

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)雙刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第10期

台灣數學教育學會

2007年6月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers
2007 年 06 月出版
NO.10 2007

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員 Editorial Panel

呂玉琴 國立台北師範學院數學教育研究所

李源順 台北市立師範學院數學資訊教育學系

林素微 國立花蓮師範學院數學教育系

金鈴 國立台灣師範大學數學系

梁淑坤 國立中山大學教育研究所

蔡文煥 國立新竹師範學院數學教育教育系

劉祥通 國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗 國立屏東師範學院數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
**Taiwan Journal of Mathematics
Teachers**

第 10 期

2007 年 06 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 10 期

2007 年 06 月

序言.....	1
楊德清	
Learning Goals and Effective Mathematics Teaching:	2
What Can We Learn From Research?.....	
Melissa D. McNaught, Douglas A. Grouws	
一位國中學生解比例問題之個案研究.....	12
陳建州、劉祥通	
教師合作-以發展國小三年級學生數常識為例.....	39
吳昇軒、陳宗韋、曾千芬	
國小五年級學童分數表徵教學之研究.....	62
張熙明、楊德清	
活動報馬仔	72

ISSN 1815-6355

序言

時序正進入炎炎夏日的季節，燦熱的陽光熱情地讓人難以消受；此時，正逢台灣數學教師(電子)期刊第 10 期的誕生，期盼她的蒞臨能夠為讀者在這酷熱的夏季帶來一絲絲清涼的感覺。

本期台灣數學教師(電子)期刊共包括四篇文章。其中，第一篇文章為美國著名數學教育家 Douglas A. Grouws (目前為美國密蘇里州州立大學科倫比亞校區數學教育教授)以及 Melissa D. McNaught(博士生)所共同撰寫之” Learning Goals and Effective Mathematics Teaching: What Can We Learn From Research?” 相信讀者在細細品味下應可進一步了解如何從研究中增進有效率之數學教學與學習目標。此外，值得一提的是 Prof. Grouws 獲得 2007 年 NCTM Lifetime Achievement Awards for Distinguished Service to Mathematics Education，恭喜他。

第二篇是北興國中教師陳建州與嘉義大學數學教育所劉祥通教授所共同撰寫之”一位國中學生解比例問題之個案研究”，內容主要在探討剛升上國一之個案學生，在比例問題的解題表現，內容豐富精采。第三篇是兩位小學教師及一位研究生之課室教學經驗分享:”教師合作-以發展國小三年級學生數常識為例”，內容主要在探討教師運用所設計之電算器教學活動幫助三年級學生發展數常識之過程，內容豐富有趣值得小學教師多加品味。最後一篇是由彰化縣立曉陽國小張熙明老師以及嘉義大學數學教育所楊德清教授所共同完成之”國小五年級學童分數表徵教學之研究”，內容主要在探討表徵融入國小五年級分數教學之過程，內容亦相當豐富，請讀者慢慢欣賞、細細品味。

最後，感謝本期作者的貢獻，以及讀者之支持。本期台灣數學教師(電子)期刊是屬於大家的，恭請大家多多賜稿，以使本園地能夠更加茁壯。

本期台灣數學教師(電子)期刊總編輯

楊德清

Learning Goals and Effective Mathematics Teaching: What Can We Learn From Research?

Melissa D. McNaught
Douglas A. Grouws

University of Missouri

Teaching is a complex endeavor and individual teaching behaviors that promote student learning are hard to identify. In this article, we discuss two methods of gaining advice to improve mathematics teaching and explore in some detail the advice that can be acquired from examining research studies that focus on teaching.

An important truth about the effectiveness of instructional methods is that particular methods are not, in general, effective or ineffective. Particular methods are more or less effective for helping students achieve particular learning goals. Even when the learning goals are specified, the complex dynamics at play in a classroom make it difficult to document the best instructional methods for helping students achieve them. Despite this reality, some teachers are particularly effective in promoting student learning year after year. What is it that these teachers do to be effective and to remain effective at promoting high levels of student learning?

The ways of determining what advice to give to teachers when helping them improve their mathematics teaching can be classified into two general approaches: (1) wisdom of practice and (2) insights from research. Wisdom of practice includes gathering advice from what practicing teachers learn about “what works for them” from their years of teaching experience in classroom settings. This wisdom is often passed on to other teachers formally and informally. For example, teaching experience is often helpful in choosing appropriate tasks, conveying tasks to students in

a way that stimulates interest, and maintaining students' engagement in tasks. These are all activities that teachers experiment with until they find those that work best for their students and their situations. A major problem with sharing such wisdom of practice, however, is that what works for one teacher may not work for another teacher because the discoveries were associated with a particular group of students and in a specific learning context. In other words, the advice may work only with a specific teaching method with a particular type of learner in a school with a unique set of curriculum materials and a special set of learning objectives.

Other sources of wisdom of practice may come from mathematicians known for their expertise in mathematics who share their intuitive observations of teaching well. One case in point is George Polya's contribution to the process of problem solving as set forth in his book, *How To Solve It*. In this book, Polya characterizes in a useful way the methods people use to solve problems. His work then goes on to include advice on how to teach problem solving. Unfortunately the quality of the advice given in this manner seldom reaches the quality standard we find in Polya's work.

In contrast to advice from the wisdom of practice, insights gained from research on mathematics teaching are the product of empirical studies conducted in a wide variety of classrooms with many teachers and the conclusions drawn are supported by the data collected. Although it is obvious that many interactions are involved in the teaching process and no two classrooms operate identically, it is the case that patterns of teaching effectiveness can be detected across research studies that used different research designs and procedures. These patterns provide insight into features of teaching that regularly produce positive effects on student learning when examined within teaching systems that have a particular set of learning

goals. There may be value to both approaches of gathering information for giving advice to teachers, but the focus of this article is on the insights provided by research.

The process we used to select the useful features of teaching to report in this article was based on identifying patterns of positive results within studies associated with two particular learning goals: skill efficiency or conceptual understanding. We choose these two broad learning goals because they are at a level general enough to find many relevant studies of classroom learning and teaching and because they are of current interest across curricula and cultures. Furthermore, these learning goals have a substantial amount of research data that point to effective features of mathematics instruction in each area. In the following, we draw heavily from the work of Hiebert and Grouws (2007) with the realization that the process of identifying studies to examine was limited to considering only those research studies published in journals printed in English.

Skill Efficiency

Skill efficiency refers to the rapid, smooth, and accurate execution of mathematical procedures (Gagne, 1985). Findings from a number of studies reinforce the following claim: mathematics teaching that facilitates skill efficiency is rapidly paced and includes frequent teacher modeling of procedures, the use of many teacher directed product-type questions, and the making of smooth transitions from demonstration of procedures to substantial amounts of error free practice. The teacher plays a central role in organizing, pacing, and presenting information in this type of teaching in order to meet a well-defined learning goal.

Conceptual Understanding

Conceptual understanding refers to the construction of relationships among mathematical facts, procedures, and ideas (Brownell, 1935; Davis, 1984; Hiebert and Carpenter, 1992). From

the examination of the research literature, we found two features of instruction that are likely to help students develop conceptual understanding: (a) explicitly attending to connections among facts, procedures, and ideas; and (b) encouraging students to wrestle with important mathematical ideas in an intentional and conscious way. The first feature might sound obvious because it almost is a restatement of the earlier definition of conceptual understanding. In essence, the claim says that if instruction aims to help students develop conceptual understanding, then it must make explicit, at some point and in some way, the critical relationships that lie at the heart of such understanding. This might include discussing the mathematical meaning underlying procedures, asking questions about how different solution strategies are similar to and different from each other, considering the ways in which mathematical problems build on each other or are special (or general) cases of each other, attending to relationships among mathematical ideas, and reminding students about the main point of the lesson and how this point fits within the current sequence of lessons and ideas.

The second feature associated with increasing students' conceptual understanding is allowing students to struggle with important mathematical ideas. In this context, we do not use the word struggle to mean needless frustration from working on items that present extreme challenge beyond the students' reach. Rather, the struggle we refer to implies that students expend the effort necessary to make sense of the mathematics utilizing tasks or problems chosen to be within the reach of their ability. This is the opposite of simply presenting information to be memorized or asking students to practice only what has been demonstrated. Allowing students to struggle means that the teacher does not step in and do the mathematical work for them, but rather allows the students to grapple with the problems before discussion of possible solution methods and solutions.

Not a Simple Dichotomy

The features described here that promote skill efficiency are quite different from those that promote conceptual understanding. However, the research literature indicates that the development of skills and conceptual understanding is not a simple dichotomy. In fact, results of studies focused on developing conceptual understanding also reported improvement in skill development. On the other hand, what effects the effective features of teaching associated with developing students' skill efficiency have on conceptual understanding is unclear at this point in time. In the next section, we discuss each feature of promoting conceptual understanding in more detail within the context of an example.

Elementary School Example

In the Sieve of Eratosthenes activity (see Appendix A), students are often led through the activity step by step and at the end the teacher proclaims that the numbers not crossed out are special and are called prime numbers. This is an activity that if used in this way does not promote conceptual understanding. In contrast, consider the Factor Game (see Appendix B). The students playing this game very quickly learn on their own that some numbers are special (the prime numbers). Teachers give the label to students after they have discovered the concept in a meaningful way. This is an illustration of teaching where students are provided an opportunity to make sense of the mathematics where the instructional goal is conceptual development.

Secondary School Example

Considering the following problem:

Find two numbers such that the positive proper divisors sum to be the number itself.

Solution:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

When solving this problem, student solutions can be labeled as “perfect numbers.” Beyond practicing with basic division skills, the problem does little to develop students’ conceptual understanding.

In contrast, consider the following example.

Given any nine integers, show that you can choose two of them whose difference is a multiple of 8.

One possible solution: Notice that any number divided by 8 has one of eight remainders, 0 through 7. Since there are 9 integers but only 8 possible remainders, two of the numbers when divided by 8 have the same remainder, say, r . Thus, through some symbolic representation and algebraic manipulation, we can show that the two numbers can be expressed as $8m + r$ and $8n + r$, with m and n being integers. Their difference is $8(m - n)$, which is divisible by 8.

Clearly this task provides more of an intellectual challenge than does the previous example of finding perfect numbers. If the task proves to be too challenging, then the teacher can be prepared to provide a student with a helpful hint, but not step-by-step solution help. Notice that within both grade level examples, it is important to allow students to try the problems for an ample amount of time before providing any clues or hints to possible solution methods. In order to continue fostering conceptual development, the teacher can facilitate student discussion of the task, its various solution paths, and valid solutions to ensure that the mathematics embedded within the task is brought to the surface and that every student develops an understanding of it. This is an illustration of providing students an opportunity to struggle with challenging mathematical tasks where the instructional goal is conceptual development.

Summary

The teacher's role in directing the development of students' mathematical knowledge is indeed complex. The responsibility is difficult to fulfill because it involves simultaneously fostering students' knowledge accumulation and developing their mathematical abilities. A teacher must bring these together while considering students' abilities and backgrounds. However, our analysis of the research literature indicates that the instructional features we have identified for helping students acquire skill efficiency and conceptual understanding are sufficiently documented that they warrant action. Studies have shown that rapidly paced instruction with frequent teacher modeling of procedures and many teacher directed product-type questions is effective if the learning goal is skill efficiency. On the other hand, if the learning goal is conceptual understanding, the research evidence points to instruction that explicitly draws attention to connections among facts, procedures, and ideas and encourages students to wrestle with the important mathematical ideas in an intentional way. We believe these features can be accepted with sufficiently high levels of confidence that they can be used to inform policy and influence classroom practice. Realizing that each class is different with regard to socioeconomic settings and cultural context, we encourage teachers to try these features in their classrooms with the possibility of conducting action research at the same time. Not only can teachers improve their own practice in this way, but they can also share with colleagues more broadly by later reporting their experience with the features.

References

Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. In W. D. Reeve (Ed.), *The teaching of arithmetic: Tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1-31). New York: Teachers College, Columbia University.

- Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ: Ablex.
- Gagne, R.M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction* (4th ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Appendix A

Sieve of Eratosthenes

	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

1. Make a chart from including numbers from 2 to a specified integer n . ($n = 30$ in this example)
2. Cross out all multiples of 2 not including 2.
3. Cross out all multiples of 3 not including 3.
4. Cross out all multiples of 5 not including 5.
5. The next number left is 7. Since 7 is larger than $\sqrt{n}$ or, in this case, $\sqrt{30}$, this means all multiples of 7 have been crossed off.
6. The remaining numbers are the prime numbers less than n .

Appendix B

The Factor Game Board

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

1. Player A chooses a number on the game board by coloring it.
2. Using a different color, Player B colors all the proper factors of Player A's number. The proper factors of a number are all the factors of that number, except the number itself. For example, the proper factors of 12 are 1, 2, 3, 4, and 6. Although 12 is a factor of itself, it is not a proper factor.
3. Player B colors a new number, and Player A colors all the factors of the number that are not already colored.
4. The players take turns choosing numbers and coloring factors. If a player chooses a number that has no factors left that have not been colored, that player loses a turn and does not get the points for the number colored.
5. The game ends when there are no numbers remaining with uncolored factors.
6. Each player adds the numbers that are colored with his or her color. The player with the greater total is the winner.

Retrieved from <http://connectedmath.msu.edu/CD/Grade6/FactorGame/>

一位國中學生解比例問題之個案研究

陳建州¹

劉祥通²

¹ 嘉義市北興國中

² 國立嘉義大學數學教育所

摘 要

本文旨在探討剛升上國一的學生，在只接受過國小簡單的比例課程，且尚未學習文字符號的代數運算前，對於比例問題的解題表現。本研究採個案研究法，工作單共有三題，是採用結構式工作單，內容涵蓋了比例與連比問題，而訪談的問題是依照學生的回答適時調整。經由研究者的分析，個案解題成功的關鍵有以下幾項因素：(一)以適當的圖形表徵題意。(二)正確的選擇基準量。(三)能以相同的倍率(放大或縮小)表徵成比例的數。(四)適時的教學介入引發個案的再思考。

關鍵字：比例、連比、比例推理。

壹、緒論

一、研究背景

與比(ratio)相關的問題對中小學生來說是比較困難的，除了需具備完整的分數概念之外，對於比(ratio)、比率(rate)及比例(proportion) 相關性質也要有所認識。在中學數學課程裡，比及比例是重要的單元，對於往後數學的學習有關鍵性的影響。事實上許多學者(Lamon, 1994；Lesh, Post, and Behr, 1988)也指出比例概念的建立是學習高等數學的重要基石。缺乏對於比例概念的理解，不僅造成數學概念基礎的不穩固，也關係到高等數學的學習。

對國中學生而言，通常只有明確的比例類型問題，才會想到用比例的方法求解。例如「 $15:10=5:x$ ，求 $x=?$ 」，至於沒有在題目中看到「 $:$ (比)」的符

號，往往不會想到用比例推理來解題，例如「某一天夜長是晝長的 $\frac{3}{5}$ ，請問這一天夜長與晝長各有幾小時？」，處理這個問題，國中生習慣把晝長假設為 x 小時，那麼夜長就是 $\frac{3}{5}x$ 小時，依據題意列出 $x + \frac{3}{5}x = 24$ ，再求得 $x=15$ ，所以晝長 15 小時，夜長 9 小時。小學生則把晝長當成 1，再利用當量除的方法，以 $24 \div (1 + \frac{3}{5}) = 15$ 來解題。然而有部分的小學生，會從夜長是晝長的 $\frac{3}{5}$ ，得出夜長：晝長=3：5，再以分配的方式 $24 \times \frac{3}{3+5} = 9$ (小時)， $24 \times \frac{5}{3+5} = 15$ (小時)，分別求出夜長與晝長的時數。如此，利用比例推理來解題，有時常常會有意想不到的效果。

連比的問題也是探討比例推理能力不可或缺的，例如：如何把兩個比例式 $a:b = x_1:y_1$ ， $b:c = x_2:y_2$ 結合在一起，而得到 $a:b:c$ 等於多少？課本的作法是將兩個比例式化為 $a:b = x_1x_2:y_1x_2$ 與 $b:c = y_1x_2:y_1y_2$ ，接下來就可以得出 $a:b:c = x_1x_2:y_1x_2:y_1y_2$ 。然而，對於初學比例的學生來說，卻不是件容易的事。

一般認為學習比例相關課程應在國小高年級之後，但 Bar(1987)發現，以年幼兒童的比例推理能力，可以解決某些簡單的比例問題。Lo 與 Watanabe(1997)也認為學生不一定要先具備乘除法的概念，即可解比例問題。而某些學者(Schorn, 1989；Van den Brink, & Streefland, 1979；Clark, & Kamii,1997)也認為，年幼的孩童亦能解決簡單的比和比例問題。由此可知，比例推理能力是人們早期就具備的數學能力，然而年歲稍長，面對比例相關問題時，卻令學生感到棘手。另一方面，學生的運算技巧提升之後，雖提供更有效的解題策略，但是卻失去了用比例推理解題的簡潔與美感。

在國小六年級到國中一年級這個階段的學生，剛學過比例相關課程，對於含文字符號的代數運算尚不熟悉，因此解比例問題的時候，應該會有其自發性解法，這引發研究者進一步探討的興趣。

二、 研究目的

本研究藉由工作單的寫作及訪談，觀察個案在比例問題方面的解題表現，以瞭解底下兩項待答問題：

- 1、型如 $ax = by$ ， $x + y = k$ 的比例問題，隨著 a 與 b 所代表數字的不同， x 與 y 的倍數關係，個案是如何求出 x 與 y ？（工作單第一題）
- 2、型如 $ax = by$ ， $cy = dz$ ， $x + y + z = k$ 的比例問題，這類較具有挑戰性的連比問題，個案是如何求出 x 、 y 與 z ？（工作單第二、三題）

貳、 文獻探討

一、 比例問題相關研究

(一)學童解比例問題需具備的數學知識

1、 因數與倍數的概念

學生在解比例問題時，往往會用到因數與倍數的概念。Lo 與 Watanabe(1997)強調因數與倍數是解比例問題的重要知識基礎。在劉祥通與周立勳(1999)的研究中指出解比例問題往往先做除法再做乘法，亦即為解因數與倍數的問題，因此因數與倍數的概念可說是比例概念的重要基石。

2、 熟悉乘除法情境

Vergnaud(1988)提出乘除法問題是比例問題的一個特例，例如「 a 個披薩給 b 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」這是一個比例問題。但是若改成「1 個披薩給 b 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」這會是一個乘法的問題；如果改成「 a 個披薩給 1 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」則又變成除法問題了。由此可知解比例問題若能瞭解乘法與除法適用的情境，對解題是非常有幫助的。

3、分數概念的整體發展

許多學者認為比值和比率是包含在分數的概念當中，Kieren(1980)將分數分成五個面向：部分-整體(part-whole)、商數(quotient)、測度(measure)、比值(ratio)、運算子(operator)。

若對於分數的構念瞭解並不透徹，只停留在部分-整體的觀點，則無法用分數表示彼此的倍數關係，甚至不瞭解可以用分數表示除不盡的概念(楊錦連，1999)。由此看來，分數概念的不完整會影響學生解比例問題。

4、相對的思考能力

相對的思考是解比例問題重要的能力之一，所謂「相對的思考能力」是指瞭解情境中數量關係的相對性。舉例來說，第一段考數學成績小明考 80 分，小華考 60 分，經過幾個星期的努力，第二段考兩個人都進步了 10 分，若以絕對思考的觀點來看，兩個人都進步了 10 分，好像進步的情況一樣；但是，若就相對的觀點來說，小明進步的情況是原來的 $\frac{1}{8}$ ，而小華是 $\frac{1}{6}$ ，因為 $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$ ，所以應該說小華進步的幅度比較大。因此，相對思考能力是解比例問題重要的基礎，亦是必要的能力。

5、單位化與基準化的能力

單位化的能力就是在解比例問題時，先求出單位量，在利用單位量解題。至於基準化，Freudenthal(1983)提出一個例子，「將地球大小想成像一根針頭那樣大(大約 1 公釐)，然後根據這樣的定義，重新看待整個太陽系的大小。那麼太陽就變成直徑只有 10 公分的球體，而太陽與地球的距離就只有 10 公尺。」像這樣，以一個單位量來推算其他量的方法，就是一種基準化的過程。

(二)比例問題的類型

比例問題的類型可分為比值型態、語意型態以及結構型態，以下分別說明之：

1、 比值型態

比例題目中，各項的比值關係影響學生解題的難易度，依據 Noelting(1980) 與林福來(1984)的研究，將比例式「 $a : b = c : x$ 」中數字的關係類型分為四種型式：

第一式： c 同時是 a 與 b 的整數倍。例如 $3 : 4 = 12 : x$

第二式：只有 b 是 a 的整數倍。例如 $2 : 6 = 7 : x$

第三式：只有 c 是 a 的整數倍。例如 $5 : 8 = 10 : x$

第四式： c 不是 a 或 b 的整數倍。例如 $2 : 7 = 9 : x$

2、 語意型態

Lamon(1993)依語意型態將比例問題分為合成的測度(well-chunked measures)、部分-部分-整體(part-part-whole)、關聯的集合(associated sets)、擴大與縮小(stretchers & shrinkers)等四種類型。而台灣省國民教師研習會(1997)則依對等關係的不同，將比例問題分為交換問題、組合問題、母子問題、密度問題、伸縮問題等五種類型。

3、 結構型態

以問題結構型態來看，比例問題可分為單一比例、多重比例以及連比例三種型態。所謂單一比例型如「 $a : b = c : x$ 」，而多重比例(multiple proportion)則涉及三個度量空間，其類型如「 $a_1 \times b_1 : c_1 = a_2 \times b_2 : c_2$ 」，這種問題的概念源自於 Vergnaud(1983)的論述。至於連比則是三個以上數的比，把兩個比例式 $a : b = x_1 : y_1$ ， $b : c = x_2 : y_2$ 結合在一起，得到 $a : b : c = x_1 x_2 : y_1 x_2 : y_1 y_2$ 是最基本的連比型態。

(三)比例問題的解題策略

一般學生面對比例問題所採行成功的解題策略不外乎單價法(between strategy)、倍數法(within strategy)、累加法(repeated addition)、數量分解法

(decomposing method) 以及公式法(formula strategy)，茲分述如下：

1、 單價法 (between strategy)

在解比例問題的過程中，先求出單位量，再將單位量乘以單位數，這樣的解題方式稱之為單價法。

2、 倍數法 (within strategy)

在比例問題「模型飛機加 40 毫升的油可飛行 70 分鐘，那麼加 120 毫升的油可飛行幾分鐘？」中，120 毫升是 40 毫升的 3 倍，因此 120 毫升的油可飛行時間也是 40 毫升的油可飛行時間的 3 倍，所以 $3 \times 70 = 210$ (分鐘)。此種解比例問題的方式是以倍數來思考，而民 82 年版的數學新課程則稱這樣的解題策略為倍數策略。

3、 累加法 (repeated addition)

累加法是兒童與青少年解比例問題時經常使用的策略(何意中，1988；陳英傑，1992；Lamon，1993)例如在「買 3 個氣球花 2 元，那麼買 24 個氣球花多少元？」的題目中，買 3 個氣球花 2 元，那麼買 6 個氣球花 4 元，買 9 個氣球花 6 元，如此繼續推算下去，最後可得到買 24 個氣球花 16 元。

4、 數量分解法 (decomposing method)

將問題數量在計算過程中分解為兩個以上的數量，分別計算之後再加以組合，此種解題策略稱為數量分解法。Vergnaud(1983)的研究指出，有些學生在解比例問題時會採用此方法。事實上數量分解法也可視為學生的自發性解題策略之一。

5、 公式法(formula strategy)

Langrall & Swafford(2000)的研究指出，利用比例式來解比例問題是屬於形式的比例推理階段，此階段的學生能將比例情境的題目，列出比例式或是運用比值

的相等來解題，此等學生對於比例推理才有全面的瞭解。

(四)比例推理相關研究

Langrall & Swafford(2000)將學生比例推理的解題策略分為非比例推理策略(nonproportional reasoning)、非形式的比例推理(informal reasoning about proportional situations)、數量推理(quantitative reasoning)、形式的比例推理(formal proportional reasoning)等四個階段。

Hannah(2000)認為，探討學生的比例推理能力，要利用各種不同的題材。Miller & Fey (2000)則指出，若能從生活情境中建構比例推理的概念，學生會比較容易接受，而學生常常會運用單位比率來思考這些問題，亦即將其視為比值的方式來處理。

二、連比問題相關研究

關於連比的研究相當少，國中數學課本(國立教育研究院籌備處，2006)在連比這個單元主要探討將 $a:b$ 與 $b:c$ 寫成 $a:b:c$ 、連比例式 $x:y:z=a:b:c$ 以及比例分配的相關問題。前者課本的作法是利用比的前後項同乘或除一個不為0的數，讓共同項 b 成為一樣的數，例如在 $a:b=x_1:y_1$ ， $b:c=x_2:y_2$ 這兩個比例式中，將 $a:b$ 的前後項同乘 x_2 ($x_2 \neq 0$)，即 $a:b=x_1x_2:y_1x_2$ ，而將 $b:c$ 的前後項同乘 y_1 ($y_1 \neq 0$)，即 $b:c=y_1x_2:y_1y_2$ ，如此一來兩個比的共同項 b 都是 y_1x_2 ，這樣就可以將 $a:b$ 與 $b:c$ 連結起來寫成 $a:b:c=x_1x_2:y_1x_2:y_1y_2$ 。

參、研究方法與設計

一、研究方法

本研究採個案研究法，探討個案在比例問題方面的解題表現，個案研究(case study)是採用各種不同的方法以蒐集有效的完整資料，對單一的個人或社會單位

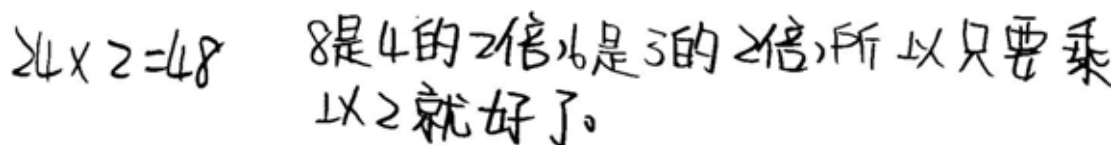
作縝密而深入研究的一種方法(郭生玉, 2002)。採用個案研究可以深入瞭解個案在比值及比例問題方面的解題表現, 在訪談時根據個案的回答, 適時調整提問的方式。然而, 為避免在研究過程中, 因個人主觀因素而有所偏差, 資料來源及研究人員在分析資料方面必須進行三角校正, 力求研究結果的客觀性。

Goldin(1998; 2000)的論述中提及結構式工作單晤談(structured, task-based interviews)的技巧, 亦即工作單的問題是結構式的, 而訪談的問題是依照學生的回答適時調整。根據文獻探討及研究者個人教學經驗, 同時參酌共同研究者的建議, 設計此結構式工作單, 兼顧數據的變換以及情境與措辭的調整, 以瞭解個案能在不同情況之下的解題表現。在工作單的填寫上, 要求個案儘量將心中的想法用不同的表徵方式呈現出來, 訪談時則進一步引導個案將更深層的想法或是再一次將表達不清楚的地方重新說明白, 最後再根據所蒐集到的資料整理與分析。

二、研究對象

本研究在個案的選擇上是採取立意抽樣, 研究之初, 小含是國小六年級的學生, 而目前是國中一年級的學生, 就讀之國中及國小皆位於嘉義市, 班上成績約在前 20%, 並未在校外參加數學科補習。解題時能夠詳細的將過程寫下來, 訪談時則能夠清楚表達自己的想法。對於單一比例問題能夠採取單價法及倍數法解題, 至於多重比例方面, 亦能運用單價法的方式成功解題,

但是, 若運用倍數法解題, 不同項目的倍數關係無法有效的連結, 以致解題不成功, 例如「4 個太空人 3 天吃了 24 顆食物丸, 那麼 8 個太空人 6 天吃幾顆食物丸?」(圖 1)



$24 \times 2 = 48$ 8是4的2倍, 6是3的2倍, 所以只要乘以2就好了。

圖 1 多重比例解題結果(解題錯誤)

另外，在分數的概念發展方面，小含習慣用小數表示，例如「 $8 \div 3$ 」，這是除不盡的，結果她用循環小數表示，但是不曾計算過含有循環小數的乘法，所以 $2.\bar{6} \times 7$ 就不知該如何表示，如圖 2，但經過引導之後，能夠正確的運用分數來計算，如圖 3。

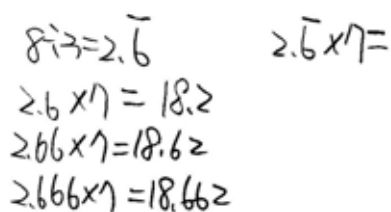


Figure 2 shows handwritten calculations for $8 \div 3$ and its multiplication by 7. The calculations are as follows:

$$\begin{aligned} 8 \div 3 &= 2.\bar{6} \\ 2.\bar{6} \times 7 &= 18.\bar{2} \\ 2.66 \times 7 &= 18.62 \\ 2.666 \times 7 &= 18.662 \end{aligned}$$

圖 2 小含的小數表徵方式

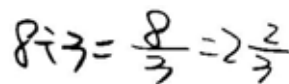


Figure 3 shows a handwritten calculation for $8 \div 3$ using fractions. The calculation is as follows:

$$8 \div 3 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

圖 3 小含的分數表徵方式

在學習方法方面，小含沒有在校外補習，不會有提前學習的現象，解題時較容易產生自發性解法；在課程學習方面，從比例相關課程的教學前到教學後，解題上會呈現不同的風貌；而在成長的歷程方面，經由國小六年級到國中一年級，跨越了不同的學習階段。為了能夠長期且深入的綜觀個案在比值與比例相關問題的解題表現，因此選擇小含為研究對象。

三、 研究工具

(一)研究者與共同研究者

在質性研究中研究者即為研究工具(Guba & Lincoln, 1981)，其所扮演的角色相當重要，因為研究者必須客觀的蒐集資料，同時在多變的質性研究過程中，需隨時調整腳步，以順應研究情境。劉祥通(2004)認為研究者也應從教學者的角色去了解與分析學生的解題表現，此即研究者即教學者 (researcher as teacher)，換句話說，研究者訪談時應發揮教學者的角色，透過教學互動，才能更深入瞭解研究個案的想法。而研究者即模型的建造者 (researcher as model builder)，必須不斷地修正與建立自己對受試者解題的看法 (Cobb & Steffe, 1983)。參與本研究

的成員包含研究者及共同研究者，茲分述如下：

1、研究者

研究者目前在國中任教，教學年資約 20 年，根據文獻探討以及教學經驗設計相關工作單，解題時請小含盡量把作法寫得詳細，可以用算式、畫圖或文字描述來表徵。訪談時耐心的引導其將書面表達不清楚的地方，能完整的說出來。因此從解題表現裡，可以發現其思考模式，而從訪談中則能夠進一步瞭解其深層想法。除了資料的蒐集與整理分析，研究者需掌控研究流程，使研究工作能順利進行。

2、共同研究者

共同研究者一位數學教育師資培育者。在本研究中，對於工作單上題目的設計，提供許多優質的建議；在資料的整理與分析上，與研究者共同檢驗分析的合理性，儘量顧及人員的三角校正；而在研究流程的掌控方面，時時提醒研究者做適切的修正，使整體研究工作能夠更完善。

(二)工作單

本研究在探討小含比例相關問題的解題表現，工作單是採用結構式工作單，共有三題，內容涵蓋了連比問題。第一題必須從 x 的 a 倍與 y 的 b 倍相等，找出 x 與 y 的比例關係，再利用給定的 x 與 y 的和求出 x 與 y 的值。而第二題與第三題是連比的問題，在 $ax = by$ ， $cy = dz$ 這兩個等式中，求出 x 、 y 與 z 的比例關係，再利用給定的 x 、 y 與 z 的和分別求出 x 、 y 與 z 的值。在第二題中， $b = c$ ，因此比較容易；而第三題 $b \neq c$ ，此時需以 b 與 c 的公倍數為橋樑，將 $ax = by$ ， $cy = dz$ 這兩個等式，連接成 $acx = bcy = bdz$ ，進而求出 x 、 y 與 z 的比例關係，這是比較有挑戰性的問題。對於只學過國小簡單的比例課程且未學過代數解法的小含來說，研究者可以從小含解工作單的表現，觀察其解題策略與自發性解法。

四、資料蒐集與分析

資料的蒐集與分析，在質性研究的過程中必須要同時進行，且持續不斷的一直到研究將近完成(黃瑞琴，1991)，因此所蒐集到的資料勢必十分龐雜，必須做有系統的分類以及編碼，才能有效的運用所蒐集到的資訊。工作單上有小含的解題表現，而原案則包含訪談逐字稿及資料分析，訪談編碼為四位阿拉伯數字及一位英文字母，前兩位數字代表原案編號，末兩位數字是訪談流水號，英文字母T代表研究者說的話，S則是小含的話，例如 0103T，表示原案一訪談的第三句話，是研究者說的話。

為了研究的客觀性，研究人員對資料來源將進行三角校正，在研究人員方面分為兩部分，首先把研究者與共同研究者對小含解題表現的看法互做比較；其次是從小含的解題表現中，研究者自己認為小含可能的想法，與訪談之後小含實際的想法之間的比較。在資料來源方面則包含了工作單上的解題表現以及訪談。

肆、研究結果與討論

本研究的題目類型包括了比例及連比相關問題，比例問題是型如 $ax = by$ ， $x + y = k$ 的題目，隨著 a 與 b 所代表數字的不同， x 與 y 彼此的倍數關係，或是整數，或是分數。而連比方面的問題是型如 $ax = by$ ， $cy = dz$ ， $x + y + z = k$ ，這類的題目。連比問題因為牽涉到三個量之間的比例關係，對於小六到國一的學生，是比較具有挑戰性的，尤其是 x 、 y 、 z 的係數變得複雜時，更不好處理。底下就三個原案來探討小含在比例問題(原案 1)及連比問題(原案 2、3)的解題表現。

一、比例問題解題分析

原案 1

題目：兩位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

這兩題是 $ax = by$ ， $x + y = k$ 的類型。在此 x 的係數是 2， y 的係數是 3，無法直接看出 x 與 y 兩者的比例(或倍數)關係。

學生初始解題分析：

小含利用畫線段圖的方式，將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當成 1，所以大姊的存款是 $\frac{1}{2}$ ，二姐的存款是 $\frac{1}{3}$ ，因此大姊的存款與二姐的存款的比是 3：2，由此可知小含不僅具備「部分-整體」的概念，也能用比的方式表徵。兩人的存款和是 7800 元，比是 3：2，再利用比例分配的概念可知大姊有 $7800 \times \frac{3}{5} = 4680$ (元)。

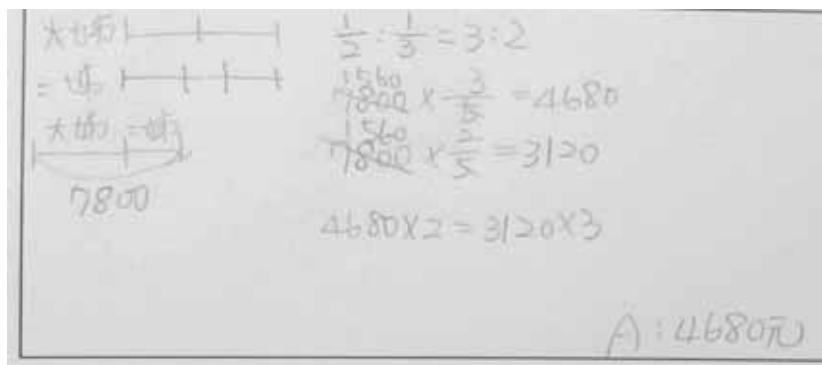


圖 4 原案 1 小含的解題表現

訪談：

0101T：這一題你是如何進行的呢？

0102S：看題目的意思把圖畫出來。

0103T：從題目的意思如何把大姊及二姐畫出來？

0104S：先畫兩條一樣長的線段，因為大姊的 2 倍是二姐的 3 倍，所以大姊那一條線段分 2 等份，其中一等分是大姊，而二姐那一條線段分 3 等份，其

中一等分是二姐。

0105T：再來呢？

0106S：兩人的和是 7800，所以其中一等份合起來是 7800。

0107T：那 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ 是什麼？

0108S：其中一等份分別是 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$ ，所以大姊比二姐是 3 比 2。

0109T：為什麼要乘以 $\frac{3}{5}$ 呢？

0110S：因為大姊比二姐是 3 比 2，大姊佔 3 份，二姐佔 2 份，總共佔 5 份，所以大姊佔全部的 $\frac{3}{5}$ ？

0111T：你還有驗算？

0112S：想確定一下，有沒有做對。

0113T：很好。

訪談後分析：

小含還是先利用畫線段圖來做這個題目，看到他的解法，猜測他能有效運用基準量且具備「部份－整體」的概念，在訪談時為了確認她的想法，特地再問那 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ 是什麼？（00107T）以及 為什麼要乘以 $\frac{3}{5}$ 呢？（0109T）。他將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當作基準量 1，且能以 $\frac{1}{2}$ 表示大姊的存款所佔的份量、 $\frac{1}{3}$ 表示二姐的存款所佔的份量（行號 0104S）。除了之外，也能夠將代表大姊與二姐的部份以比的方式呈現（行號 0108S），同時能將兩者的存款按照 3：2 的比例適當的分配（行號 0110S），由此可知，小含對於比例的運用有所瞭解。

二、連比問題解題分析

前一節討論的是兩個量之間的關係，本節增加一個量，所要討論的是型如

$ax = by$, $cy = dz$, $x + y + z = k$, 這類的比例題目。因為牽涉到三個量的比例關係，我們稱之為連比，這類題目必須從兩兩間的關係，擴充到三者的比例關係，對於小六到國一的學生，是比較具有挑戰性的，尤其是 x 、 y 、 z 的係數變得複雜時，更不好處理。

原案 2

題目：三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 3 倍是小妹存款的 4 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

本題是型如 $ax = by$, $by = dz$, $x + y + z = k$, 這類的比例題目。從 $ax = by$, $by = dz$, 這兩個式子中，以 by 為橋樑，找出 x 、 y 、 z 三者的比例關係。

學生初始解題分析：

學生將三人的關係用線段畫出來，同時可以用比的形式表示，最後能按比例方式將 7800 做分配。

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$
 $7800 \times \frac{6}{13} = 3600$
 $7800 \times \frac{4}{13} = 2400$
 $7800 \times \frac{3}{13} = 1800$
 $3600 + 2400 + 1800 = 7800$
 A: 3600元

圖 5 原案 2 小含的解題表現

訪談：

0201T：這一題你是如何進行的呢？

0202S：看題目的意思把圖畫出來。

0203T：為什麼要畫線段圖呢？

0204S：畫線段可以比較清楚。

0205T：從題目的意思如何把大姊、二姐及小妹畫出來？

0206S：先畫兩條一樣長的線段，因為大姊的 2 倍是二姐的 3 倍，所以大姊分 2 份，二姐分 3 份。因為二姐的 3 倍是小妹的 4 倍，所以再畫一條一樣長的線段，把它分 4 份，就是小妹的了。

0207T：那 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ 是什麼？

0208S：因為大姊 2 份、二姐 3 份與小妹 4 份都一樣長，大姊是 $\frac{1}{2}$ 、二姐是 $\frac{1}{3}$ ，

而小妹是 $\frac{1}{4}$ 。 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ 就是三人的比。

0209T： $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ 是如何化成 6 : 4 : 3？

0210S：可以同時乘以 12。

0211T：12 是 2、3、4 的什麼？

0212S：最小公倍數。

0213T：為什麼要乘以 $\frac{6}{13}$ 呢？

0214S：因為 6 : 4 : 3 總共分 13 份，大姊佔 6 份，所以大姊佔全部的 $\frac{6}{13}$ 。

0215T：你還有驗算？

0216S：想確定一下，有沒有做對。

0217T：很好。

訪談後分析：

用畫線段圖的方式似乎是一個不錯的方法，可以比較清楚的呈現彼此的關係 (行號 0204S)。將大姊的 2 倍、二姐的 3 倍及小妹的 4 倍當作 1，具備了基準量

的概念，而將大姊視為 $\frac{1}{2}$ 、二姐視為 $\frac{1}{3}$ 、而小妹視為 $\frac{1}{4}$ ，對於部分—整體的概念也相當完備，同時也有能力把分數的比化為簡單的整數比(行號 0210S)。

原案 3

題目：三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 6600。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

本題是型如 $ax = by$ ， $cy = dz$ ， $x + y + z = k$ ，這類的比例題目。從 $ax = by$ ， $cy = dz$ ，這兩個式子中，以 y 為橋樑，找出 x 、 y 、 z 三者的比例關係。

學生初始解題分析：

小含一開始不會做，無法將二姐不同的倍數，做有效的連結，經過介入教學之後(行號 0303T至行號 0322S)才能處理，底下是小含經介入教學之後的解題表現：

圖 6 原案 3小含的解題表現

訪談：

0301T：這一題不會做嗎？

0302S：想不出來。

0303T：你覺得可以從什麼地方著手？

0304S：從他們之間的倍數關係。

0305T：如果 3 個人只畫 3 個線段，就會比較清楚，但是這裡有 4 條線段，你所畫的線段有哪個重覆？

0306S：二姐的線段。

0307T：所以我們可以從那一個人著手？

0308S：二姐。

0309T：但是兩條表示二姐的線段不一樣長。

0310S：是呀。

0311T：既然是要二姐當橋樑，但是這兩條線又不一樣長，那該怎麼辦？

0312S：.....

0313T：你剛剛說跟他們之間的倍數有關係，那可不可以從倍數的關係來想想看，如何才能讓表示二姐的兩條線段變得一樣長。

0314S：不太知道耶。

0315T：表示二姐的兩條線段，在上面那一段有 3 份，下面那一段有 4 份，所以兩段當然不一樣長，你可以試試看上面那一段排幾個，會跟下面那一段排幾個一樣長？

0316S：上面那一段排 4 個，下面那一段排 3 個。

0317T：不錯，我們來看大姊與二姐的部分，如果表示二姐的線段變成 4 倍，那大姊要怎麼辦才會跟二姐一樣長？

0318S：二姐 4 倍，大姊也要 4 倍。

0319T：很好，相同的方式，二姐與小妹的部分，如果表示二姐的線段變成 3 倍，那小妹要怎麼辦才會跟二姐一樣長？

0320S：二姐 3 倍，小妹也要 3 倍。

0321T：很好，那這樣表示大姊、二姐、小妹的線段都一樣長了，今天先到這裡，剩下的部分你再想想看。

0322S：好。

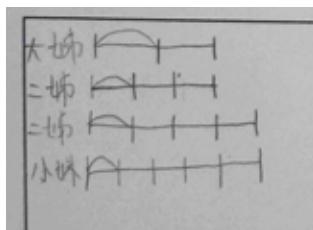


圖 7 原案 3 小含的解題過程

(經過 3 日後...)

0323T：想出來了嗎？

0324S：這樣不知道可不可以？

0325T：我看看...，不錯喲， $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{15}$ 分別是什麼意思？

0326S：表示大姊、二姐、小妹的線段都一樣長後，有 8 個大姊、12 個二姐以及

15 個小妹。所以大姊就是 $\frac{1}{8}$ 、二姐就是 $\frac{1}{12}$ 、小妹就是 $\frac{1}{15}$ 。

0327T：那大姊與二姐的比是多少？

0328S： $\frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ 。

0329T：二姐與小妹的比又是多少？

0330S： $\frac{1}{12} : \frac{1}{15}$ 。

0331T：所以三個人的比就是.....。

0332S： $\frac{1}{8} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15}$

0333T：那接下來的做法就跟上一題類似的了。

0334S：是的。

訪談後分析：

這一題小含不會做，因此研究者期能以最少的引導介入教學(行號 0303T 至行號 0322S)，從 4 條線段中小含能夠選擇重複的二姐著手(行號 0308S)，亦即以

二姐的線段長當橋樑，連結表示大姊、小妹的線段。為了要處理表示二姐的兩條不一樣長線段，小含分別畫成 4 倍長及 3 倍長(行號 0316S)，如此一來這兩條表示二姐的線段長度就一樣了，小含是運用公倍數的概念來處理這個問題。當表示大姊、二姐與小妹的線段長都一樣之後，可以發現這個長度是大姊的 8 倍、二姐的 12 倍以及小妹的 15 倍(行號 0326S)，而兩個比，大姊：二姐 = $\frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ 以及二姐：小妹 = $\frac{1}{12} : \frac{1}{15}$ ，也能將其表示成大姊：二姐：小妹 = $\frac{1}{8} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15}$ ，此即所謂的連比。

伍、結論與建議

一、結論

經過這三個原案的分析，研究者分析以下的原因是解題成功的關鍵：

(一)以適當的圖形表徵題意

表徵是五個數學過程(表徵、溝通、解題、連結、推理)之一(NCTM, 2000)。而Francis(2001)也提到，表徵不只是一個過程，它也是教導數學以及學習數學的途徑，它之所以重要是因為，表徵幫助學生在不同的情境中，認出共同的數學成分，對思考而言，表徵是強而有力的工具，對反思而言，可以產生更具體且可利用的數學概念。小含做這些題目的時候，剛升上國中一年級，對於文字符號的運用，代數的運算，還沒什麼概念，因此在處理這類問題時，以畫線段的方式來處理，不僅有助於理解問題，更能夠具體的呈現彼此間的比例關係。

(二)正確的選擇基準量

遇到「大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍」這種情況，一般會將大姊的存款當作 1，則二姐的存款是 $\frac{2}{3}$ ；或是將二姐的存款當作 1，則大姊的存款是 $\frac{3}{2}$ ，不管是哪一種情形，若要用畫線段的方式表徵，都不是很簡單。但是在原案一中，

小含將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當成 1，以此為基準量時，表示大姊存款 2 倍與二姐存款 3 倍的線段是一樣長的。如此大姊的存款就是將此線段二等分中的一份，也就是 $\frac{1}{2}$ ；而二姐的存款就是將此線段三等分中的一份，也就是 $\frac{1}{3}$ 。小含以畫線段的方式表徵大姊與二姐存款的關係，選擇大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當作基準量，是不錯的選擇。而在原案三中，更將大姊的 8 倍、二姐的 12 倍以及小妹的 15 倍當作基準量來解題，可見具備基準化的能力，在解比例問題時是必要的。

(三)能以相同的倍率(放大或縮小)表徵成比例的數

比的前項與後項可以同乘或同除一個不為零的數，而不改變其比值，亦即 $a:b = ma:mb = \frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ ， $mn \neq 0$ 。這個比的運算法則小含能夠充分的運用，在將分數的比化為最簡單的整數比的過程中，不僅兩個數的比能夠處理，三個數的比也能運用得宜。

除了數字的運算能有所掌握之外，為了表徵比例關係所畫的線段，也能運用此原則，在原案三中，當表示二姐 3 倍存款的線段變成 4 倍時，表示大姊 2 倍存款的線段也要變成 4 倍(行號 0318S)。由此可知，小含能夠有效的運用成比例的數能以相同的倍率放大或縮小這個解題策略。

(四)教學介入引發小含再思考三者的關係，進而獲得成功的解題。

為了盡量呈現小含的解題想法，研究者有必要教學介入時，應該注意到只能給予最少的引導。在原案三中，大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍，因為二姐的倍數不同，小含一開始不會做。經過研究者利用訪談的機會，教學介入提示應以誰為橋樑之後，小含因此能思考如何將表示二姐的兩條不同長度的線段，運用公倍數的概念化成一樣長，再以此線段長當橋樑，表徵出大姊、小妹的線段長。如此就能找出三者的比例關係，順利的解題。

二、建議

本研究進行的時程，個案對於含有文字符號的代數運算還不熟練，至於國中的比例課程也尚未接觸，因此無法探究 Langrall & Swafford(2000)所提出的形式的比例推理(formal proportional reasoning)的解題策略。若能繼續探討學生在國中比例問題的解題表現，相信從國小尚未學習比例相關課程，到國中運用代數解比例問題，會有較完整的資料呈現，也真正符合九年一貫的課程銜接。

參考文獻

中文部分

台灣省國民教師研習會(1997)。國民小學數學實驗課程教師手冊第十冊。台北：研習會出版。

何意中(1988)。國小三、四、五年級學生比例推理之研究。花蓮師院學報，2，387-433。

林福來(1984)。青少年的比例概念發展。科學教育月刊，73，7-26。

周筱亭、黃敏晃(2002)。國小數學教材分析一比(含線段圖)。台北：國立教育研究院籌備處。

翁宜青(2003)。一位國小三年級學生解比例問題之研究。嘉義，台灣：國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文(未出版)。

郭生玉(2002)。心理與教育研究法(十八版)。台北縣：精華。

陳英傑(1992)。台南師院學生比例概念的研究。台南師院學報，25，319-343。

黃瑞琴(1991)。質的教育研究法。台北：心理出版社。

葉建德(2005)。一位七年級學生解速率問題之研究。嘉義，台灣：國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文(未出版)。

楊錦連(1999)。國小高年級兒童解決比例問題之研究。嘉義，台灣：國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文(未出版)。

劉祥通、周立勳(1999)。國小比例問題教學實踐課程之開發研究。國立台中師範學院數理學報，3(1)。

劉祥通(2004)。分數與比例問題解題分析—從數學提問教學的觀點。台北：師大書苑。

魏宗明、劉祥通(2003)。兒童對數學比例問題的建構。科學教育研究與發展季刊，32，87-108。

Clark,F.B. & Kamii,C.(1997).Identification of multiplicative thinking in children in grade 1-5.載於台北市立師範學院兒童發展研究中心主編：建構主義在國小低年級和幼稚園數學教學的應用學術研討會論文集。台北：台北市立師範學院兒童發展研究中心。

外文部分

Bar,V.(1987).Comparison of the development of ratio concepts in two domains.*Science Education*,71(4),599-613.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T.R., & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh.,& M.landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and Process*(pp.91-126). New York: Academic Press, Inc.

Chapin,S.H.,&Anderson,N.C.(2003).Crossing the Bridge to Formal Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*,8(8),420-425.

Cobb,P.,& Steffe,L.P.(1983).The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*,14(2).83-94.

Fennell, F. & Rowan, T.(2001).Representation : An important Process for teaching and learning mathematics.*Teaching Children Mathematics*,7(5).288-292.

Freudenthal, H.(1983).*Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.

Goldin,G.A.(1998).Observating mathematical problem solving through tasked based

- interviews. In A.R.Teppo(Ed.),*Qualitative research methods in mathematics education*.(pp.40-62).Reston,VA.:National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin,G.A.(2000).A scientific perspective on structured,tasked-based interviews,in mathematics education research.. In A.E.Kelly & R.A.Lesh(Ed.),*Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*.(pp.517-545).Mahwah, New Jersey:Lawrence Erlbaum Associates,Publishers.
- Guba, E. G. & Lincoln, Y. S.(1981).*Effective evaluation:Improving the usefulness of evalution results through responsive and naturalistic approaches*. San Francisco:Jossey-Bass.
- Hannah,S. (2000).Moving to proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*,6(1),58-60.
- Hart, K. M.(1981).*Children's understanding of mathematics*(pp.11-16).London:John Murray Ltd.
- Kieren, T. E.(1980). Knowing rational numbers: Ideas and symbols. In M. Lindquist(Eds.), *Selected issues in mathematics education*, Chicago:National Society for the Study of Education. Reston, VA: National Council and Teachers of Mathematics
- Miller, J. L& Fey, J. T. (2000).Proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*,5(5),310-313.
- Lamon,S. J.(1993).Ratio and proportion:Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(1).41-61.
- Lamon,S. J.(1994).Ratio and proportion:Cognitive foundations in unitizing and norming.In G. Harel and J. Confrey(Eds.),*The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp.89-120).Albany N.Y.:State University of New York Press.
- Lamon,S. J.(1995).Ratio and proportion:Elementary didactical phenomenology. In J.

- T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany N.Y.: State University of New York Press.
- Langrall, Cynthia W., and Jane Swafford. (2000). Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254-261.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.
- Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for research in Mathematics Education*, 28(2), 216-236.
- Ma, Liping. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and then ratio concept: part I - Differentiation of stage. *Education Studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: W.W. Norton.
- Schorn, A. C. (1989). *Proportional reasoning by young children*. Unpublished master's thesis, Cornell University, Ithaca, NY.
- Van den Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children (6-8)-ratio and proportion. *Educational operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.).

Acquisition of mathematics concepts and procedures(pp.127-174). New York:
Academic Press.

Vergnaud, G.(1988). Mutiplicative structures. In J. Hievert & M. Behr(Eds). *Number
concepts and operations in the middle grades*(pp.141-161). National Council
and Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

附錄

工作單

- 1、兩位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍。請問大姊每月存款有多少元？

- 2、三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 3 倍是小妹存款的 4 倍。請問大姊每月存款有多少元？

- 3、三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 6600。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍。請問大姊每月存款有多少元？



教師合作-以發展國小三年級學生數常識為例

¹吳昇軒

²陳宗章

³曾千芬

¹彰化縣太平國小

²國立嘉義大學數學教育所

³嘉義縣布袋國小

摘 要

本研究主要探討數位老師組成研究小組共同討論修改 Kenelly 與 Harvey (1993)編輯之利用電算器教數學的教學活動-壞掉的計算機作為發展三年級學生數常識之教學活動。透過本教學活動，增進了學生對於數的分解、合成概念及數在加、減運算下分解、合成關係的瞭解，並誘發學生數常識的發展。

關鍵字：數常識、電算器教學活動

壹、前言

為了讓學生學得更好，老師被期待在教學方法與內容要有所突破。因此，身為一位老師必須隨時去思考哪些數學是該教的？該如何去教？

研究者曾經要求國小三年級學生解下列的問題「 $96+78+4=$ 」，只看到小朋友興致高昂的利用直式把 96 放上面 78 放下面畫線對齊，然後 8 加 6 寫 4 進 1，9 加 7 等於 16 加 1 等於 17，174 再加 4 等於 178。全班的小朋友都答對了，請小朋友上台發表作法則都是一樣。面對這樣的結果老師該歡喜嗎？應該！因為小朋友整齊畫一的解題過程說明了老師的辛苦沒有白費，但除了這麼整齊畫一的解題方法外還有沒有其他解題方式是小朋友可以創造與激發出來的？

為了讓學生能快速求得解答，老師加強繁雜制式的計算練習無可厚非，然而有沒有更好的辦法呢？美國數學教師協會（NCTM, 1989）出版的學校數學課程與評量標準即強調『數常識』（number sense）的重要性，而 Reys (1994) 認為學生如果具備『數常識』則學生就可以宏觀的看待問題並瞭解數字和運算之間的關係。因此「 $96+78+4=$ 」的問題在不需要紙筆的情況下小朋友就可以將「 $96+78+4=$ 」看成「 $96+4+78=100+78=178$ 」，順利且快速的就能求得解答。因此，在繁雜制式的計算練習外，學生『數常識』的發展的確是老師應該去重視的，問題是老師該如何去協助學生發展數常識呢？

教師為解決教育現場問題所做的行動研究即為教育行動研究，而在教育行動研究歷程中，教師若能集合數位老師共同討論、意見回饋，則討論而來的行動方案將更為有效與周延。因此本研究透過數位教師組成研究小組，嘗試改編一個使用電算器的教學活動來發展學生數的分解、合成概念及數在加、減運算下分解、合成關係的瞭解，更重要的是誘發學生數常識的發展。

貳、文獻探討

一、教師合作之教育行動研究

吳明隆（2001）認為教師在教育實際環境中，以實務研究者的角色，對所關注的問題進行不斷反省與研究，進而解決問題或改善現況的一種研究歷程是為教育行動研究。現今，教育行動研究普遍應用在改善教學方法、提升教學品質、促進教師專業成長等等議題上，而本研究所強調「教師合作」乃在於教育行動研究

歷程中若教師能夠向合作教師與專家徵詢建議與意見，透過團體的討論與互動歷程，發展多重觀點，不僅增進問題解決方案的可行性，減少錯誤的發生，同時也促進教師在教學上的專業成長。Corey 便強調在教育行動研究的過程中『合作研究』的重要性，他認為合作研究有下列優點：

1. 集思廣益，協商討論，培養民主素養
2. 增進改變的承諾，藉由群體力量，促發個人改變
3. 減少個人錯誤風險
4. 集合教師專長，建構教師社群。(引自吳明隆，2001)

由上述可知，「教師合作」在教育行動研究歷程中扮演極重要的角色，尤其在現今的教育環境講求教學創新，教師要在繁忙的課務與級務下，利用有限的時間設計符合學生程度並吸引學生的教學活動，除了靠教師之間的互助合作與腦力激盪外，實在沒有其他方法。

二、數常識

甚麼是數常識？楊德清（2002）認為「數常識可以解釋為個人對數字、運算、以及數字和運算所產生之情境的一般性理解與認知，以及能夠以彈性靈活的方法去使用這種理解和發展有效的解題策略（包括心算、估算）以處理日常生活中包含數字和運算情境的相關問題」（頁 234）。由上可知，當學生具備這樣的能力時，學生便能夠在特定的情境下察覺出數字或數字與運算之間的關係以解決問題，而這種能力並非單一能力，而是多種能力的組合。楊德清（2002）進一步歸納出數

常識包含了五個組成元素：

(一)了解數字的基本含意。瞭解數字的基本意義包括：理解數字系統（整數、分數、小數），它所表的意義以及它的結構關係，包括十進位系統、數字型態、與位值觀念。

(二)比較數字大小的能力。認知數字大小的能力包括能夠比較數字（包含整數、分數與小數）之大小，例如：知道 $\frac{2}{3}$ 大於 $\frac{1}{2}$ ，或能分辨 5.6 大於 5.5988。

(三)瞭解運算對數字的意義和影響之能力。認知運算對數字的影響即是瞭解運算在不同數字系統下（包括整數與有理數）以及不同情境下所產生之影響。

(四)發展並靈活運用參考點的能力。參考點乃是指可以依賴以作為檢驗其他數字或解決問題之標準點。例如：以 1 為參考點，知道 $\frac{17}{18}$ 小於 1 但是很接近 1。

(五)發展估算策略，以及能夠判斷運算結果之合理性。學習數學的主要目的之一乃在解決問題，因此在不同的情境下，必須決定問題情境需要的是正確或大概的答案，並據以選擇適當的計算工具（如估算或心算），以有效的解決問題，同時能夠檢驗運算結果的合理性。

由上列的組成要素，研究者反思本身在教學及現行課程中並未加強學生在這些能力的發展，而美國數學教師協會（NCTM，2000）發表之學校數學準則與標準中在小學數學教育數與運算的核心便是發展學生的數常識。相較之下，受傳統填鴨式教育的影響，我們一直忽略發展學生『數常識』的能力，學生習慣與安逸於固定的計算模式和公式的背誦，老師過份加強算則的反覆練習也局限學生對於

數字的理解與彈性運用，這樣的數學教學與學習方式使的學生的思考僵化，無法真正瞭解數學的本質，學生對於數學問題的解答往往只知其然而不知所以然。為了改變這種現象，我們的確必須思考發展學生數常識的重要性。

參、準備活動

一、教學活動設計之討論

本教學活動改編自 Kenelly 與 Harvey (1993) 編輯之利用電算器教數學的教學活動-壞掉的計算機。為了能符合國小三年級小朋友的程度及教學目標，研究者與數位老師組成研究小組，針對教學活動工作單的題目及教學流程進行討論如下：

研究者接觸電算器教數學的教學活動設計-壞掉的計算器，覺得非常有趣，於是乎萌起將教學活動引入課室中，便將我們的想法讓楊教授知道。

很高興你們能將電算器的教學活動引入課室之中，但重要的是你們要怎麼去設計、怎麼去教，因為不管外國人設計的教學活動乃至於國內的教學設計都必須考慮到是否適合你自己的學生。能讓數學教學有趣是重要的，但更重要的是你的教學目標是甚麼？你能讓學生學到甚麼？（941026 楊教授討）。

楊教授的一番話點出了我們思考的方向，為此我們針對原來的教學設計進行討論。

Kenelly 與 Harvey (1993) 編輯之利用電算器教數學的教學活動設計-壞掉的計算器	
活動目的	透過計算機的使用來使學生發展自己數運算的規則。

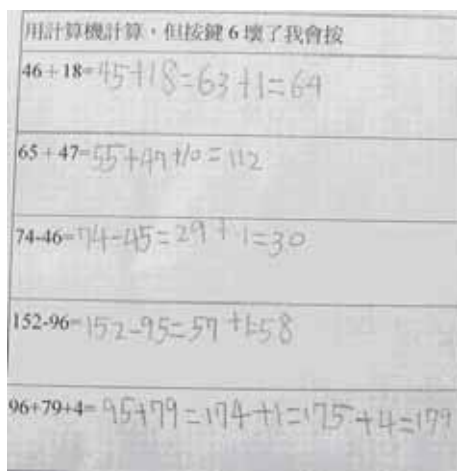
教學目標	利用計算機來發展學生對數及加、減、乘、除運算關係的瞭解。
教學流程	讓學生解『Broken Key Problem』工作單，當大部分的學生解完後，讓學生討論，是不是只有一種解法。
工作單	1. $463+32=$ 2. $403-76=$ 3. $38\times 64=$ 4. $504\div 56=$

我覺得教學目標需要修正，因為第 3、4 題有關乘和除的題目並不適合剛升上三年級的小朋友（941026 吳老師討）。

的確，剛升上三年級的小朋友對乘和除的運算不是很穩固，要小朋友進一步瞭解數與乘、除運算之間的關係似乎太難了，我覺得題目可以集中在數與加、減運算關係上，尤其是在減的運算下數的分解合成有其困難度（941026 曾老師討）。

發展學生數常識也可以當作教學目標，只要我們把題目設計好，說不定可以誘發學生這方面的想法（941026 吳老師討）。

為了讓我們的教學設計能順利實施，楊教授建議我們可以將設計好的工作單先找一、二位小朋友來測試，再針對結果進行修正。因此研究者草擬了一份學習工作單並利用時間找了研究者即將進行教學的一位三年級數學成就中等的學生做施測，結果如下：



在隔週的小組討論裡，我們針對學生的解題表現進行教學設計的修正。

從學生的解題表現可以清楚瞭解，學生會使用固定的解題模式來解題，例如第 1、3、4、5 題小朋友都將 6 分解，最後再加 1。如果教學時讓小朋友解完全部題目再進行討論，則小朋友可能只用固定的模式來解題或是一直用錯誤的方式解題，無法及時的讓不同的解法來刺激他，這樣的結果不是研究者所願意看到的，因此，等所有的小朋友解完再討論的教學流程有必要修正（941102 吳老師討）。

我也有同感，如果我們讓小朋友解一題後馬上分享與討論，則其他小朋友的解法可以馬上刺激小朋友再次思考，也可以讓小朋友即時欣賞不同的解題表現（941102 曾老師討）。

對於我們的想法，楊教授表示認同，更建議我們可以增加工作單題目的數量，以增加小朋友解題的機會。我們討論後的教學設計如下：

活動名稱：黑心計算機	
教學目標	（一）發展學生對數在加、減運算下分解、合成關係的瞭解。 （二）發展學生數常識。

教 學 時 間	80 分鐘
活 動 說 明	(一) 小朋友必須使用電算器解決工作單的問題。 (二) 計算機的按鍵『6』壞掉了，請小朋友在不使用計算機按鍵『6』的情形下將如何使用電算機解題的過程記錄下來。 (三) 在小朋友解完一題後，進行分享與討論，再進行下一題。
工 作 單	如附件(一)
課後學習單	如附件(二)
布 題	可以怎麼按？

在工作單部分，我們選定九個題目作為工作單（詳見附件一），其中第 1-2 題設計為『個位數的分解合成』，第 3-4 題設計為『十位數的分解合成』，第 5-7 題設計為『在減的運算下，個位數的分解合成』，第 8-9 題設計為『發展數常識題』。課後學習單（詳見附件二）為協助學生反思，以『我學會的是』、『我最欣賞的做法是』、『一個檢驗問題』及『今天使用計算機學數學，我的感想是』四個標題來協助學生寫作。前三項標題在於評估學生認知方面的學習表現，最後一項則是評估學生情意方面的表現。

二、 研究者之角色

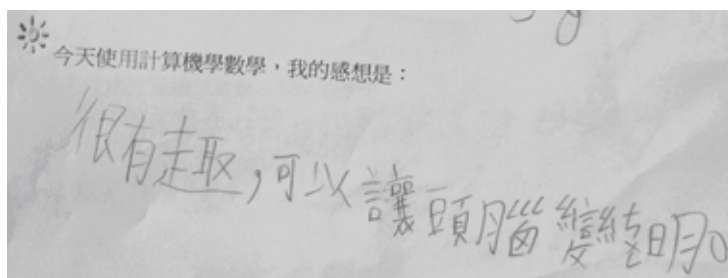
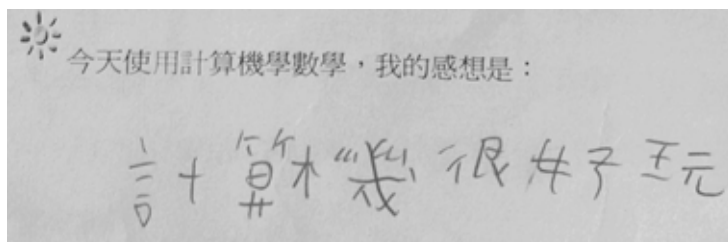
研究者在本研究中扮演教學活動設計、實際的教學工作，與訪談個案的角色。由於研究者親自參與教學活動設計的討論，對於教學目標、教學流程與內容能夠

清楚的掌握，另一方面，研究者熟悉參與本研究教學活動之學生，能清楚瞭解學生的數學學習背景與反應，更有助於研究者在實際教學時掌握學生的學習情形。為了深入瞭解學生的概念改變情形或是學生的想法，研究者將對個案進行訪談，訪談的目的是為了確認學生的概念或是想法，例如：學生在「課後學習單」中寫到「我學很多奇怪的想法」，研究者無法從工作單中瞭解學生所謂「奇怪的想法」，便找學生進行訪談，以瞭解學生何謂「奇怪的想法」。

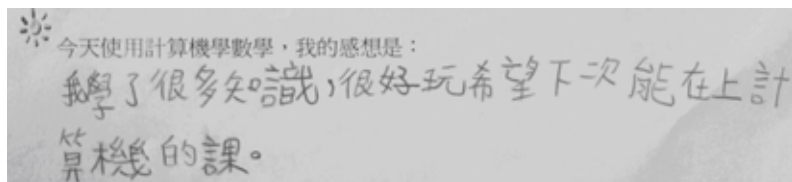
肆、分享與討論

一、學生覺得上數學課是有趣的。

本教學設計不僅想達成認知方面的教學目標，更重要的是希望讓小朋友覺得上數學課是有趣的。數學課不應該是枯燥乏味的，因為惟有在這樣的上課氣氛下才能激發小朋友學習數學的意願。班上兩位數學成就表現平平的學生(S2 和 S6)在課後學習單中利用短短的幾個字表達出自己的感想：



而對本身熱愛數學的 S7 來說，更是寫下對這樣的教學課程充滿期待：



印象中，較少看過老師在數學課中利用電算器來設計教學，小朋友都感到十分有趣，連我都很好奇吳老師要用電算器來上甚麼數學內容（941129 張老師觀）

一同參與上課的張老師的想法也可能是一般老師的看法，傳統觀念，除非老師允許，否則小朋友是不能使用電算器的，更何況是用電算器來教學，而現在，不僅小朋友覺得有趣，更希望下次還能上計算機的課。

二、 透過工作單的布題引導，促進學生對數在加、減運算下分解、合成關係的瞭解。

原案一 布題第二題 $136+57=$ 吳老師巡視行間後請小朋友上台分享。

吳老師：**S6**(寫 $137+57=194$ $194-1=193$)，告訴大家為甚麼要變 137？

S6：因為 6 不能按

吳老師：所以呢？

S6：所以後面要減 1

吳老師：這樣可以嗎？

全班小朋友回答：可以！

吳老師：我們再看 **S15** 的作法(寫 $133+60=193$)，老師覺得這個方法很好？

誰知道為甚麼要寫 $133+60$ ？（吳老師請 **S5** 回答）

S5：57 的好朋友是 3，136 把 3 給 57 就變成 60，就變成 $133+60$ 。

吳老師：這樣做好不好？

小朋友回答：好！

S5 說：不好，因為 60 有 6。

吳老師：S15 的想法很不錯，但是因為 6 沒辦法按，很可惜。我們可以把 60

再拆嗎？

全班學生：可以

吳老師：60 可以拆多少？

有學生說：50

吳老師：如果拆成 50 還要怎樣？

全班學生：加 10！

工作單第二題 $136+57=$ 是要讓學生發展『個位數的分解、合成』概念，研究者原本預估小朋友會用加 1 或減 1 的策略來解題，但 S15 的解題方法卻超脫研究者的想法，S15 不僅會將個位數分解，她還考慮配合後面的數 57，而寫成 $133+60$ ，這便是具備數常識的表現。雖然 60 因為題目的規定還要再進行分解，但 S15 的想法早已讓研究者在教學當時懊惱不已，如果設計之初有考慮到的話，就不會讓 S15 這麼好的想法卻又錯了。

原案二 布題第五題 $22-6=$ 吳老師巡視行間後請小朋友上台分享。

吳老師：我們先看 S4 的作法 ($22-5-1$)？

吳老師：S4，為甚麼 $22-6=$ 你要寫成 $22-5-1$

S4：因為 6 壞掉不能按，所以先減 5

吳老師：為甚麼減 5 後還要減 1 呢？

S4：因為還有 1 還沒減，所以還要減 1。

吳老師：S4 說的很好，老師舉個例子，你帶 22 元要花掉 6 元，如果現在只花

掉 5 元，那還要怎麼辦？

全班同學：再花掉 1 元。

吳老師：所以要加 1 還是減 1？

全班同學：減 1。

吳老師：很好！我們再看 S2 的解法 ($22-7=15-1=14$)，說說看為甚麼要這麼按？

S2：嗯（沈默）

吳老師：沒關係，那老師問你，先減掉 7 然後又減掉 1，合起來是減掉多少？

S2：8

吳老師：可是題目只要減掉多少而已？

S2：6

吳老師：所以減掉 7 還要怎麼辦？

S2：加 1

在減的運算下數的分解合成題型是小朋友較難理解的概念，尤其小朋友可能受前面加的運算下數的分解合成題型的影響而使得解題時出現迷思概念，為了讓小朋友更容易理解，吳老師特別舉了花錢買東西的例子，希望透過情境的引導讓學生理解減的運算下數的分解合成的關係。為了瞭解 S2 是否真的擺脫這樣的迷思概念，研究者在課後針對工作單的內容進行訪談。

$22-6=$ $22-7=15-1=14$	$22-6=16$ $22-7=15+1=16$ 因為：
$74-46=26$ $74-47=27+1=28$	$74-46=$ 因為：不
$152-96=$ $152-97=55+1=56$	$152-96=$ 因為：不

吳老師：S2， $74-46=$ 這一題，原本要花幾元

S2：46

吳老師：那你現在花幾元

S2：47

吳老師：所以還要怎樣呢？

S2：加 1

吳老師：為甚麼？

S2：因為花 47 如果又減 1 的話會等於 48 塊

吳老師：所以呢？

S2：要加 1

從 S2 的訪談中，S2 無法直接解釋為甚麼 $74-47$ 以後還要加 1，而是透過舉出相反的例子「花 47 如果又減 1 的話會等於 48 塊」來說明再減 1 是不對的，由於此題在工作單上有討論過，研究者繼續針對課後學習單第二題進行訪談

吳老師：小華的按法對不對？

S2：不對

吳老師：那你會怎麼按？

S2： $356-98=356-97$ 再-1

吳老師：為甚麼？

S2：因為原本要花 98 塊，現在花 97 塊，再花 1 塊，總共合起來花 98 塊

利用花多少，又再花 1 元的策略是 S2 較熟悉的策略，因為他可以藉由這樣的想法清楚瞭解總共花了多少（減了多少），這對於釐清該加或該減提供一個很明確的方向，而藉由情境式的引導，S2 較容易掌握減運算下數字的意義，這對於解題有相當大的幫助。

三、 透過工作單的布題引導，誘發學生數常識的發展

雖然工作單的最後兩題的設計目的是為了發展學生的數常識，然而在解第二題時小朋友就有數常識的解題想法，這種情形也發生在第七題。

原案三 布題第七題 $152-96=$ 吳老師巡視行間後請小朋友上台分享，有一位小朋友寫了 $4+52=56$ 的解法。

吳老師：S5 寫 $4+52=56$ ，小朋友你知道 S5 為甚麼要這麼按嗎？可以猜猜看！

全班小朋友：不知道

吳老師：我們請 S5 說說看

S5：把 152 拆成 100 和 52，先把 100 拿來減 96 剩下 4，再加上 52

吳老師：這樣可以嗎？

全班小朋友：可以

吳老師：有沒有比較快？

全班小朋友：有

原案四 布題第八題 $96+79+4=$ 吳老師巡視行間後，請小朋友上台分享，其中

S4 的解法是 $100+79=56$ 。

吳老師：誰能說說看 S4 為甚麼要寫 $100+79=179$

（全班 20 位小朋友，馬上有 7-8 位小朋友舉手）

吳老師：我們請 S7 說說看

S7：96 先加 4 等於 100，100 再加 79 等於 179

吳老師：為甚麼 96 要先加 4

S7：因為這樣很快也很好算，直接按 100 加上 79 就是答案

相較於第七題，在小朋友還沒解說前，這次便有較多的小朋友能看出 S4 的解法，顯示小朋友開始會用不同的角度來看問題，小朋友擺脫以往只用直式計算的想法，從新思考算式中數字和運算符號間的關係，這樣的想法不僅算的更快也

更好計算，透過這樣的布題，小朋友數常識的概念已經開始發展。

原案五 布題第九題 $624-499=$ 吳老師巡視行間後，請小朋友上台分享，其中 S5 的解法是 $101+24=125$

吳老師：誰能說說看 S5 為甚麼要按 $101+24=125$

(小朋友在台下討論，但沒人舉手)

吳老師：我們請 S5 解釋一下

S5：先把 624 拆成 600 和 24，600 先減 499 等於 101 再加原來的 24 就是

125

吳老師：為甚麼要先把 624 拆成 600 和 24？

S5：因為 600 減掉 499 等於 101 比較好算

吳老師：這樣可以嗎？

全班小朋友：可以

吳老師：老師還有一種按法 ($1+124=125$)，請小朋友看看懂不懂

(小朋友舉手踴躍)

吳老師：我們請 S6 說說看

S6：先拿 500 減掉 499 就是 1，再加上 124 等於 125

吳老師：這樣有沒有更簡單

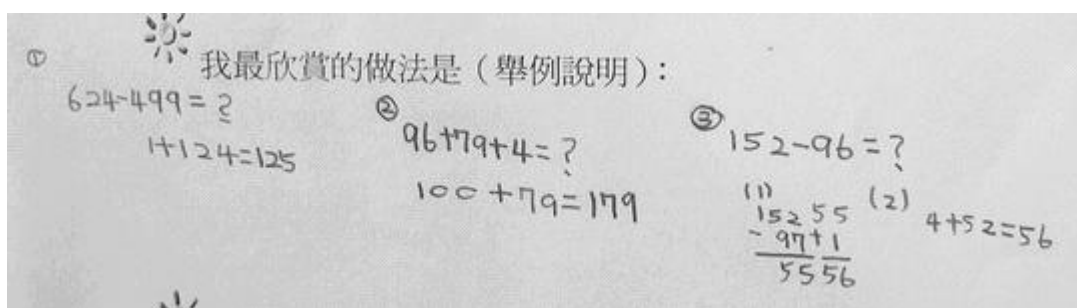
全班小朋友：有

第九題 $624-499=$ 小朋友大部分的解法是 $524-499+100$ 或是 $724-499-100$ ，但 S5 的解題方法提供了一個不同的思考方向，而這種能夠宏觀的看待數字與運算之間關係的想法便是數常識。S5 的解題方法也帶給其他小朋友再次思考解題策略的機會，因為從國小一年級到現在三年級上學期，小朋友學數學已經兩年多，遇過的加、減運算題目不計其數，但大部分小朋友處理計算問題還是制式的利用直式求解，小朋友對數字與運算關係的想法僵化可見一斑，而今天的教學卻給小朋友一種重新看待數字與加減符號的機會，相信這對小朋友未來學習數學會更有幫助。

四、 學生上台分享，學生可以學習與欣賞別人的解題策略。

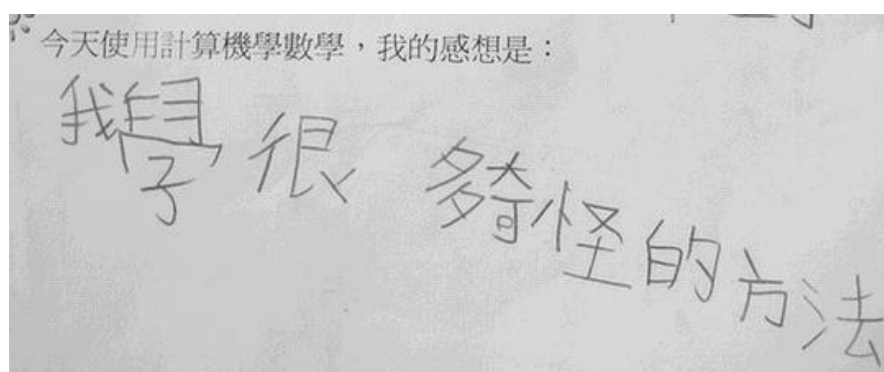
從課後學習單中，我們很清楚的發現學生自己最欣賞的解題方法集中在有

『數常識』的解題策略，像是 S19 就把她欣賞的作法很豐富的寫了下來



而這些解題方法有可能不是小朋友他自己想出來的，但透過上台分享與討

論，小朋友學的更多。像是 S21 在課後學習單寫到：



為了瞭解 S21 是否真正瞭解所謂『奇怪的方法』，吳老師特別訪談他

吳老師：你說你學了奇怪的方法，說說看哪些方法是奇怪的方法。

S21：像是我最欣賞的作法（手指著 $96+79+4=100+79=179$ ）

吳老師：你知道 100 怎麼來的嗎？

S21：96 先跟 4 相加

吳老師：這樣有比較好嗎？

S21：比較快

吳老師：還有哪些是奇怪的方法？

S21：嗯（沈默）

吳老師：像 $624-499=1+124$ ，是奇怪的方法嗎？

S21：是

吳老師：那 1 怎麼來的

S21：600 先拿出 500 減掉 499 剩下 1

吳老師：為甚麼還要加 124？

S21：因為 6 那邊已經減掉 5，變成 100，這邊還有 24 加起來是 124

從訪談中，我們可以清楚的瞭解 S21 所謂奇怪的想法便是有「數常識」的解題方法，對於一般小朋友來說，由於傳統數學教育的影響，直式的計算方式佔據了小朋友對於運算這件事的全部而且是唯一的想法，能夠彈性而且宏觀的看待數字與運算符號之間的關係對小朋友來說是新奇且奇怪的，透過小朋友上台分享解

題策略，S21 雖然覺得這樣的解題方法很奇怪，但卻是自己覺得最欣賞的解題方法，相信這樣的想法也在其他小朋友的腦海中激盪，因為從來沒有人告訴過他數學也可以這樣算。

伍、教學反思

- 一、 透過數位老師組成研究小組共同討論教學活動的內容與教學流程，使得學生在學習上、教師在教學上更能發揮功效，因此如何透過教師之間的討論以精進教學成效是值得教師共同思考的。
- 二、 本教學設計主要讓學生能夠揚棄僵化的直式計算解題方法，重新看待數字與運算符號間奇妙的關係，並進而發展學生的數常識，對於習慣按課本教學的研究者是一個重要的啟示，亦即要讓學生揚棄僵化的解題方式有賴教師先改變自己僵化的教學模式。
- 三、 讓學生上台發表自己的解題策略，不僅增加了學生討論與學習的機會，老師也可以在學生的發表中，針對學生不清楚的地方給予澄清，真可謂一舉數得。
- 四、 對於三年級小朋友來說，有些小朋友不常接觸電算器或是被禁止使用電算器，因此對於電算器的操作並不熟練，此時，老師有必要事先將電算器的操作方式讓小朋友瞭解，以利後續的教學活動。

陸、結語

透過學習工作單的引導，小朋友重新看待數字與運算符號間奇妙的關係，

發展學生的數常識，這種想法的改變，有別於以前僵化的直式計算，相信會讓小朋友喜歡上「奇怪的想法」；在教學過程中，由於小朋友上台分享解題策略，教室內多了小朋友的聲音更使得教室的氣氛動了起來，小朋友可以欣賞別人的作法，老師也可以即時的檢視小朋友學習成果，這種教學改變所產生的影響與收穫實非研究者當初可以預期。而這一切都的成果都植基於教學活動前教師間的討論，教學成效才得以發揮。

參考文獻

吳明隆（2001）：教育行動研究導論。台北：五南。

楊德清（2002）。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識之研究。*科學教育學刊*，第十卷第三期，233-259

Kenelly, J. W. & Harvey, J. H.(Eds.). (1993). Teaching Mathematics with Calculators:A

National Workshop. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation

Standards for School Mathematics. Reston, VA:NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). The Principles and Standards for

School Mathematics . Reston, VA:NCTM.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school*, vol 1,No.2.September-October.p114-120.

附件一 黑心計算機工作單 姓名：



小明有一天到夜市買了一台計算機，但這台計算機卻是黑心貨，因為計算機的按鍵『6』壞掉，請小朋友幫忙小明，在不使用計算機按鍵『6』的情形下，使用計算機來解題。	
請紀錄你的解題過程	經過大家討論後，你會怎麼做？為甚麼
 $46 + 18 =$	 $46 + 18 =$ 因為：
 $136 + 57 =$	 $136 + 57 =$ 因為：
 $65 + 47 =$	 $65 + 47 =$ 因為：
 $169 + 29 =$	 $169 + 29 =$ 因為：
 $22 - 6 =$	 $22 - 6 =$ 因為：

 74-46=	 74-46= 因為：
 152-96=	 152-96= 因為：
 96+79+4=	 96+79+4= 因為：
 624-499=	 624-499= 因為：



附件二 黑心計算機課後學習單 姓名：



今天的數學課我學會的是（舉例說明）：



我最欣賞的做法是（舉例說明）：



阿呆不小心也買到了一台黑心計算機，他發現這台黑心計算機的8壞掉了。他想利用這台計算機計算 $356 - 98$ ，怎麼辦呢？小華教他按 $356 - 100 - 2 =$ ，請問小華的按法對不對？如果是不對的，請你說看為什麼是錯？那要怎麼按才對？



今天使用計算機學數學，我的感想是：

國小五年級學童分數表徵教學之研究

¹張熙明

²楊德清

¹彰化縣立曉陽國小

²國立嘉義大學數學教育研究所

摘 要

本研究之主要目的在探究國小五年級學童於教學前後分數表徵之迷思概念的改變情形。因此，本研究採便利取樣方式選取研究者任教之彰化縣某國小五年某班學生(26人)為樣本參與本研究。研究結果顯示：

一、教學前、後的紙筆測驗成績經由SPSS之t檢定結果達顯著水準 ($\alpha < .01$)，此顯示將多重表徵方式融入分數教學活動後，學生的分數表徵迷思概念有顯著的改變。

二、受訪學生在「比較分數大小時，忽略單位量要一致」、「對分數詞意義的不瞭解」以及「等值分數的概念」等方面有長足的進步，顯示將表徵融入教學中的確有助於學生分數概念之學習。但是低程度學生分數概念仍不穩固，未來有待更多之研究以協助低程度學生之學習。

關鍵詞：分數、表徵、國小五年級

壹、研究動機與目的

Dreyfus 和 Eisinger (1996)認為能夠根據問題情境，彈性的運用適當的數學表徵，如具體操作的、圖表的、符號的...等等具體或抽象的方式，並且在單獨的表徵系統之內以及各個表徵系統之間靈活的轉換，是發展數學思考和培養解決問題能力的基本要素。也就是說數學表徵在數學學習的過程當中佔有相當重要的地位。但是，許多表徵之相關研究(林碧珍, 1990; 黃芳玉, 2003; Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999; Cramer, Post, & delMas, 2002; Lesh, Post, & Behr, 1987)結果顯示許多兒童缺乏表徵的能力。黃芳玉(2003)的研究也進一步的發現國小六年級學生的表徵能力並不會伴隨著計算能力的

成長而發展。

此外，分數概念在國小階段數學領域的學習中是基本且相當重要的概念之一，而且與小數、比、百分率等數學概念關係密切。但由於分數概念有多種不同的使用情境與解釋，因而學習分數對兒童而言是較困難的。一些分數學習的研究 (Kerslake, 1986; Murray, Oliver & Human, 1996) 指出學生常出現的錯誤類型如：缺乏等分概念、只注意分子或分母，忽略單位量大小或分數概念不完備等。然而，就實際課室教學的經驗來說，研究者認為師生溝通的表徵形式與表現和學生的分數學習之間有相互影響的關係。因此，本研究之研究目的為探討小五學童在教學前後之分數表徵紙筆測驗迷思概念的改變情形。

貳、文獻探討

一、數學表徵的意義

數學表徵乃是指學習者在學習數學知識的過程中，透過各種不同的方式(如具體物表徵、圖像表徵、口語表徵或抽象符號表徵等)內化知識，並藉由上述之方式呈現個體之想法與解法(NCTM, 2000)。基於此，本研究將「分數表徵」定義為「分數學習過程中，思考、解釋接收到的訊息，並用以表達思考結果的呈現，以及和他人溝通的重要工具。」

二、分數表徵的相關研究

許多學者(Brenner, et al., 1999; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001)指出，善用多樣化的表徵形式，例如圖形、操作具體物、或是寫出數學方程式...等，將有助於學生組織思考以及分析問題的呈現。Cramer, Post 和 delMas (2002)的研究指出將具體物的表徵模式融入教學中能夠有效的協助孩子發展正確的分數概念與比較分數大小之能力。Willis和Fuson(1988)教導國小二年級的學生利用圖形表徵的方式來解決加與減的文字問題，研究發現圖形表徵能夠提昇學生的數學學習表現。一般認為「圖形表徵」以及「具體物表徵」與被表徵的實物之間相似性較高，而且這兩種表徵形式的意義也較容易掌握 (蔣治邦，1994；許良榮，1996)，因而成為國小學習階段不可或缺的表徵形

式。許多研究與報告(Cramer, Post,& delMas, 2002; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001; NCTM, 2000)亦指出具體物的表徵以及圖形表徵是發展抽象符號表徵的橋樑。而根據研究者本身多年的教學經驗亦發現這兩者的重要性。

許多研究進一步(Brenner et al., 1999; Moss & Case, 1999; Empson, 2002; Cramer & Henry, 2002; Cramer et al., 2002)強調：教師應該在教學中多運用、融合不同的表徵型態。因為，一個數學概念有許多種的表徵方式，可以做為理解和傳達過程中的媒介，而這些表徵之間是相互關連，且可以加以轉換的。能夠利用多重表徵來表達同一個概念；或是在表徵之間轉譯；甚至懂得如何選擇適合的表徵來協助解題，都表示擁有更穩固的概念理解。教師如果能夠善用各種表徵方式，運用多重表徵融入分數教學，同時也鼓勵學生利用各種表徵方式表達自己的想法，對於分數學習的成效是很有幫助的。因此，本研究將從表徵的觀點，將具體物的表徵以及圖形表徵融入分數單元之教學中，以探究其成效。

參、研究方法

一、 研究法

本研究採量化和質化之並行方式，進行資料的收集、處理與分析，量化部份針對紙筆測驗的結果進行分析，而在質化情境中，採半結構式晤談法以深入了解受訪者在教學前後之分數概念的改變情形。

二、 研究樣本

本研究採便利取樣方式，選取研究者任教之五年某班學生為研究樣本，該班學生人數為 26 人，家長社經背景屬中下，教育程度以高中職居多，大多從事勞動工作。本研究先對任教班級之五年級學生共 26 名，以分數概念測驗卷施測，再依測驗分數分成高（前 33%）、中（34%~66%）、低（後 34%）三階段，並從各階段隨機挑選 3 位學生，共 9 人接受訪談。

三、研究工具

(一)前、後測驗之工具

本研究所使用的分數概念測驗卷的內容，主要依據九年一貫課程數學領域暫行綱要四年級能力指標中分數概念部分，並參考黃芳玉（2003）及洪素敏（2004）所設計的測驗題目，同時參考相關之研究文獻和課程中所蒐集的測驗問題加以修正。題目設計完成後，和數學教育專家、有經驗的教師共同檢視，使其具有專家效度。修訂後先進行預試，經過分析修訂，使其具有內容效度。在信度方面則是採用Cronbach α 係數來分析分數概念測驗的信度，其結果顯示Cronbach α 係數為.7806，顯示測驗工具有內部一致性。測驗內容共有24題，所涵蓋的內容如表1所列四類：A—瞭解分數詞的意義（六題）、B—比較分數的大小（四題）、C—分數的運算（十題）、D—等值分數（四題）。

表 1

分數概念測驗內容分析表

類別	分數概念	題數	題號
(A)	瞭解分數詞的意義	6	1, 7, 8, 13, 14, 15
(B)	比較分數的大小	4	4, 9, 10, 17
(C)	分數的運算	10	2, 5, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
(D)	等值分數	4	3, 6, 11, 16

藉由教學前之紙筆測驗結果，做為瞭解學生分數表徵迷思概念的情形並篩選訪談對象之依據，而教學後的紙筆測驗結果則當作師生教與學的評定資料之一，以瞭解學生學習後分數表徵的改變情形。

(二)訪談之工具

教學前、後之訪談問題相同，由於研究者為深入了解學生之分數概念的真正迷思原因為何，因此訪談問題之選取乃依據紙筆測驗之結果，選取答對率最差的後七題為訪談問題，以釐清學生真正的想法，確認受訪學生之迷思概念。

肆、研究結果與討論

一、紙筆測驗之結果

表2報告教學前、後紙筆測驗之t檢定結果，資料顯示： t 值 $=-12.183$ ， $\alpha=.01$ ，達顯著水準，顯示學生經過分數表徵教學後，分數表徵迷思概念已經有了明顯的改善。

表 2

教學前、後學生的紙筆測驗成績 T 檢定摘要表

	平均數	個數	標準差	標準誤	t 值	相關	顯著性
教學前測	11.9615	26	4.6689	.9156	-12.183	.826	.000
教學後測	18.6154	26	4.7672	.9349			

註 1： $\alpha=.01$ 註 2：測驗總分 $=24$

教學前、後樣本學生在分數表徵迷思概念的改變分述如下：

(一)單位量概念之改變

教學前，學生在比較分數大小時，會出現以分子或分母的數字大小來判定答案的情況，而沒有考慮到其間單位量不一致時，分數的比較是沒有意義的。此外，對於圖形表徵是以陰影和空白的二分法來區分分子或分母，並未考慮分子與分母的相互關係，先確認單位量後再考慮部分與全體之間關係以決定分數之大小。教學後，除了少數低程度學生以外，大多數學生比較分數時，能先確認單位量後再考慮部分與全體之間關係以決定分數之大小。

(二)等分概念之改變

教學前，學生在例行性的分數符號表徵題中能夠很容易地選出正確的答案，但是稍具變化的分數圖形表徵中，卻又忽略了等分的因素，而沒有注意到每一個分割是否相等。教學後，大部分學生能注意到分數的每一個分割是否相等，甚至清楚地以口語表徵回答「等分」、「平分」與「公平」，顯示學生的等分概念已有進步。

(三)將分數 $\frac{a}{b}$ 視為分數數線上的一個數值之改變

教學前，許多學生未將分數視為數線上的一個數，以致於無法在數線上找到正確的分數位置。因此在進行與分數相關問題的解題活動時，如處理離散量之分數問題、尋找等值分數或比較分數大小時，便有相關之錯誤想法產生。教學後，除了中高程度學生能瞭解並且將分數視為數線上的一個數以外，大部分低程度學生仍然無法把分數 $\frac{a}{b}$ 看成數線上的一個數值。

(四)分數詞的意義與內涵之改變

教學前，部分學生並未真正的了解分數詞的意義或具有上述的分數表徵迷思概念，因此當進入抽象符號的分數運算時，不知道分數也可以做合成與分解，而以錯誤的方式考慮分子與分母而將分子、分母當成個別的數字去進行運算或是直接將給定的關鍵數值做合成或分解，就會有錯誤的答案產生。教學後，大部分學生除了能同時考慮分數中分子與分母的關係以外，也能夠善用多重表徵進行分數的合成與分解，顯示讓學生能夠真正的釐清分數的內涵與意義，以及它與單位量的關係，有助於進行有意義的分數抽象符號運算。

二、訪談結果

表 3 呈現受訪學生在教學前、後分數表徵概念的轉變情形，分析如下：

表 3

九位受訪學生在前、後測訪談的答題情形

	高分組			中分組			低分組		
答對題數	小璉	小翰	小毅	小蓁	小寧	小雅	小宇	小盛	小昇
教學前	6	3	3	1	0	2	3	1	1
教學後	7	7	7	7	7	7	7	6	5

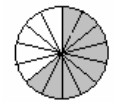
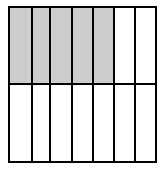
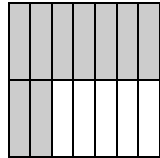
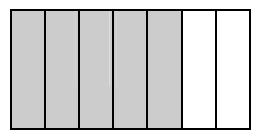
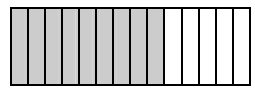
表 3 之結果顯示受訪學生在教學後皆有相當顯著之進步。為了進一步探討學生之改

變，以下分析受訪學生在第一題(表 4)與第三題(表五)之受訪結果為例：

(一)第一題：下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{9}{14}$ 哪一個分數比較大？

表 4

第一題 前後測答題結果比較

選項	1	2	3	*4
答題類型	$\frac{5}{7}$  $\frac{9}{14}$ 	 $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ 	 $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ 	$\frac{5}{7}$  $\frac{9}{14}$ 
前測選擇者	<u>小盛</u>	<u>小翰、小蓁、小寧、小雅</u>	<u>小毅、小昇</u>	<u>小宇、小璉</u>
後測選擇者		<u>小昇</u>		<u>小翰、小毅、小宇</u> <u>小盛、小蓁、小寧</u> <u>小璉、小雅</u>

教學前，受訪學生大致有以下二種迷思概念：

1. 比較大小時忽略單位量要一致：

部分學生並未發覺到不同的單位量是無法直接作比較，例如：小盛、小毅「這一個是 $\frac{5}{7}$ ，這一個是 $\frac{9}{14}$ 」；小昇「因為一個長條有 7 格，裡面有 5 格（等於 $\frac{5}{7}$ ）；另一個長條有 14 格，裡面有 9 格（等於 $\frac{9}{14}$ ）」，顯示小盛、小昇犯了當比較分數大小時，單位量要一致才有意義的迷思概念。

此外，有些學生會隨意更改單位量，只選擇他想看的部分，例如：小翰「我以為這邊上下都是 7 塊，這邊是 5 塊，只有看上面那一排」。

2. 等值分數概念不完備：

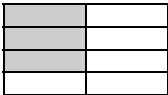
不知道當分母乘以 2 倍時，分子也要同時乘以 2，其分數值才不會改變，例如：小寧「這裡 $5/7$ ，1、2、3、4、5，這裡 $9/14$ ，有 1、2、...、8、9」；小蓁、小雅「因為 $5/7$ 這裡有 14 個和 $9/14$ 這裡也有 14 個，我以為一樣大了」，都顯示出不具備正確的等值分數概念。

但是教學後，原來提供錯誤選項的七位學生中有六位已修正原先錯誤的概念。例如小翰教學後已修正為「我看錯了，我以為上面也是一樣大，沒想到只有 5 塊。應該是圓形的才對，兩塊一等份， $5/7$ 這個剛好是七等份」；而小寧教學後修正為「這個 $5/7$ （指選項 2）切了 14 塊卻只有 5 塊，兩塊一份的話，應該是切了 14 塊有 10 塊。所以是（4）， $5/7$ 切了 14 塊有 10 塊」，顯示他們能注意到等值分數的概念：當分母乘以 2 倍時，分子也要同時乘以 2。僅剩下小昇依舊認為「上下都一樣大，這裡有 5 個，這裡有 9 個」，顯示小昇等值分數的概念不完備的情形仍然存在。

(二)第三題：下列哪一個圖形的斜線部分最能夠代表 $\frac{3}{4}$ 的意思？

表 5

第三題 前後測答題結果比較

選項	答題類型	前測選擇者	後測選擇者
1		<u>小翰</u>	
*2		<u>小毅</u> 、 <u>小璉</u>	<u>小翰</u> 、 <u>小毅</u> 、 <u>小宇</u> 、 <u>小盛</u> 、 <u>小昇</u> 、 <u>小蓁</u> 、 <u>小璉</u> 、 <u>小寧</u> 、 <u>小雅</u>
3		<u>小昇</u>	
4		<u>小宇</u> 、 <u>小盛</u> 、 <u>小蓁</u> 、 <u>小寧</u> 、 <u>小雅</u>	

教學前，受訪學生大致有以下兩種迷思概念：

1. 分數概念不清楚（對分數詞意義的不瞭解）：

有些學生仍會單就圖形的顏色定義分子或分母，例如：小翰「我看的時候有三角形四等份，三個白色一樣大的，就直接選 1 了」；選擇錯誤選項 (3) 的學生回答：小昇「這裡有四個白色，三個黑色的，我以為是 $\frac{3}{4}$ 」；選擇錯誤選項 (4) 的學生：小盛、小宇「因為一排有 4 塊，黑色的有三個都一樣」，顯示他們的分數概念不清楚。

2. 尚未具備等值分數的概念：

由於不瞭解等值分數的意義，因此當要求學生使用圖形表徵 $\frac{3}{4}$ 之等值分數時，部分受訪學生只能依分子之數值 (3) 選出選項出現陰影部份為三等份之圖形。例如：小蓁、小寧、小雅「我以為左右都是四塊，有三塊黑色」，這些皆顯示出不具有正確的等值分數概念。

而答對的學生是這樣解釋的：小毅、小璉「這裡總共有 12 塊，分成四份剛好每份有 3 塊，黑色有 9 塊剛好 3 份」，顯示兩位高分組學生在教學前已具有清楚的等分想法與等值分數概念。

教學後九位受訪學生均答對，原來答錯的學生想法已有了改變，例如：小宇「這裡可以分成四等份，黑色的剛好有三份」；小昇「我把它切成四等分，一份有 3 塊，黑色有三份，所以是 $\frac{3}{4}$ 」；小寧、小雅「因為這裡有 12 塊，它說要 $\frac{3}{4}$ ，所以就把它三個一份」，然後就有四份，黑色的有三份，所以是 $\frac{3}{4}$ 」，從訪談結果顯示學生除了能理解部分與全體單位量之間關係以外，也已具有等值分數的概念。

伍、結論

教學前、後的紙筆測驗成績經由 SPSS 之 t 檢定結果達顯著水準 ($\alpha < .01$)，此顯示將多重表徵方式融入分數教學活動後，學生的分數表徵迷思概念有顯著的改變。同時受訪學生在「比較分數大小時，忽略單位量要一致」、「對分數詞意義的不瞭解」以及「等值分數的概念」等方面有長足的進步，顯示將表徵融入教學中的確有助於學生分數概念之學習。因此，教師在進行分數教學時不應該只是偏重算則與解題程序，而是應該同時

強調學生的思考與理解能力之發展，並且能夠善用多重表徵的教學方式，像是圖表、具體物、抽象符號...等等，來幫助學生從各種不同的角度來意義化問題情境，以及建立各個表徵之間的連結。

同時，教師也應注意到學生雖然能夠答出正確答案，並不能代表他能夠真正理解題目的意義。教師可以多鼓勵學生去思考問題背後的真正涵意，並且引導學生能夠進一步去解釋與說明自己的做法與想法。如此一來，不僅幫助教師瞭解學生概念發展的情形，更能讓學生對問題「知其然，更深知其所以然」！

主要參考文獻

- 黃芳玉 (2003)。國小六年級學生數學表徵能力與計算能力之研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文（未出版）。
- Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541-547.
- Cramer K. A., Post T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

活動報馬仔

- 一、 2007/07/08~2007/07/13
31st International Group for the Psychology of Mathematics
Education(PME 31)
地點：Seoul, KOREA
- 二、 2007/09/07~2007/09/13
9th International Conference of The Mathematics Education into
the 21st Century Project
地點：Charlotte, North Carolina
- 三、 2007/11/15~2007/11/17
School Science and Mathematics Association Annual
Conventions
地點：Indianapolis, Indiana

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

(1) 期刊論文，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

(2) 圖書單行本，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw