慢失去對數學的興趣，經常要為學生進行補救教學。以自己的教學經驗而言，在數學教學中，教師與學生的溝通語言是相當重要的，這關係著教師教學與學生學習的成效，教師要如何將抽象的概念以學生可以理解的方式引導學生思考，是身為教學現場教師所要重視的。

數學的理解包含兩方面，其一為獲得一套符號或系統以表徵數學概念，另

一個是能以多重表徵來代表某一概念，並能在不同型式的表徵系統中做轉換（Davis, 1984；引自劉秋木，1990）。此外，許多學者（Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999; Cramer, Post, & delMar, 2002; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Lesh, Post, & Behr, 1987）也提到學生如果能以多重表徵代表一個相同的數學概念，並能在不同的表徵型式中自由轉換，就表示學生已經能夠了解數學概念，如將 $\frac{1}{2}$ 轉換成 0.5、將 $\frac{1}{2}$ 以圖畫或語言來呈現。黃芳玉（2003）的研究亦指出國小六年級學生的表徵能力不會伴隨著計算能力的成長而發展，並且說明學生若能運用數學表徵和能彈性靈活的進行表徵轉換，例如：具體操作、口語表徵、圖形表徵、符號表徵等方式，可以有效幫助學生思考並能培養解題能力。當學生能進一步運用文字、數字等抽象符號來呈現他的學習經驗與知識時，則表示學生的思考能力已更上一層樓，能獨立進行抽象思考。

由上可知，數學表徵與數學學習之間有密不可分的關係，學生能夠以一種有意義的形式，來表徵數學問題情境，即表示學生對於問題情境有更進一步的理解，能幫助學生發展組織思考以及分析問題的呈現。但是，在我們的數學課室內不難發現學生還是深受到傳統紙筆算則的侷限，而不能夠有意義化的學習數學。基於此，一次機會下，筆者對所任教的班級（五年級學生32人）進行一次「數學解題大激盪」，藉機鼓勵學生運用自己的數學知識和過去學習過的表徵或其它解題經驗來解決尚未學習過的數學問題，不僅可以了解學生對表徵的使用概況，也讓筆者藉此做一次教學上的省思。

## 貳、 腦力大激盪開始囉！！

目前筆者所任教之五年級學生尚未學過分數除法和異分母的比較，因此在這一次的大激盪中，筆者佈了下列兩個題目，要求學生進行解決相關題目，看他們如何運用已學過的知識或表徵來協助其解決尚未學習過的問題。測驗之前，筆者提示學生能以多種方式答題，用畫的、用算的、用文字敘述、甚至用說的都可以。

台下學生卻表示：啊！老師，要怎麼畫？還沒教過我不會…等等許多氣餒、無助的聲音出現。

【問題一：有果汁  $2\frac{1}{2}$  公升，平分給2人，每人可分到多少公升？】

【問題二： $\frac{2}{3}$  和  $\frac{1}{2}$  哪一個大？怎麼比出來的？】

以下乃依據學生解題情況相近給予分類，讓我們一起分享這一次大考驗之學生的解題情況：

### 一、舊經驗的連結展開成功表徵解題的第一步

此次的大考驗中，從學生的解題可以發現，即便題目是他們尚未學習的內容，但是藉著過去所學習過的數學內容及不同的表徵方式，難題還是可以迎刃而解。舉例如下：

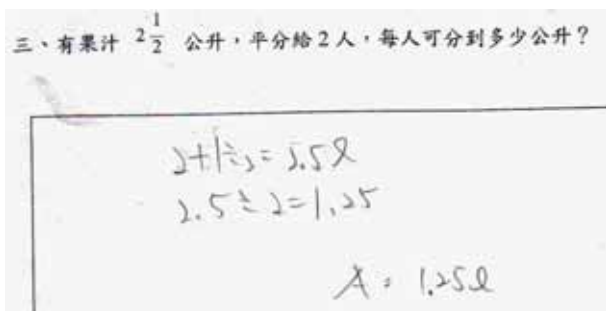


圖 1：學生第一題的解法

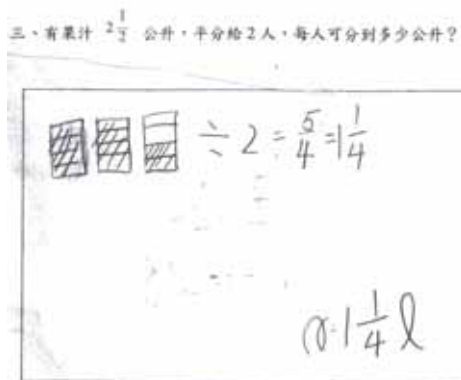


圖 2：學生第一題的解法

從圖一、圖二可知：學生不會  $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$ ，但知道  $\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0.5$ ，改由小數計算，以小數符號表徵，在符號表徵系統內進行轉換，也就是利用所學過的概念來解題成功，是個很棒的解題策略。此外，雖然未學過分數除法（已學過簡單的單位分數），但學生能夠運用所學過的單位分數  $\frac{1}{4}$ ，並透過圖形表徵清楚知道  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ，將  $2\frac{1}{2}$  分成10個  $\frac{1}{4}$  而求出正確答案（如圖2）。而從圖3及圖4學生之解法，利用過去所學將  $\frac{2}{3}$  及  $\frac{1}{2}$  這些符號表徵以圖畫來呈現，直接利用圖形表徵的方式，正



確表徵出 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 。學生面臨情境問題時，能以自己的表徵方式來解題，雖未學過異分母的比較，但亦能夠運用圖形表徵成功解題問題，利用過去學習的經驗及自行畫圖來解題。由此可知，學生能夠利用舊經驗的連結，透過圖形或不同符號間的轉換表徵幫助學生思考並且能提升學生自我建構數學概念的能力，能進而達到成功的解題。

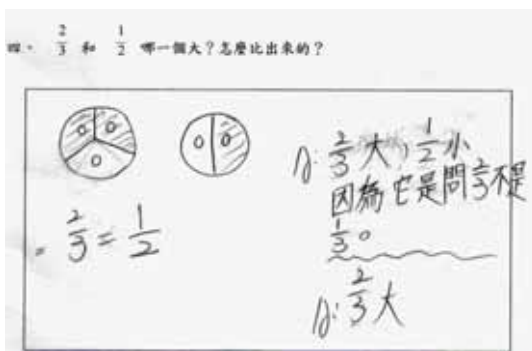


圖 3：學生第二題解法

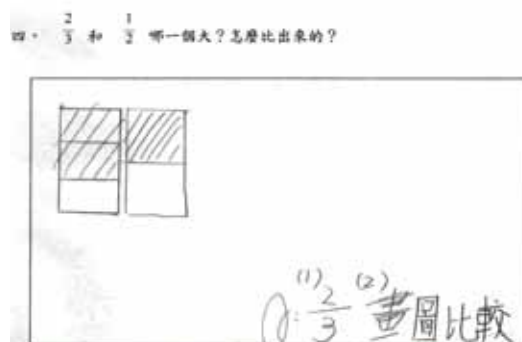


圖 4：學生第二題解法

## 二、利用文字符號勾勒腦中的想法

文字描述是紀錄想法的利具，也可以讓教師更直接了解學生腦中的想法。有些學生直接透過文字的陳述來記錄其數學上的解法及想法，除了能幫助學生發展組織思考以及分析問題的呈現外，有時可以藉此讓教師更可以容易窺見學生對數學語言的使用之混淆。舉例如下：

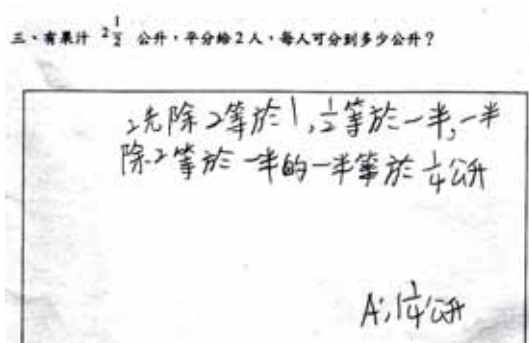


圖 5：學生的解法

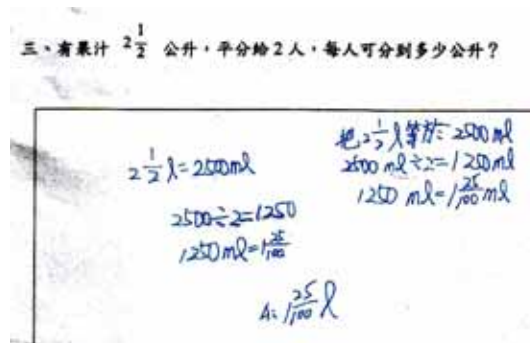


圖 6：學生的解法

從圖5及圖6，學生透過文字敘述（口語符號表徵）很清楚表示知道要平均分

給2人，所以利用把 $\frac{1}{2}$ 分成一半是 $\frac{1}{4}$ ，因此求出答案，但也讓筆者意外發現學生分不清楚數學語言『除』、『除以』使用，值得做為將來教學時加強建立正確數學語言的運用。再者，進行此次激盪測驗時，班上學生剛好學完容量單元，學生能夠將所學的容量單位換算（1公升=1000豪公升）靈活運用在此題的解題，是個非常好的解題策略，而透過文字的陳述及符號的表徵，教師可看出學生在容量單位換算的概念也已建立。

### 三、自行創立獨門記錄方式

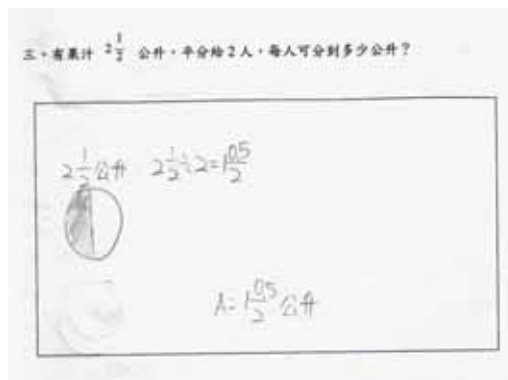


圖 7：學生的自創解法

因為學生未學過分數除法（ $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$ ），所以，學生用一種自認是對的符號 $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{0.5}{2}$ ，以自己的符號表徵方式來得到答案，令人眼睛為之一亮。

進行解題時，學生經常會很急著問：老師，我這樣算對不對？，往往關心的是答案的對與錯，而忽略了解題過程中真正的意義。看到學生自創數學符號，並且言之有理的答案對研究者而言是一件非常令人振奮的事，因為透過學生如此的表徵方式可知他能夠由自己的思考方式建構數學知識。而孩子們便是需經由建構的歷程來了解數學算則其背後的意義，經過深思的解釋比快速的算出答案更有意義和價值。因此，『不需擔心答案對與否』，在評斷答案對錯之前，先給學生一些時間去聆聽和討論各種解題策略，並進一步反思自己的解法和評論同儕的解法。

筆者之所以不建議先教算則，乃因為在教學現場經常發現：國小學生非常服

從老師的指令，老師若先教分數算則，學生將會很容易接受沒有意義的數學算則和答案，而算則會使孩子們失去他們自己的思考歷程，甚至阻礙了孩子數常識的發展，最後導致孩子只是一味依賴算則。因此，學生是需要被鼓勵去創造更多的數學表徵方式，但仍以正確的抽象符號表徵為最終的目標。

#### 四、透過文字（口語）、符號或圖形的紀錄表徵可窺探學生之數學概念的錯誤或迷思

短短的一堂課，學生不僅可以發揮其自發性解法，也讓老師藉機一窺學生腦中的數學想法。教師引導學生寫出或說出解題策略，能夠幫助學童進行反思，並且能提供教師回饋，讓教師明白學童的迷思。有些學生雖然答案正確，但透過寫作單上的解題可看出其解法和觀念是錯誤的。舉例如下：

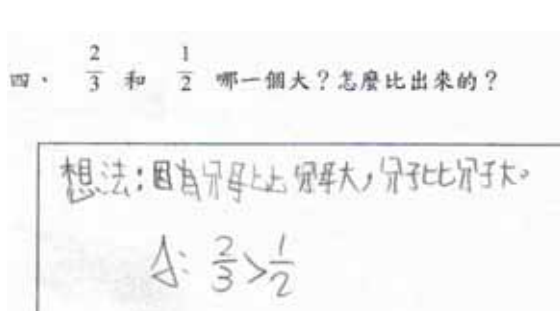


圖 7：學生的寫作單

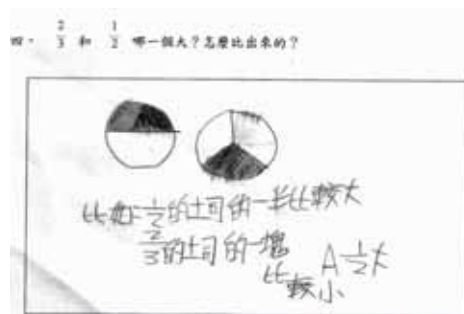


圖 8：學生的解法

雖然學生最後答案：『 $\frac{2}{3}$ 大』是正確的，但他認為分母： $3 > 2$ 、分子： $2 > 1$ ，所以 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ （圖7），從這可以得知學生分數概念上具有迷思，老師必須要加以關注。學生記錄求解方法，可以讓老師有機會看清學生思考數學的方式，知道學生這樣的觀念、想法是錯誤的，進而協助修正學生的迷思概念。

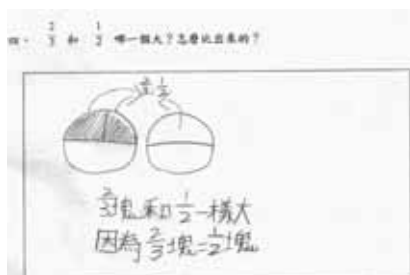


圖 9：學生的解法

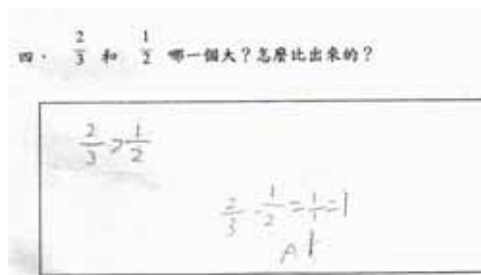


圖 10：學生的解法

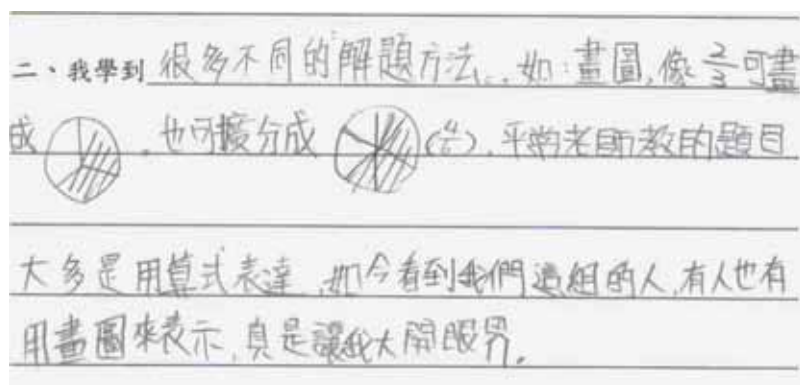
圖 8、圖 9、圖 10 是不同的學生在相同的題目上顯現出不同的錯誤。如圖 8 學生以面積（畫圖表徵）的大小來比較，認為 $\frac{1}{3}$ 塊比較小、 $\frac{1}{2}$ 塊比較大，而不知 $\frac{2}{3}$ 是 2 個 $\frac{1}{3}$ ，造成解題失敗；圖 9 顯示出學生未能有等分概念，雖知道 $\frac{2}{3}$ 是三塊中的兩塊，但卻不是相等的三塊，經由圖形表徵，教師可以清楚知道學生解題失敗的原因；圖 10 可知，雖然學生能寫出 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ，但不代表他的想法是正確的。這位學生以 $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1} = 1$ 的方式判斷 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ，答案雖然正確但概念錯誤，因為學生誤以為分數相減，即分母減分母、分子減分子，這是學生常見的迷失概念。

當學生發表具有迷思的解題策略後，筆者會要求其他學生提出意見，認為此種解題策略恰不恰當？透過同儕間的討論可讓有迷失概念的學生產生認知衝突，清楚知道自己的迷思。如圖 7，透過同儕的回饋，S1：『比大小不能這樣比。』T：『為什麼不能這樣比？有誰能舉出其它例子。』S2：『嗯...  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{1}{1}$  誰大？』S3：『對阿！你那個是巧合啦！』。圖 8，許多學生很快就能發現其錯誤之處，S4：『它是說 $\frac{2}{3}$ 又不是說 $\frac{1}{3}$ 』。圖 9，S5：『你畫錯了啦！ $\frac{1}{3}$ 要畫一樣大塊才可以』。圖 10，S6：『好有創意喔！可是分數不能這樣減，要不然 $\frac{2}{3} - \frac{1}{1}$ 怎麼減啊？』。經過學生的辨證再加上教師適時介入引導學生思考，大部分學生都能了解其迷思概念並修正自己的迷思概念，至於少數仍然無法理解的學生，教師便能清楚學生尚有哪些迷思概念以便進行補救教學。

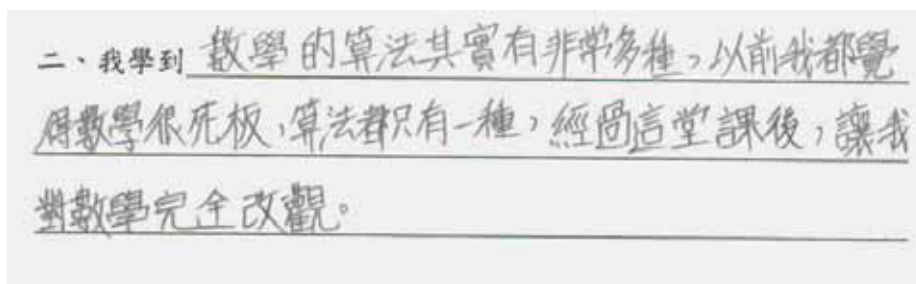
檢驗學生數學學習成果及能力指標是否達成，最直接的方式就是觀察學生的解題歷程和結果。因此，經由筆者所佈下的題目，透過學生各種不同數學表徵的方式，可以一窺學生是如何「瞭解」與「運用」數學概念。

分數除法單元一直是令高年級教師感到不好教的單元，筆者以前也跟大多數教師一樣直接教授算則，後來發現學生只是依樣畫葫蘆，未能真正獲得數學概

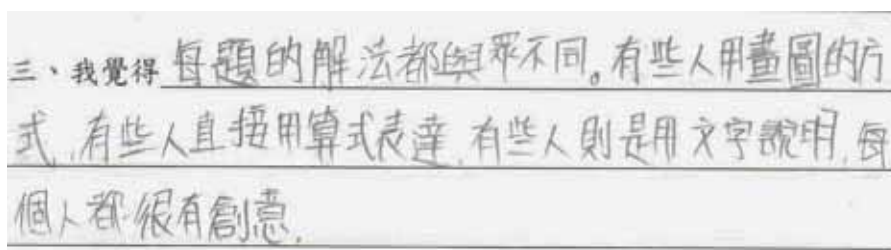
念。我們常以教師的角度看學生，而低估學生自我建構的能力，但是，在這次的教學中，透過學生的解題表現和課室間的發表，可看出學生的創意和數學概念的表現是非常多元的，且能透過思考的歷程慢慢建構出自己的數學知識，從學生在這堂課後的學習日誌可窺一二。



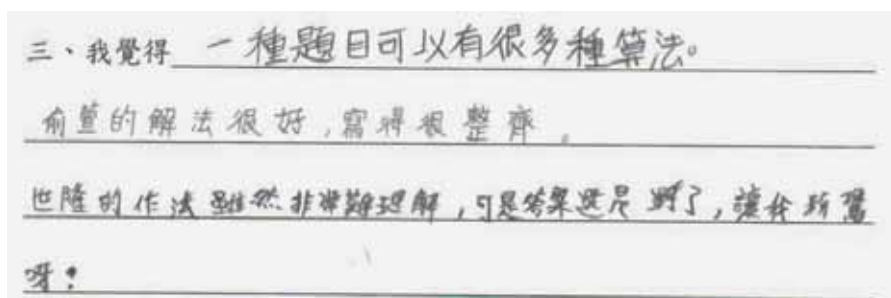
圖十一：學生學習日誌



圖十二：學生學習日誌



圖十三：學生學習日誌



圖十四：學生學習日誌

學生的學習日誌中表示，數學可以有很多不同的解法，平常老師教的題目大多是用算式表達，看到其他同學有不同的解法，學生以前認為數學很死板，算法只有一種，而經過這一堂課，學生嘗試用畫圖、算式、文字說明、單位量轉換的方式解題，以不同表徵來解題，並且能欣賞別人的解題策略，並且學會欣賞別人的解題，進而選擇自己能理解的方式或更簡便的方式來成為自己的解題策略。

### 參、 我學到了什麼？

透過了這次的教學，學生解題經由舊經驗連結或自發性解法的表現，讓筆者相當驚訝學生的表現是這麼的多元，雖然學生存有些許的迷思。學生透過半具體的圖形表徵、口語表徵再加上教師適時的介入引導思考，對學生的分數概念理解有很大幫助，似乎也能引起學生更多的數學學習興趣，不再視數學為畏途。

平日的教學只是一味的趕快教授算則，多讓學生習練習，誤以為這樣學生就學會了，而忽略了學生的思考過程，舉凡隨堂測驗或定期評量，總會發現學生的成績表現不如預期理想，因而認為學生不夠認真學習，於是再讓學生做更多無謂、無意義的練習。因此，身為教師要能夠知道學生的迷思，了解學生數學概念的學習情況，對於從事數學教學實務工作者將有很大的幫助。從學生的解題過程發現，透過圖形表徵大部分學生都可以順利解題成功，進而幫助學生建立分數概念；也有部分學生靈活運用已學過的知識，改變解題策略，同樣能夠成功的解題，然而教師在過程中的角色仍是不可忽略的，適時的引導、介入，最後才引入正式抽象符號的表徵，以幫助學生發展正確的分數概念。因此，抽象符號表徵引入的時間點顯得非常重要，越抽象的概念學生越不易理解，教師要能夠透過更多元的表徵教學活動，讓學生於課室中表達、澄清自己的想法，進而建構正確分數概念。適當的運用多樣化的數學表徵，不但能夠增進數學概念的理解，還能夠以此數學表徵，作為與他人溝通數學想法的媒介，甚至將其應用在真實的問題情境，以進一步解決生活當中所面臨的問題。

多一點空間，多一點機會，數學課不再成為科目排行榜之末；多一點肯定，多一點鼓舞，數學學習不再只是公式和數字間的穿梭。特別在分數學習過程中，我們常發現學生只會依樣畫葫蘆，機械式的運用算則計算，只知其然，不知其所以然。因此，教師不要急於教導分數符號及算則的學習，學生分數概念的發展應優先符號及算則的學習。教師若能重視學生自主性的表徵，提供多元表徵的學習機會，讓學生主動參與學習，學生必能發展良好分數概念。因此，身為數學教師的我們在學生學習數學的過程中，應多提供學生運用數學表徵的機會，讓數學表徵成為拓展數學思考能力的工具，對於學生數學概念的發展有莫大的助益。

### 參考文獻

- 黃芳玉 (2003)。國小六年級學生數學表徵能力與計算能力之研究。國立嘉義大學教育學院數學教育研究所，碩士論文。
- 劉秋木譯 (R.B. Davis 著) (1990)。數學學習。五南。
- Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541-547.
- Cramer K. A., Post T. R. & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). On different facts of mathematical thinking, in : R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*, Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representation and translation among Representation in mathematics learning and problem solving, in C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics*, NJ: Erlbaum.

## 「新台灣之子」數學學習初探

姚如芬

嘉義大學數學教育研究所

### 摘 要

近二十年來在台灣遽增的跨國聯姻使台灣的社會面貌逐漸地改觀。台灣的數學教育因著此波「學習者人口結構」的逐步改變可能衍生出新的數學學習問題，因此，應如何面對以及提供哪些方法來解決相關的問題，實為當今台灣數學教育社群無可迴避的新興議題。研究者以雲嘉地區的 445 名國小二年級學童為對象，進行了一次數學學習表現的調查研究，其中「新台灣之子」有 31 名。調查結果顯示：個案學校中的這群「新台灣之子」其數學學習表現之變異情形極大，不論是在各數學主題或整體表現，皆有滿分者，但也有極低分的人；平均而言，在各數學主題的學習表現上以「量與實測」與「統計與機率」此二主題的平均表現較佳，且與一般學生無顯著差異；但在「數與計算」、「圖形與空間」此二主題的學習表現則顯著低於一般學生；而在「代數」該主題的平均表現是最差的，但與一般生的代數表現並無顯著差異；至於母親的國籍或父親的教育程度對「新台灣之子」的數學學習表現並沒有顯著的影響。

### 疑 慮

以下是一封來自法國某個小鎮的居民連署書，該小鎮鄰近法國邊境，因為政治因素湧入許多外國移民。小鎮上許多的當地居民擔心因為這批外國移民的湧入並進入學校就讀而剝奪他們孩子受教的權益，於是，他們建議學校甚至向校方強烈抗議，希望能將這些外籍學生自編成一班，或者轉至其他專門的收留學校，以免影響到他們孩子的學習。



『花時間教不識字的孩子而忽略我們的孩子這樣做公平嗎？

剝奪我們孩子的求知權利這麼做又公平嗎？

請問，我們還要為他們付出多少？

我們對這些外國籍的孩子並無偏見，

只希望先關心我們孩子的未來...。』

可能目前有些台灣的父母也有類似的疑慮。由於在全球化趨勢與人口大遷移的潮流中，台灣的社會面貌已逐漸地改觀。近二十年來在台灣遽增的跨國聯姻，也在此效應下，形成一個相當特殊的現象。

雖然，許多教育及醫療等專業單位陸續發現，外籍配偶——尤其是文化差異較大的東南亞籍母親，她們的學齡前子女出現有語言障礙、學習障礙、發展遲緩、在團體中明顯害羞、沒自信、被拒絕、排斥、或因母親不適應、過度壓抑或出現暴力相向等情形（邱方晞，2003；高有志，2003；夏曉鵬，2000；張齡友，2003；葉郁菁，2003；蕭昭娟，2000；鍾武達，2000）；甚至有學者直指，外籍母親因其家庭組成因子的特殊，使其子女的學前發展充滿危機（鍾重發，2003）。國外也有學者指出，由於跨國婚姻中的夫妻來自不同的文化體系，不同的語言、習俗、習慣等文化背景，親職雙方易各秉持著不同的文化認知教養子女，Steven 等人（1993）即認為：父母因文化背景不一，與孩子的互動方式就有異（Steven, Hough, and Nurss, 1993），Bronfenbrenner（1986）更指出：來自兩個不同文化婚姻結合家庭的孩子，他們可能承受比單一文化婚姻結合家庭的孩子更多的負面壓力，而在建立自我認同方面遭受較大困難，且由於社會成員的排斥，造成其適應困難及較低的自尊，其前後矛盾的社會化也會導致心理調應失調。

然而，也有學者持相反見解，Garza 和 Lipton 就認為兩種不同文化結合的家庭，其社會化的結果比單一文化結合的家庭更有助於兒童接觸更寬廣的價值、規範、道德與行為（引自 Stephan and Stephan, 1991）。由此可知，父母親的迥異文化背景能提供子女更多樣的刺激，但如果外在環境不友善，極可能造成其調適、

自信等問題。

台灣的數學教育因著「學習者人口結構」的逐步改變可能衍生出新的數學學習問題(如母親的異國文化對於學童數學學習的可能影響、或是多元文化的數學教育可能產生的利弊得失等),因此,應如何面對以及提供哪些方法來解決相關的問題,實為當今台灣數學教育社群無可迴避的新興議題。而且,綜合有關「新移民女性」及其子女的文獻探討可以看出(王光宗,2004;王瑞璦,2004;吳清山,2004;林璣萍,2003;夏曉鶻,2005;張齡友,2004;蔡榮貴、黃月純,2004;鍾鳳嬌、王國川,2004):目前國內有關「新移民女性」及其子女的相關研究報導,大都鎖定在生活適應或較為一般性的教育問題,至於「新移民女性」子女之『數學』學習情形的探究則較為欠缺。然而,數學教育一直以來皆是國民教育中重要的一環,且數學學習的果效亦會影響到其他自然科學的學習,因此,在愈來愈多「新移民女性」子女紛紛進入小學就讀的今日,實有必要以其為對象,針對其數學學習做較為特定且深入的探究與追蹤,期待能因此進一步理解其相關的數學學習表現、或困境、或需求,且因著這些理解,能提出更為具體、適切的因應對策,不論是在數學學習、或數學教學、甚至數學師資培育等方面。

## 企 圖

其實,研究者最終的企圖是希望透過一系列的探究,能針對「新移民女性」之子女的數學學習情形作一全面性的理解與報導,以期能為這群為數日益增多的「新台灣之子」之數學學習狀況,提供一份據實的本土性資料,特別是在今日充斥著對「新移民女性」污名化與標籤化的台灣社會(夏曉鶻,2005)。由於研究者希望能進行長期的縱向追蹤,所以選擇先以『「新移民女性」之國小低年級子女』作為研究的起點,探究與理解其相關的數學學習表現、困境、與需求。因此,本文的主要目的在報導研究者近期針對雲嘉地區三所國小二年級的「新台灣之子」(指「新移民女性」的子女)之數學表現所做的調查結果,包括:(1)個案

學校中「新台灣之子」在各數學主題的學習表現、以及(2)個案學校中「新台灣之子」與一般學童之數學學習表現的比較；希望因著這些理解，能因此進一步提出更為具體、適切的因應對策。

## 探 索

事實上，研究者對於「新移民女性」之子女的數學學習情形並不預設立場，純粹以「理解」為前提，嘗試先理解現況，再尋找合適的施力點與相關對策。研究者以三所雲嘉地區的國小二年級學童為對象，進行了一次調查研究。其中雲林縣幸福國小(化名)二年級有6個班級，受測人數187人(含有「新移民女性」的子女12人)，雲林縣平安國小(化名)二年級有3個班級，受測人數102人(含有「新移民女性」的子女11人)，而嘉義縣快樂國小(化名)二年級有5個班級，受測人數156人(含有「新移民女性」的子女8人)，三校共計施測445名學童，其中新台灣之子有31名。選擇此三校的理由是基於地利與學校的配合意願。研究者以「國小一年級的數學學習內容」為範圍，根據九年一貫課程數學領域正式綱要中所揭示的一年級各項分年細目，編製了一份**數學基本能力測驗**(包含數與計算、量與實測、圖形與空間、統計與機率、及代數共五大數學主題)，其中數與計算8題、量與實測4題、圖形與空間4題、統計與機率1題、及代數4題，共21題，每題6分，總分126分，目的在了解三校學童中「新台灣之子」關於國小一年級數學內容的學習表現、以及他們與一般學童的數學學習表現之差異情形。此測驗之效標效度達0.824(測驗結果與學童一年級的數學學年成績之相關係數)，測驗內容以及各題在五大數學主題的分布情形詳見附錄一，至於「新台灣之子」的數學表現與其相關資料的調查結果則整理於附錄二。

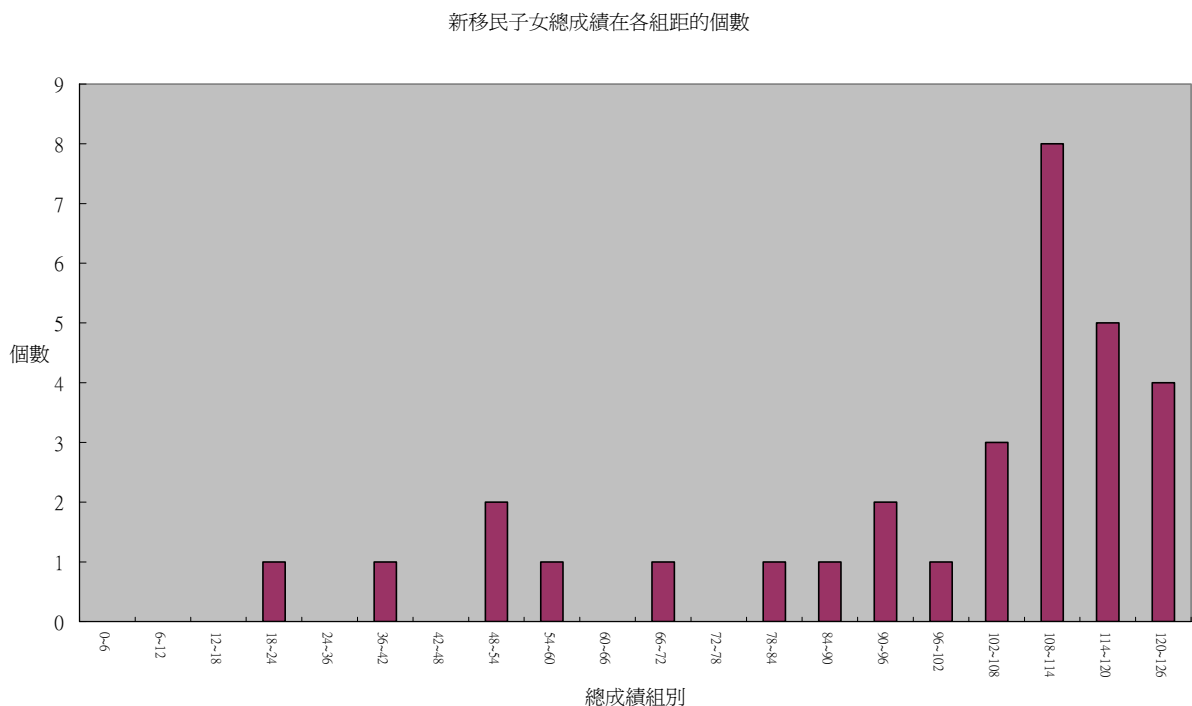
## 釐 清

研究者根據測驗結果主要進行了二項分析，包括：「新台灣之子」於各數學

主題的學習表現分析、以及「新台灣之子」與一般學童之數學學習表現的比較分析；另外亦針對不同母親國籍與不同父親教育程度的「新台灣之子」其數學學習表現的差異進行分析。茲將分析結果分別敘述如下：

一、 「新台灣之子」於各數學主題之學習表現

首先，研究者將此 31 位「新台灣之子」在「數學基本能力測驗」的成績分布情形以圖一示之，並將其在各數學主題的平均表現整理如表一所示（詳細資料可見附錄二）：



圖一 31 位「新台灣之子」之「數學基本能力測驗」成績分布圖

表一 31 位「新台灣之子」在各數學主題的平均表現

數學主題	平均得分	最高分	最低分	標準差
數與計算(滿分48)	37.35	48	6	12.11
量與實測(滿分24)	20.90	24	2	4.61
圖形與空間(滿分24)	18.19	24	0	5.74
統計與機率(滿分6)	5.23	6	0	1.39
代數(滿分24)	15.23	24	0	9.03
總分(滿分126)	96.90	126	18	27.61

從圖一的分布情形以及表一的統計結果觀之，此 31 位「新台灣之子」的「數學基本能力測驗」成績落差極大，不論是在各數學主題或整體表現，皆有滿分者，但也有極低分的人，顯示個案學校中的「新台灣之子」其數學學習表現之變異情形極大，並不似社會大眾所擔憂的一有普遍低落的現象。

至於此 31 位「新台灣之子」在各數學主題的學習表現上是否有差異？以單題平均得分觀之（請見表二），經由相依樣本單因子變異數分析以及成對比較（結果如表三所示）後發現：「新台灣之子」在「量與實測」與「統計與機率」此二主題的平均表現最佳，其次是「數與計算」之平均表現排名第二，「圖形與空間」該主題的平均表現則是稍弱，而在「代數」該主題的平均表現是最差的；且「量與實測」此主題的平均表現顯著優於「數與計算」、「圖形與空間」以及「代數」這三主題的平均表現（達 0.05 之顯著水準）；而「統計與機率」此主題的平均表現亦顯著優於「圖形與空間」以及「代數」這二主題的平均表現（達 0.05 之顯著水準）。

表二 「新台灣之子」在各數學主題之單題得分平均

	單題得分平均數	標準差
數與計算	4.67	1.51
量與實測	5.23	1.15
圖形與空間	4.55	1.44
統計與機率	5.23	1.39
代數	3.81	2.26

表三 成對比較後之「新台灣之子」於各數學主題中之差異顯著性

	數與計算	量與實測	圖形與空間	統計與機率	代數
數與計算		.007*	.654	.087	.004*
量與實測	.007*		.004*	1.000	.000*
圖形與空間	.654	.004*		.001	.040*
統計與機率	.087	1.000	.001*		.000*
代數	.004*	.000*	.040*	.000*	

\*.表在水準.05的平均數差異顯著

## 二、「新台灣之子」與一般學童數學學習表現之差異比較

首先呈現的是關於「新台灣之子」與一般學童在「數學基本能力測驗」成績之平均數與標準差，如表四所示：

表四 一般生與「新台灣之子」數學測驗成績之平均數與標準差

	分組	個數	平均數	標準差
數與計算 (滿分48)	一般生	414	42.10	8.22
	新台灣之子	31	37.35	12.11
量與實測 (滿分24)	一般生	414	21.51	3.70
	新台灣之子	31	20.90	4.61
圖形與空間 (滿分24)	一般生	414	20.20	4.79
	新台灣之子	31	18.19	5.74
統計與機率 (滿分6)	一般生	414	5.55	.93
	新台灣之子	31	5.23	1.39
代數 (滿分24)	一般生	414	17.58	6.77
	新台灣之子	31	15.23	9.03
總分 (滿分126)	一般生	414	106.93	19.40
	新台灣之子	31	96.90	27.61

將表四的統計結果以 t-test 進行「新台灣之子」與一般學童之數學學習表現的差異比較分析後發現：個案學校中「新台灣之子」與一般學童在「數與計算」、「圖形與空間」此二主題的學習表現有顯著的差異性，亦即，新移民女性之子女在此二主題的學習表現顯著低於一般學生（達 0.05 的顯著水準）；而在「量與實測」、「統計與機率」及「代數」此三主題的學習表現則與一般學生無顯著差異（惟兩群學生在「代數」該主題的表現均較為低落）；若就整體表現觀之，「新台灣之子」在「數學基本能力測驗」的得分平均較一般學童的得分平均為低，達到 0.10 的顯著水準（詳細 t 檢定數據請見附錄三）。

### 三、 不同母親國籍與不同父親教育程度的「新台灣之子」其數學表現的差異分析

個案學校中 31 位「新台灣之子」的母親國籍經由統計整理可以看出其中有 10 位為大陸籍、有 10 位為越南籍、有 10 位為印尼籍、還有一位為菲律賓籍。研究者以「母親國籍」作為因子，經由獨立樣本單因子變異數分析探討不同母親國籍的「新台灣之子」其數學學習表現是否具有差異，結果發現：不論母親國籍為大陸、或越南、或印尼，三組「新台灣之子」的數學學習表現並沒有顯著的差異性，顯示母親國籍並非影響個案學校中「新台灣之子」數學表現的重要因素。而由於菲律賓籍只有一位，在統計上並無實質意義，因此，不予討論。

至於此 31 位「新台灣之子」其父親的教育程度為國小程度者有 5 位、國中程度者有 19 位、高中程度者有 7 位。研究者以「父親教育程度」作為因子，經由獨立樣本單因子變異數分析探討不同父親教育程度的「新台灣之子」其數學學習表現是否具有差異，結果發現：不論父親的教育程度是國小、或國中、或高中，三組「新台灣之子」的數學學習表現亦沒有顯著的差異性，顯示父親的教育程度亦非影響個案學校中「新台灣之子」數學表現的重要因素。而由於各國學制與內涵皆有些許不同，因此在此並未以「母親的教育程度」作為討論「新台灣之子」數學表現差異的因素。

### 結 語

由於目前國內有關「新移民女性」及其子女的相關研究報導，大都鎖定在生活適應或較為一般性的教育問題，至於「新移民女性」子女之『數學』學習情形的探究則較為少見。因此，研究者希望能針對「新移民女性」之子女的數學學習情形作一較為全面性的理解與探究，以期能為這群為數日益增多的「新移民女性」子女之數學學習狀況，提供一份據實的本土性資料。

而從前節的分析結果可以看出：個案學校中的「新台灣之子」其數學學習

表現之變異情形極大，不論是在各數學主題或整體表現，皆有滿分者，但也有極低分的人，且其數學學習表現其實與母親的國籍、或父親的教育程度等變項並無顯著、絕對的關連性。雖然確實有些孩子其數學學習表現不盡理想，且整體觀之，「新台灣之子」在「數學基本能力測驗」的得分平均較一般學童的得分平均為低，然而，若從個別個案來看，會發現「新台灣之子」中亦不乏有優異表現者，特別是雲林縣平安國小十一名新移民女性的子女中，有九位的得分位於該校的平均之上。從這些具體的數據顯示：還是有許多表現頗佳的「新台灣之子」存在的，事實上，他們並沒有輸在起跑點上，將其污名化與標籤化（如：高風險家庭的孩子或學習上的弱勢族群等）其實並不公平！

至於此 31 位「新台灣之子」在各數學主題的學習表現上則是以「量與實測」與「統計與機率」此二主題的平均表現最佳，且與一般生無顯著差異；而在「數與計算」、「圖形空間」此二主題的學習表現則顯著低於一般學生；至於在「代數」該主題的平均表現是最差的，但與一般生的代數表現並無顯著差異。

## 展 望

本文僅就量化的面向針對「新移民女性」子女之數學學習情況進行調查、分析與報導，希望能為部份「新台灣之子」的數學學習情形提供一份據實的本土性資料；未來，將針對相關對象（包括新移民女性、新移民女性之子女與任課教師等）進行訪談，以了解其數學學習表現及影響其數學學習的關鍵因素，並探查「新移民女性」在輔導子女學習數學時所遭遇之困境與所需的協助；同時，亦擬將「文化」的變項加入探討，例如：來自母親的異國文化對於學童的數學學習可能產生的影響、或是如何善用母親的異國文化做為輔導學童學習數學的助力、以及多元文化的數學教育可能產生的利、弊、得、失等；所以，除了針對影響其數學學習的各項可能因素進行迴歸分析，找出主要的關鍵因素，亦會輔以質性探究的方式進行詮釋與檢驗；然後再根據影響「新移民女性」子女數學學習的關鍵因



素，設計數學學習輔導活動並實踐之，以協助或促進「新移民女性」之子女學習數學；最後，希望能綜合各項研究結果，根據各個學習活動的發展與實踐情形，以個案的形式編撰整理成「數學教/學案例」，以提供數學師資培育課程中關於多元文化觀點的討論素材，並充實教師在數學教學上的多元文化素養。

## 誌 謝

本研究蒙國科會經費補助（計畫編號：NSC 95-2521-S-415-003）以及虎尾高中李玉文老師在測驗編製與資料搜集方面的鼎力協助，使研究得以順利完成，特此致謝。

## 參考文獻

- 王光宗(2003) 我是外籍新娘，我也是一個母親——台南縣東南亞外籍新娘在孩子入學後初探。南縣國教，9：29~31。
- 王光宗（2004）台南縣東南亞外籍母親在子女入學後母職經驗研究。國立嘉義大學教育學院家庭教育研究所碩士論文，未出版。
- 王秀紅、楊詠梅(2002) 東南亞跨國婚姻婦女的健康。護理雜誌，第 49 期，35-41。
- 王瑞堦（2004）大陸和外籍新娘婚生子女適應與學習能力之探究。臺灣教育，25-31。
- 江亮演，陳燕禎，黃稚純（2004）社區發展季刊：大陸與外籍配偶生活調適之探討，66~89。
- 吳清山（2004）外籍新娘子女教育問題及其因應策略。師友月刊，3 月號，6-12。
- 林璣萍(2003)台灣新興的弱勢學生——外籍新娘子女學校適應現狀之研究。國立台東教育研究所特殊教育碩士論文，未出版。
- 邱方晞(2003)東南亞外籍新娘家庭問題與協助需求之探討。社區發展季刊，101，176-181。

邱豐盛、鄭秀琴(2005)正視「新移民子女」的學習及教養問題，載於教師天地，第137期，頁67-72。

高有志(2003年5月8日)。孩童發展遲緩成隱憂。中國時報，A11版。

夏曉娟(2000)資本國際化下的國際婚姻—以台灣的「外籍新娘」現象為例。台灣社會研究季刊，39，45-92。

夏曉鶻(2002)流離尋岸：資本國際化下的「外籍新娘」現象。台北：台灣社會研究雜誌社。

夏曉鶻(2005)解開面對新移民的焦慮。學生輔導月刊，NO.97，6-27。

張齡友(2003)外籍新娘在台托育需求初探。美和技術學院幼保系幼兒保育學術研討會論文集。屏東：美和技術學院。

張齡友(2004)早期家庭經驗對於柬埔寨母親學齡前子女教養之個案研究。幼兒保育學刊，2，139-164。

陳美惠(2002)彰化縣東南亞外籍新娘教養子女經驗之研究。國立嘉義大學家庭教育研究所未出版碩士論文。

莫藜藜、賴珮玲(2004)台灣社會「少子化」與外籍配偶子女的問題初探。社區發展季刊，105期，55-65。

葉郁菁(2003)澎湖離島地區東南亞女性外籍配偶子女暨子女生活狀況與福利需求調查。2002國際學術研討會-多元文化、家庭、社區與社會福利國際學術研討會論文集(p.107-135)。屏東，國立屏東科技大學。

蔡榮貴、黃月純(2004)台灣外籍配偶子女教育問題與因應策略。台灣教育，32-37。

鄭雅雯(2000)南洋過台灣：東南亞外籍新娘在台婚姻與生活探究—以台南市為例。國立東華大學族群關係與文化研究所碩士論文，未出版。

蕭昭娟(2000)國際遷移之調適研究：以彰化縣社頭鄉外籍新娘為例。國立台灣師範大學地理研究所碩士論文，未出版。

鍾重發(2003)家庭教育介入外籍新娘子女學前發展的模式與策略。幼兒教育學

刊, 109-205。

鍾武達 (2000) 外籍新娘子女淪為新弱勢族群。中國時報。2002 年 9 月 30 日,

資料來源：<http://ip148-027.shu.edu.tw/news/2000/06/03/2000-0603ch14.html>。

鍾鳳嬌、王國川 (2004)。外籍配偶子女的語文、心智能力發展與學習狀況調查

研究。國立高雄師範大學教育學系教育學刊, 23, 231-258。

Anderson, J.M., 1985, *Perspectives on the health of immigrant women: A feminist analysis. Advances in Nursing Science*, 8(1), pp.61-76.

Bronfenbrenner, U., 1979, *The Ecology of Human Development: Experiments by Nature and Design*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hammer, T. L., and Turner, P.H., 1996, *Parenting in Contemporary Society*. Boston: Allyn and Bacon.

Martin, C.A., and Colbert, K.K., 1997, *Parenting: A Life Span Perspective*. New York: McGraw Hill.

Nissani, H. (1993) Early childhood program for language minority students. ERIC Digest (ERIC Document Reproduction Service No. ED 355836)

Stephan, W.G. & Stephan, C.W. (1991). Intermarriage: Effects on personality, adjustment, and intergroup relations in two samples of students. *Journal of Marriage & the Family*, 53, 241-250.

Stevens, J.H., Hough, R.A., & Nurss, J.R. (1993). The influence of parents on children's development and education. In B. Spodek (Ed.), *Handbook of research on the education of young children* (pp.337-351). New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Walker, D., Greenwood, C., and Hart, B., and Carta, J., 1994, *Prediction of school outcomes based on early language production and socioeconomic factors. Child Development*, 65(2), pp.606-621.





8 填填看

- (1) 25 - 30 - 35 - ( ) - 45 - ( ) - 55  
 (2) 28 - 30 - 32 - ( ) - ( ) - 38  
 (3) 30 - 40 - 50 - ( ) - 70 - ( ) - 90

9. 寫出下列鐘面上的時刻



\_\_時\_\_分



\_\_時\_\_分

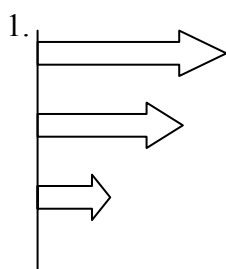


10. 完成八月的月曆再回答問題。

中華民國 93 年八月						
日	一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

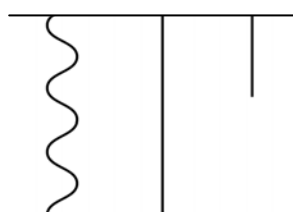
- (1) 8月8日父親節星期( )  
 (2) 爸爸在8月的每個星期三都要去學電腦，他一共要去( )次。  
 (3) 8月的最後一天是( )日，星期( )  
 (4) 9月的第一天是( )日，星期( )

11 長度最長的打 v，最短者畫 o



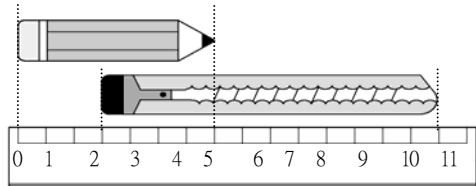
- ( )  
 ( )  
 ( )

2. ( ) ( ) ( )



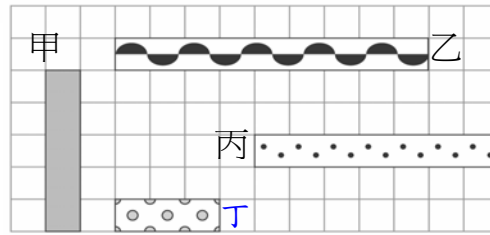
12. 請寫下長度

- (1) 鉛筆長( )公分，刀片長( )公分





(2) 把甲乙丙丁由長到短排排看，  
 ( )、( )、( )、( )  
 最長 最短



13. 曲線打 v，直線畫 o



( ) ( ) ( ) ( )

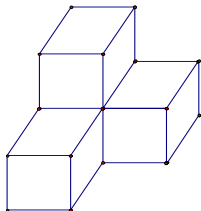
14. 數數看，請完成下列表格



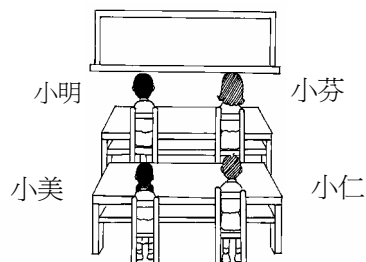
圖形	有幾個

15. 請畫一個三角形

16. 小名要用 ( ) 個 才可堆成下圖中的立體圖形



17. 看圖回答問題



- (1) 坐在小明的後面是( )
- (2) 坐在小美的右邊是( )
- (3) 小芬和小仁誰離黑板較近？( )





18. 小明本來有 26 元，哥哥又給她 18 元。小芬原來有 35 元，媽媽又給她 ( ) 元。結果兩人有一樣多的錢。請問：媽媽給小芬多少錢？請列出橫式運算
19. 小強在 10 月的時候存了 55 元，在 11 月的時候存了 95 元，小芬在 10 月的時候存了 95 元，在 11 月的時候存了 55 元，請問誰存比較多的錢？小芬小強一樣多（請打 $\checkmark$ 並寫出你的算法）
20. 甲乙兩人比賽投籃，每一個人投三次，甲第一次投中了 9 球，第二次投中 6 球，第三次投中 8 球，乙第一次投中了 8 球，第二次投中 9 球，第三次投中 6 球，請問誰投中最多球？甲乙兩人一樣多（請打 $\checkmark$ 並寫出算法）
21. 有一箱飲料原來有 9 瓶，再放進 15 瓶就可以把這個箱子裝滿，所以箱子裝滿後有 ( ) 瓶飲料。今天媽媽從裝滿的箱子裡面拿出了 9 瓶飲料，箱子裡還有 ( ) 瓶飲料。請列出橫式運算



附錄二、個案學校中「新台灣之子」的數學表現與相關資料的調查結果

一、雲林縣幸福國小「新台灣之子」的數學表現與相關資料

學 生 代 號	數與 計算 (滿分 48)	量與 實測 (滿分 24)	圖形 空間 (滿分 24)	統計 機率 (滿分 6)	代數 (滿分 24)	總分 (滿分 126)	母 親 國 籍	母 親 教 育	母 親 職 業	父 親 教 育	父 親 職 業
1201	18	17	18	4.5	0	57.5	大陸	國中	無	高中	工
1202	45	21.5	24	6	15	111.5	越南	國中	工	國中	工
1203	36	18	24	6	24	108	印尼	國中	商	高中	商
1204	24	23	22	6	6	81	越南	國小	工	國中	工
1205	48	24	24	6	24	126	大陸	國中	工	高中	工
1206	48	24	18	6	24	120	印尼	國中	工	國中	工
1207	12	12.5	12	3	0	39.5	越南	國中	工	國中	工
1208	33	24	24	6	0	87	越南	國中	工	國中	工
1209	42	19	18	4.5	24	107.5	大陸	國中	工	國中	工
1210	6	2	7	3	0	18	印尼	國小	服務業	國中	工
1211	11	17	12	6	6	52	越南	國小	工	國小	無
1212	36	22	18	6	18	100	印尼	國小	工	國中	工
全年級最高分	48	24	24	6	24	126					
全年級平均	40.1	21.5	20.4	5.6	17.6	105.3					
全年級最低分	0	2	3	0	0	16					

(※註：全校二年級受測人數共 187 人)

二、雲林縣平安國小(化名)「新台灣之子」的數學表現與相關資料

學 生	數與 計算	量與 實測	圖形 空間	統計 機率	代數	總分	母 親	母 親	母 親	父 親	父 親



代號	(滿分48)	(滿分24)	(滿分24)	(滿分6)	(滿分24)	(滿分126)	國籍	教育	職業	教育	職業
2201	45	24	18	4.5	24	115.5	印尼	國中	工人	高中	工人
2202	48	23	24	6	24	125	越南		賣麵	國中	工人
2203	42	22	24	4.5	18	110.5	大陸	國中	主婦	小學	司機
2204	39	22	18	6	24	109	大陸	國中	作業員	國中	貨運司機
2205	39	22	18	6	24	109	大陸	國中	家管	國中	司機
2206	48	20	22	6	18	114	印尼	不識字	主婦	小學	自由業
2207	42	24	18	4.5	6	94.5	印尼	未就學	公司 服務員	高中	工廠 作業員
2208	39	23	22	6	18	108	印尼	不識字	家管	小學	擺夜市
2209	42	24	12	3	9	90	越南	國中	工人	國中	工人
2210	48	22	18	6	24	118	印尼	高中	家管	國中	貨運司機
2211	48	23	16	4.5	24	115.5	越南	高中	賣檳榔	高中	司機
全年級最高分	48	24	24	6	24	126					
全年級平均	41.4	20.6	18.1	5.1	16	101.1					
全年級最低分	0	0	0	0	0	7					

(※註：全校二年級受測人數共 102 人)

### 三、嘉義縣快樂國小(化名)「新台灣之子」的數學表現與相關資料

學生代號	數與計算 (滿分48)	量與實測 (滿分24)	圖形空間 (滿分24)	統計機率 (滿分6)	代數 (滿分24)	總分 (滿分126)	母親國籍	母親教育	母親職業	父親教育	父親職業
3201	45	24	18	6	15	108	印尼	國中	工	國中	無
3202	48	22	18	6	15	109	大陸	國中	家管	國中	清潔隊

3203	36	22	22	6	18	104	大陸	國中	家管	國中	木工
3204	48	24	24	6	24	126	越南	國小	工	國中	無
3205	39	22	18	6	21	106	大陸	國小	家管	國中	技工
3206	37	14	0	0	0	51	菲律賓	無	商	國小	打零工
3207	21	23	9	6	7	66	越南	無	工	國中	木工
3208	45	24	24	6	18	117	大陸	高中	家管	高中	藥廠老闆
全年級最高分	48	24	24	6	24	126					
全年級平均	44	22	21	5.7	18	110					
全年級最低分	0	6.5	0	0	0	8.9					

(※註：全校二年級受測人數共 156 人)

附錄三、「新台灣之子」與一般生於各數學領域及整體表現差異之t檢定結果

		變異數相等的 Levene檢定		平均數相等的t檢定						
		F檢定	顯著性	t	自由度	顯著性(雙尾)	平均差異	標準誤差異	差異的95%信賴區間	
									下界	上界
數與計算	假設變異數相等	8.909	.003	2.986	443	.003	4.7466	1.5896	1.6225	7.8708
	不假設變異數相等			2.145	32.099	.040	4.7466	2.2130	.2393	9.2539
量與實測	假設變異數相等	1.729	.189	.862	443	.389	.6040	.7011	-.7738	1.9819
	不假設變異數相等			.713	32.954	.481	.6040	.8475	-1.1202	2.3283
圖形空間	假設變異數相等	.014	.907	2.212	443	.027	2.0033	.9056	.2236	3.7830
	不假設變異數相等			1.894	33.207	.067	2.0033	1.0577	-.1481	4.1547
機率統計	假設變異數相等	9.086	.003	1.790	443	.074	.3213	.1795	-3.1523E-02	.6741
	不假設變異數相等			1.267	32.024	.214	.3213	.2537	-.1954	.8380
代數	假設變異數相等	8.676	.003	1.816	443	.070	2.3494	1.2939	-.1934	4.8923
	不假設變異數相等			1.419	32.575	.165	2.3494	1.6560	-1.0214	5.7203
總分	假設變異數相等	9.484	.002	2.684	443	.008	10.0247	3.7356	2.6830	17.3663
	不假設變異數相等			1.985	32.256	.056	10.0247	5.0494	-.2575	20.3068

## 運用古文本於數學教學－以開方法為例

蘇意雯

台北市立成功高中

### 摘要

本文內容在於介紹如何運用古代數學文本於數學教學，主要以開方法作為例子。本文之作，源起於作者在教學過程中遇到困難，因此尋求古代文本－《九章算術》的協助。首先，作者先簡介《九章算術》這部經典，接著，論及開方術的出處、起源並探索它的幾何意義。最後，作者以課堂實作的心得，解釋教師如何擷取古代數學文本，加以適當剪裁，運用於數學教學。

關鍵字：九章算術、開方術、直式開方法、古代數學文本、HPM。

### 壹、前言

現行高中數學的教學過程中，（高二）統計部分求標準差的問題，往往需要估計方根的近似值，這時以「直式開方法」運算顯然較為簡便。可是，國中數學課程並未安排這一相關單元，因此學生大都沒有機會學習。據筆者每次調查，大概都只有少數幾位學生知曉。事實上，翻開九年一貫課程綱要，<sup>1</sup>在五大主題中的「數與量」說明裡提及：

八年級的教學雖以代數及幾何為主，但在數與量的部份強調方根的認識與根式的四則運算……，在求方根的近似值方面，可以透過電算器的使用讓學生知道方根如 $\sqrt{2}$ 等是無法利用有限多個位值的數來表示的，因此想要知道 $\sqrt{2}$ 的大小就必須要利用估算以求其近似值。……教學上仍以少位值的逼近法來求近似值為主。<sup>2</sup>

<sup>1</sup>教育部依據行政院核定之「教育改革行動方案」，進行國民教育階段之課程與教學革新，鑑於學校教育之核心為課程與教材，此亦為教師專業活動之根據，乃以九年一貫課程之規劃與實施為首務。民國 92 年 11 月 14 日台國字第 0920167129 號發布數學領域，在數學學習領域的主要內涵包含數、形、量基本概念之認知、具運算能力、組織能力，並能應用於日常生活中，了解推理、解題思考過程，以及與他人溝通數學內涵的能力，並能做與其他學習領域適當題材相關之連結。

<sup>2</sup>根據九年一貫課程綱要「數與量」的主題說明，在八年級的階段，學生學習方根的目的之一是

換句話說，在八年級的教科書編排中，就是以十分逼近法讓學生估算方根的近似值。

不過，學生儘管歡迎直式開方法，但卻很難知其所以然之故。他們對開方運算的過程不甚明瞭，就算筆者以平方和公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b) \times b$$

加以解釋，他們還是露出迷惘的眼神。針對這一現象，筆者雖然曾與同事討論，但大家都想不出較好的對策。於是，筆者想到以史為鏡—或許我們可以從古代數學文本尋求助力，藉由古代數學家運用開方術的思維和策略，說不定可以為現代數學教學，注入新的活力和啟發，從而幫助學生了解開方法的運算過程之意義！

筆者所選擇的古代數學文本，就是《九章算術》。在西元 1983 年《算數書》出土之前，<sup>3</sup>《九章算術》一直被認為是現在有傳本的，最古老的中國數學著作（錢寶琮，1984）。《九章算術》蘊藏有豐富的數學知識，再經過劉徽的注釋後，對於有心運用古代數學文本於教學的數學教師，往往是很重要的參考素材來源。

## 貳、《九章算術》

開方術見於《九章算術》一書。《九章算術》編纂年代大約是在東漢初期，書中收集了兩百四十六個應用問題的解法，分別隸屬於方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、句股等九章。三國魏晉時的劉徽注解《九章算術》，賦予其血肉，真正地體現了《九章算術》的精神，使之成為中國古代數學的經典。

《九章算術》的第四章名為「少廣」，由於古代中國人規定一畝之田，寬為一步，長為二百四十步，所以，「少廣」之本術，是在田地面積一畝固定不變的前提下，考察田寬有小量的增長時，相應田長之值如何變化的問題。現在，如果田地形狀為正方形，那麼，想要求其邊長，就變成為開平方根的問題了。

事實上，在「少廣」章中就有一段關於「開方術」的敘述，請容許筆者摘錄於下：

置積為實。借一算步之，超一等。議所得，以一乘所借一算為法，而以除。

---

要為勾股定理鋪路，同時作為代數中解一元二次方程式的根的前置經驗。顯然由於學生在國中階段主要以十分逼近法求方根的近似值，而使得他們在高中必須直接進行開方運算時遇到困難。

<sup>3</sup>這一部漢代竹簡書於 1983 年底到隔年初，連同陪葬的其他七冊竹簡，在中國湖北張家山第 247 號墓出土，超前《九章算術》，成為中國數學史上迄今所知的最早數學文本。

除已，倍法為定法。其復除，折法而下。復置借算步之如初，以復議一乘之，所得副，以加定法，以除。以所得副從定法。復除折下如前。若開之不盡者為不可開，當以面命之。若實有分者，通分內子為定實。乃開之，訖，開其母報除。若母不可開者，又以母乘定實，乃開之，訖，令如母而一。<sup>4</sup>

這段話主要是描述開平方的方法，其實也與我們現在所操作的步驟相仿。劉徽注說：「言百之面十也，言萬之面百也。」<sup>5</sup>若是被開方數為百，就以十為一『等』，被開方數為萬，就以百為一『等』。「開方」的「開」有分開的意思，「開方」就是分割正方形，從這個名稱我們可以得知此算法的幾何意義之來源，它是由對正方形的逐次分割來求其邊長。簡單的說，開方的目的，是求以 $n$ 為面積的正方形的邊長（即其面）。<sup>6</sup>在古文本中，若 $n$ 不是平方數，只好叫這條邊長做「 $n$ 之面」，<sup>7</sup>這就是「以面命之」的本意。但也有學者認為，如果 $n$ 是平方數，它的「面」就是一個正整數，我們仍然可稱其為「 $n$ 之面」（李國偉，1994）。

前文提及，劉徽的注為《九章算術》賦予血肉，劉徽主張把生動的直觀與抽象的邏輯論證結合起來，在《九章算術》注的原序中，劉徽提到：

徽幼習九章，長再詳覽。觀陰陽之割裂，總算術之根源，探蹟之暇，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注。事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹知，發其一端而已。又所悉理以辭，解體用圖，庶亦約而能周，通而不贖，覽之者思過半矣。<sup>8</sup>

<sup>4</sup>中算視開方為一種特殊的除法，籌算開方式一般排成上下四列，除了除法中的商、實(被除數)、法(除數)三列外，還增加了借算一列。開方中定位十分重要，為了定商與法的位，便藉用一根算籌來表示。開平方時「超一等」，被開方數為百，就以十為一「等」，被開方數為萬，就以百為一「等」。例如 55225 應以百為等，再來就是試算初商，推算出 2，接著用所得 2 與借算的 100 相乘一次，得 200，放在「法」這一系列為除數，用以除實 55225，得商數 200，再來就是 200x200 得積 40000，用以除實，得餘實 15225。倍法是把 200x2，因為這是法中已確定的部分，故稱之為定法。接著由定法來估算次商，這樣又得以再以借算定位，由上實來估算下法。在文後筆者將介紹此一運算的幾何意義。

<sup>5</sup>意即若正方形面積為一百，則邊長為十，若正方形面積為一萬，則邊長為一百。

<sup>6</sup>現代中文中的副詞「這一方面」、「另一方面」，就是由此而來的。

<sup>7</sup>東、西方通過不同的路徑來認識和發展無理數的理論。希臘人是從線段不可公度量的幾何角度著眼；中算家則是從開方不盡的計算過程來認識無理數。劉徽的注說明，在開之不盡時，便將這個無法用分數來表示的方根定義為「面」。例如面積為二的正方形之邊長，就稱為 2 之面。

<sup>8</sup>劉徽以陰陽變異的觀點總結算術之根源，因此他的注文充滿哲理與數學思辨，並以此為其數學理論的基礎。甚者，劉徽認為數學現象是多樣性的統一，各種各樣的數學方法都有共同的本源。所以劉徽的注解特別著重對數學理論追本溯源，提綱挈領；竭力引進數學中最基本的概念和原理，並在此基礎上構建理論大廈。對此劉徽所用的方法則是把生動的直觀與抽象的邏輯論證結合起來，因為數學的真理是需要論證的，而論證必須建立在明白的、可靠的證據基礎之上，因此

辭和圖不僅展現劉徽的數學成就，也顯示出劉徽高超的邏輯思想。劉徽證明《九章算術》的公式解法，彌補其不足，奠定了中國數學的理論基礎。在開方術的注釋中，劉徽正是用圖形的分割，來說明開方術程序的數學原理，也就是運用圖形來展現開方法的意義。我們將於下一節加以說明。

### 參、開方術

在《九章算術》第四章「少廣」章的第十二題到第十六題，都是處理已知正方形面積，求邊長的問題。我們以第十二題為例，這是 55225 開平方根的問題，它的原文如下：

今有積五萬五千二百二十五步，問為方幾何？

答曰：二百三十五步。<sup>9</sup>

我們利用現代數學術語翻譯，並以附圖解釋古文本的作法如下：

問題：現在有 1 個正方形面積為 55225 (平方)步，問正方形邊長為何？

答案：正方形邊長為 235 步。

現在，我們就來看看古人的智慧。首先，做一個面積小於 55225 (平方) 步的最大正方形，如圖一中的「黃甲」所示，因為  $200^2 < 55225 < 300^2$ ，所以，「黃甲」邊長為 200 步。劉徽在注釋裡提到「先得黃甲之面，上下相命，是自乘而除也。」就是表示得到「黃甲」的邊長後，把 55225 扣掉「黃甲」的面積，得到

$55225 - 200^2 = 15225$ 。這時，我們想找出剩下的部份所能做出的最大正方形，就是「黃乙」的邊長。劉徽注接著提到「倍之者，豫張兩面朱冪定表，以待復除，故曰定法。」就是說「法」之兩倍，即  $200 \times 2 = 400$ ，是預算兩面朱冪之長，準備復除時之用，因為這是法中已確定的部份，因此稱之為「定法」。接著「欲除朱冪者，本當副置所得乘方。倍之為定法，以折議，乘而以除。如是當復步之，而止，乃得相命，故使就上折下。」就是說下一步是除去朱冪與黃乙的積，因此我們必須由朱冪的長來推算朱冪的寬(就是黃乙的面)。由於

$400 \times 30 < 15225 < 400 \times 40$ ，所以，我們找出「黃乙」的邊長是 30。此時，所剩

---

他主張「析理以辭，解體用圖」，用「辭」—邏輯，以及「圖」—圖形，把邏輯推理和直觀分析結合起來。

<sup>9</sup>「二百三十五步」的「步」是指長度單位，「積五萬五千二百二十五步」的「步」則為面積單位。古代不用平方步，皆簡稱之為步。一步之長歷代不一，周代八尺為步，秦代六尺為步。《九章算術》中依秦制六尺為一步。

面積必須扣掉兩個「朱冪」和一個「黃乙」的面積。那就是  
 $200 \times 30 \times 2 + 30^2 = (400 + 30) \times 30 = 430 \times 30$ ，我們在直式運算中所做的就是把  
 $200 + 200 = 400$ ，當估出 30 時，再把  $400 + 30 = 430$ ，接著用  $15225 - 430 \times 30 = 2325$ ，  
 於是，再重複上述的步驟，繼續找出剩下的部份所能做出的最大正方形，就是「黃丙」  
 的邊長。劉徽注說「再以黃乙之面加定法者，是則張兩青冪之袤。」這裡的定法，  
 指的是前面所算出的 430， $30 + 430 = 460$ ，以此為新的定法，表示的是兩青冪之  
 長。因為  $460 \times 5 < 2325 < 460 \times 6$ ，所以，我們估計出「黃丙」的邊長為 5，  
 所剩面積再扣掉兩個「青冪」和一個「黃丙」的面積，因為  $2325 - 465 \times 5 = 0$ ，  
 於是，便結束開方的過程，找出答案為 235。劉徽的注釋說明出，開方術是將方  
 冪分割為一個內方和若干的曲尺形，它們的寬度恰好表示方冪一邊長度在各「位」  
 上的數值，例如本題黃甲之邊 200，朱冪之寬 30，青冪之寬 5，並將這種圖形分  
 割中相應面積與長度的推算，編排成一種程序化的算法。如此，我們便可由高位  
 數值求到低位，逐位相求。



圖一：劉徽注的幾何圖例說明



## 肆、教學實作心得

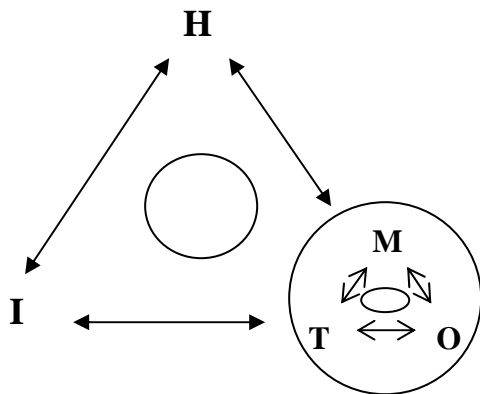
如同本文開始提及，當筆者介紹完直式開方法，學生其實對這樣的操作程序是很有疑問的。在教學過程中遇到困難，筆者不僅在校內與同事討論，也曾利用研習機會與校外的數學教師們互相切磋。但是，這並無法得到令人滿意的教學對策。因為如前所述，在高中階段，直式開方法僅僅用以求取標準差，因此，大部分的教師都是直接教授如何操作。一旦學生提出問題時，教師也頂多是運用平方和公式一筆帶過。這是筆者產生向古代數學文本尋求協助的動機。

當筆者蒐集到史料，運用於現場教學後，學生都給予正面的回饋，這顯然是因為幾何圖形可以幫助他們理解為什麼代數上要如此運算。筆者實作的安排方式是先教授直式開方法，通常此時學生往往只讚嘆於此法的便利性，以及忙著記憶操作程序，無法深究其意義。因此，需要數分鐘的等待，接著再詢問學生為何可以這樣操作？引起學生的動機及討論。然後以圖形輔助，實際演示一次計算過程。此時，學生就能由單純程序上的操作，進展成數學概念的理解。之後，筆者也利用了校內外的演講機會，和與會教師分享此一心得，而引發大家探索的興致和熱烈的討論。對於一位有心以古文本輔助數學教學的教師而言，除了一般備課時充分掌握教材內容及其精神，提出自己的詮釋而用於教學之餘，也應該盡可能搜尋與單元內容相關的數學史料，加以詮釋後使用於教學。以下，我們將針對這一進路詳細說明。

為了能清楚說明實作流程，筆者將以一個模型來解釋此一 HPM 教學過程。所謂的 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, 數學史與數學教學的關聯之國際研究群)，是指隸屬於國際數學教育委員會 (ICMI) 的一個研究群，專門推動數學史與數學教學之關聯。換言之，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。而本文所提及的運用古文本教學，就隸屬於 HPM 教學的範疇。

上述實作模型之產生，主要參考運用的是 Hans Niels Jahnke 的「雙圈」(Twofold Circle)之概念 (Jahnke, 1994)。在 Jahnke 的「雙圈」架構中，「初圈」

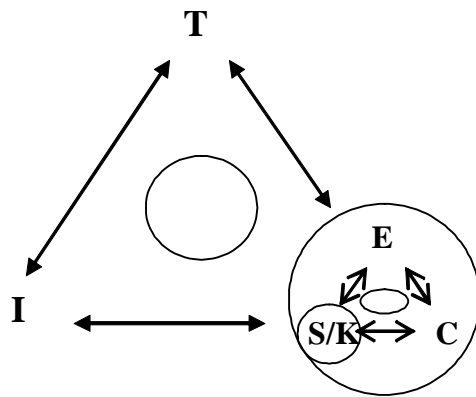
(primary circle) 是指古代數學家 M、研究客體 (數學物元) O, 以及數學理論 T 之間的互動環; 「次圈」(secondary circle) 則是指數學史家 H、數學史研究成果 (歷史詮釋) I, 以及「初圈」三者之間的互動環。如下圖二所示。



圖二：Jahnke 的詮釋學循環「雙圈」(Twofold Circle) 概念

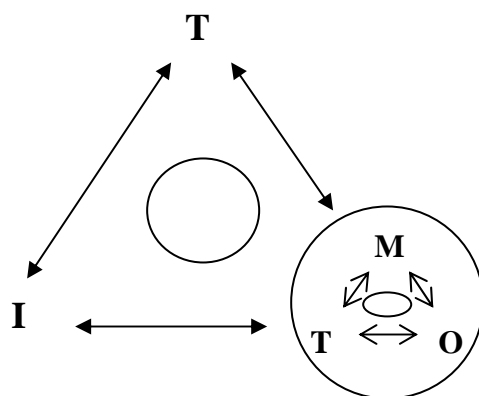
Jahnke (1994) 認為當教師將歷史引進教學活動時, 他必須同時說明數學知識的「斷代」與「演化」面向, 因此, 教師在「次圈」中進行自己的「歷史詮釋」時, 勢必 (引導學生) 針對文本形成假設並設法驗證, 而這自然引發他自己或學生探索文本原創者 (譬如數學家) 的理論或詮釋。因此, 基於 HPM 的引導, 教師可以幫助學生從外圍的「次圈」走向內圍的「初圈」, 再從「初圈」走向「次圈」, 如是者構成一個所謂的「詮釋學循環」。在這個循環過程中, 任何人包括教師或學生都扮演了「詮釋者」的角色, 而且, 由於教學目標是數學知識, 所以, 「初圈」的操作受到「次圈」的主導, 從而可以保證數學教學活動, 不會迷失在漫無目的瑣碎歷史細節之中。此外, 在這個過程中, 由於教師或學生都被期待進行詮釋性反思 (譬如形成自己的假設), 因此, 詮釋者的批判性學習也比較容易凸顯。

洪萬生 (2005) 針對 Jahnke 的論點, 認為就一位教師的教學實作而言, 在此一「詮釋學循環」中的「次圈」裡, 應該是一個數學教師 (T) 在詮釋教材內容 (I), 而這必然將教師自己引入「初圈」—在其中, 教科書編者 (E) 針對課程標準 (S) 與數學知識 (K), 而編成教科書內容 (C)。如圖三所示。



圖三：洪萬生的數學教學的詮釋學循環

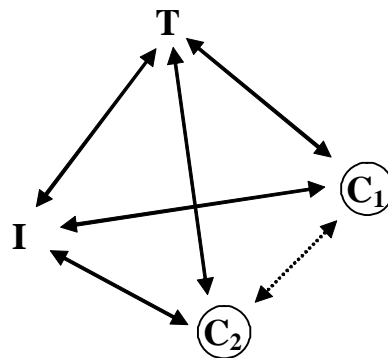
在這個由外而內的循環過程中，T與E的「對話」是免不了的，因為T在備課時對於教科書內容的詮釋或解讀，固然需要與編者E對話，同時，有了實際教學的經驗之後，則得自學生的回應，更需要與編者E對話。也就是說，T必須設法站在E的位置思考，才能理解教科書內容的「制式」意義（譬如如何呼應課程標準），也才能對於自己所詮釋的內容I有所折衷。最後，T再由內而外，而完成了一個「詮釋學循環」。若加進了數學史的維度，教師進入「初圈」循環時，會以「數學物元或客體」為憑藉，與文本的創造者古代數學家「對話」，從而發展出具有數學史的教材內容。如圖四所示，其中初圈的T代表數學教師，I是詮釋教材內容，M是古代數學家，次圈的T代表數學理論，O代表數學物元。



圖四：洪萬生引進數學史的教學之詮釋學循環

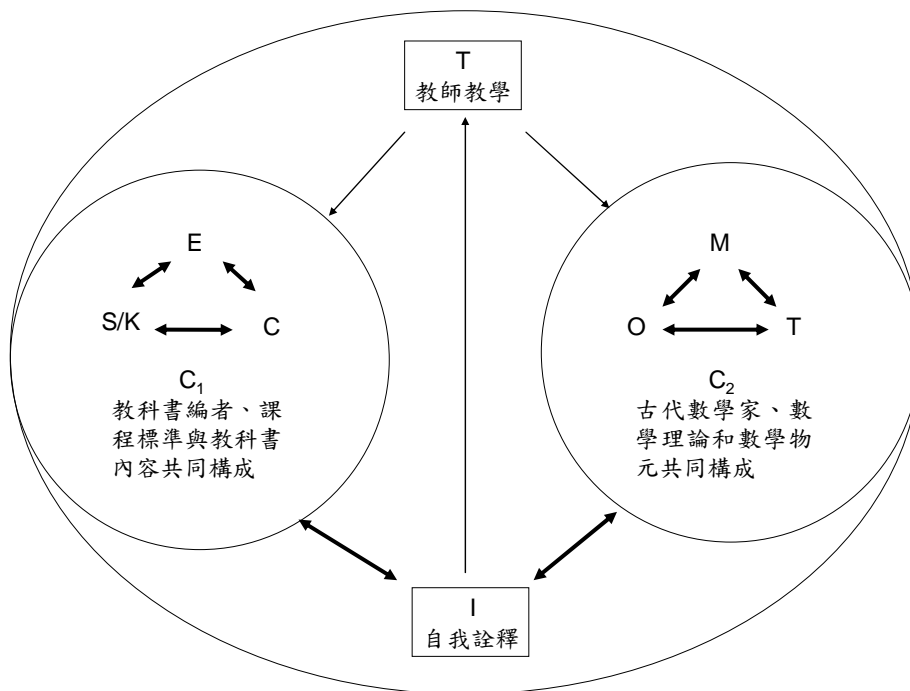
換句話說，教師在此一脈絡中，與「初圈」的古代數學家商榷時，多少將他或她當成一個有批判性思考能力的同事，也因此，必須觀照後者的認知特性。也

因此，洪萬生（2005）認為就一位教師的教學實作而言，一個具有HPM關懷的教師，他的身份會兼具了教師（T）與數學史家（H）。因此， $C_1$ 代表教科書編者與課程標準和教科書內容所構成之初圈， $C_2$ 代表古代數學家與數學理論和數學物元所構成之初圈。將圖三和圖四裡的T與I 這兩個頂點重疊，建構出了一個「詮釋學（循環）的四面體」（hermeneutic tetrahedron），如圖五所示，此時的T，正代表了一位具有數學史關懷的教師。在這個全新的「立體」模型中， $C_1$ 和 $C_2$ 之間如何連結，是值得更進一步研究的課題，因此以虛線表示。至於T如何在 $C_1$ 與 $C_2$ 這兩個「初圈」之間進出自如，乃至於T如何促成這兩個「初圈」對話，正是具有HPM關懷的教師所努力的目標。



圖五：洪萬生的詮釋學（循環）四面體 (hermeneutic tetrahedron)

從以上兩位學者由詮釋學循環所引出的HPM教學，筆者以圖六的模型來說明筆者的實作歷程。在此模型中的T代表教師教學；E代表教科書編者；S代表課程標準；K代表數學知識；C代表教科書內容；M是古代數學家；O是數學物元；T是數學理論；I則是體會各循環之後的自我詮釋。E、S/K和C這三者的循環組成了 $C_1$ 的圓，M、O及T三者的循環則組成了 $C_2$ 的圓。



圖六：解釋本文實作之模型

在此模型之架構下，筆者以這次實作為例，自我反思教師在HPM介入之後如何改善教學。原本，筆者在教學中是採原始的「 $T-C_1-I$ 」循環關係，但是，由於教學遇到困難，經同事間討論也無法獲得改善，因此，除了原本 $C_1$ 循環關係外，也求助於數學史料，開始考量「 $T-C_2-I$ 」的循環。在此模型中，筆者經過 $C_1$ 循環後，到達了自我詮釋之階段，由於發現在教學上有所不足，因此，再進到 $C_2$ 尋找史料，也就是《九章算術》的「開方術」，之後，筆者再次的詮釋所蒐集到的數學史素材，發現對 $C_1$ 的教學目標有所幫助，於是，剪裁史料經過詮釋後，實施於教學。

一般的數學教師在從事數學教學時，會經過「 $T-C_1-I$ 」的路徑。也就是，教師融入教材編者所編之教科書內容，體會教材之精神，做出自己的詮釋。當數學教學面向加入數學史的關懷之後，教師就必須經驗古代數學家對數學物元所做的解釋，經過自己的詮釋而顯現於教學，另一方面，教師除了思考教科書編者針對課程標準與數學知識而編成的教科書內容外，也依照教科書的單元內容，搜尋數學史料，想像自己進入那些活在另一時代、另一文化中的數學知識活動參與者 (mathematical practitioner) 之心靈之中，而做出教師自己詮釋性的反思。接著，

教師能藉由所搜尋到的數學史料，再回去考量教科書與數學史料之間的連結，此時，教師能體會教學目標是數學知識，所以，當真正進入實際教學之面向時，教師的數學教學活動，就不會迷失在漫無目的瑣碎歷史細節之中。如果教師在數學教學過程中，沉溺在數學史的瑣碎細節而無法自拔，那麼，對於教學目標就很難自圓其說了。<sup>10</sup> 正因為如此，Hans Freudenthal 才會主張「引導式的再發明」(guided re-invention)：意即在數學教學時，「我們不應該遵循發明者的歷史足跡，而是經改良過同時有更好引導的歷史過程。」(Freudenthal, 1973, pp. 101, 103)。由上述筆者對於直式開方法的教學，就是由教學過程中遇到問題，尋求數學史料的幫助，進而改善了數學教學的一個例子。

Henri Poincaré 曾說過：「如果我們想要預見數學的將來，適當的途徑是研究這門科學的歷史和現狀。」其實，除了鑑往知來外，古代數學文本所蘊含的無限風華，正是一處豐厚的知識寶庫，從中展現出數學的多樣風貌。而這份文化資產，經過適當的擷取和剪裁，同時也能裨益數學教師的教學發展，幫助學生對於數學知識的理解。

### 參考文獻

- 李繼閔 (1992)。《九章算術》及其劉徽注研究。台北市：九章出版社。
- 李國偉 (1994)。《九章算術》與不可公度量。自然辯證法通訊, 16(2), 49-54。
- 洪萬生 (1999)。HPM 隨筆(二)：數學史與數學的教與學。HPM 通訊, 2(4), 1-3。
- 洪萬生 (2005)。PCK vs. HPM: 以兩位高中數學教師為例。《數學教育會議文集》(Proceedings of Conference on Mathematics Education 2005) (香港：香港教育學院數學系，2005年7月6-8日)。頁72-82。
- 洪萬生等 (2006)。《數之起源》。台北市：台灣商務印書館。
- 蘇意雯 (2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究。台北市：國立台灣師範大學博士論文 (未出版)。
- 錢寶琮 (1984)。《九章算經》點校。台北市：九章出版社。
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

<sup>10</sup> 因為如此一來，將會造成「為數學史而數學史」的結果，反而迷失了「教數學」的目標。

- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. I* (pp. 139-156). Lisbon: University of Lisbon.
- Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education.* ( pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Su, Y.-W. (2006). An Action Research of School-centered Professional Development in the HPM Context. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.) , *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp.368-382). Uppsala : University of Uppsala.

# 活動報馬仔

- 一、 2007/04/10~2007/04/12  
The 3rd International Conference on Research and Education in Mathematics 2007 (ICREM07)  
地點：Dynasty Hotel Kuala Lumpur Malaysia Asia
  
- 二、 2007/04/27~2007/04/28  
2007 年原住民學生數理科教/學理論與實務學術研討會  
地點：國立台東大學師範學院
  
- 三、 2007/07/08~2007/07/13  
31st International Group for the Psychology of Mathematics Education(PME 31)  
地點：Seoul, KOREA
  
- 四、 2007/11/15~2007/11/17  
School Science and Mathematics Association Annual Conventions  
地點：Indianapolis, Indiana



## 稿 約

### 一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

### 二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

#### (一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（keywords），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請 e-mail 至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw