

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第14期

台灣數學教育學會

2008年06月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers
2008 年 06 月 出版
NO.14 2008

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員 Editorial Panel

呂玉琴 國立台北教育大學數學教育研究所

李源順 台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微 國立花蓮教育大學數學系

金鈴 國立台灣師範大學數學系

梁淑坤 國立中山大學教育研究所

蔡文煥 國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通 國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗 國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 14 期

2008 年 06 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 14 期

2008 年 06 月

中國大陸與新加坡小學數學特級教師個案比較研究.....	1
范良火、沈丹丹	
七年級學生運用數常識（Number Sense）解路徑問題之探究.....	13
尤欣涵、楊德清	
台灣不同時期國小數學課程能力指標之比較分析.....	27
徐偉民、張敬苓	
活動報馬仔	48

ISSN 1815-6355

中國大陸與新加坡小學數學特級教師個案比較研究*

范良火¹、沈丹丹²

¹新加坡南洋理工大學國立教育學院、²浙江寧波大學教師教育學院

摘要

中國大陸和新加坡兩地數學特級教師作為教學實踐上的行家能手，他們對所教數學學科、對有效數學教學的認識，是否存在差異？在有效教學的具體經驗方面，有沒有可資相互借鑒和學習的地方？本文主要通過訪談中國大陸、新加坡的兩位小學數學特級教師，進行個案對比研究，發現兩者之間共性多於差異，認為共性可能來自於數學及數學教育本身的特點，而差異則來自兩國文化、教學理念，以及個人的教學經驗。

關鍵字：特級教師；教師專業發展；數學教育；有效教學；比較數學教育。

*本文提到的研究工作获宁波大学王宽诚幸福基金(K. C. Wong Magna Foundation) 的资助，谨致谢忱。 作者也非常感谢 Juliana Ng，林良富和龙妙云诸位老师的支持和幫助。

壹、研究的背景及問題

中國大陸的特級教師制度從 1978 年開始建立，新加坡的特級教師（英文為 Master Teacher）制度從 2001 年開始建立。兩者在作用與功能上有許多相似之處，他們都是學科教學的行家能手，是教師的業務典範，是教師專業發展體系中的最高追求，都需要引領其他教師的專業發展(陳俠，1985；Paine，1990；Singapore Ministry of Education，2001)。

新加坡的教師發展有三個系列，即領導系列（Leadership Track），教學系列（Teaching Track）和高級督學系列（Senior Specialist Track）。在領導系列中可以從一般教師到年級/學科組長（level head/subject head），部主任（Head of Department, 簡稱 HOD），副校長，到校長，往上再到校群督導（Cluster Superintendent），副署長（Deputy Director），署長（Director），最後到教育部提學司（Director-General of Education）；教學系列中可以從一般教師，到高級教師（Senior Teacher），再到特級教師（Master Teacher, 分兩級）；高級督學系列可從一般行政事務員（Officer），高級行政事務員（Senior Officer），到專科督學（Curriculum Specialist），高級專科督學（Senior Curriculum Specialist），最後到首席專科督學（Principal Curriculum Specialist）。這三個系列可以根據自己的要求互相轉換到相應的級別，但一個人只能屬於一個系列。

中國大陸的特級教師更多的是一種榮譽，享受政府津貼，雖然數額不大，但卻是終身制的，它既不納入職稱系列，也不納入行政系列。對評選和數量有嚴格的控制和要求，如浙江省就把特級教師的數量限制在教師總數的千分之三以內。評選更是層層選拔，從學校到各縣市區、到地區、直至省裏的評比，這些教師不僅要求是教學業務上的拔尖人物，還應是育人的典範，在參評時就已在當地獲得相當認可，再通過論文答辯（理論研究水準）和課堂教學考核（教學水準）評選出來的，論文主要看數量（五年內發多少篇）和品質（發表在什麼級別的刊物或通過專家鑒定達到什麼水準），課堂教學有時是實際上課，有時是錄影評比等。各省的評選方法也不同，有的地方還形成了一個新的評選系列，這是與職稱不同的系列，可稱之謂榮譽系列，分別從教壇新秀的評比，到學科骨幹的評比，到各地市的名師評選，再到特級教師。如果把中國大陸的教師發展系列也像新加坡那樣分成三個系列，那就是行政系列、職稱系列和榮譽系列，但它們可以交叉，即

同一個人可以同時佔有三個系列中的不同級別。

從教學業務與功能角度來看，我們認為新加坡的 Master Teacher 與中國大陸的特級教師是比較一致的，而且中文作為新加坡的四種官方語言之一，Master Teacher 的中文翻譯在新加坡即是特級教師。他們都體現了教師專業發展的最高層次，值得深入研究。同樣是教學實踐上的行家能手，他們對所教數學學科、對有效教學的認識，以及有效教學的具體經驗等，有什麼共性與差異？通過比較分析他們的觀點以及這些觀點背後的教學理念和文化因素，能給我們的數學教學與數學教學研究有怎樣的啟示？本文主要通過深入訪談中國大陸、新加坡的兩位小學數學特級教師，進行個案對比研究，希望能從一個角度初步探討和研究上述問題。

貳、研究方法

一、研究物件的選擇

截止到 2007 年 12 月底，新加坡的特級教師共有 19 名，其中小學數學特級教師只有一名（女，以下簡稱 S）。該名教師自然就成為我們研究的物件。與此相對應，我們也選擇了中國大陸的一位小學數學特級教師（男，以下簡稱 C）。

這兩位特級教師的共同特點：初始學歷都是相當於中等師範學校畢業，都從教 20 年以上，都是從小學數學課堂實踐中產生的行家能手，對小學數學教學與數學學科都有自己的思考，並已把他們豐富的教學經驗總結出來，出版了相應的教學研究著作。他們都在小學數學教學界有較高的聲望，在特級教師這個特殊的群體中具有一定的代表性。

二、研究方法與過程

我們事先設計了訪談提綱，通過電子郵件發給他們，再約時間進行訪談，並對訪談進行了錄音，實錄成文本後又請兩位元特級教師進行了確認。為了盡可能地消除語言對思想表達的影響以進一步確保研究材料的準確性，在訪談 S 老師時，我們還請了新加坡一所小學的數學部主任作為翻譯。

訪談錄音後整理的文本資料共兩萬多字，按訪談提綱分數學教師對數學學科的認識以及對學生學習數學目的性的認識，對有效教學的認識，以及有效教學的

具體經驗，根據自己專業成長的體會談教師專業發展的因素與途徑等幾個方面。本文僅對數學學科的認識及有效教學的有關問題進行討論(有關訪談問題提綱見附錄)，並選擇了大陸和新加坡共有的一些數學教學的內容，如“三角形的內角和”，進行具體方法與教學設計上的比較與分析，以進一步瞭解隱含在教學設計背後的教學理念和文化因素。

參、發現與比較

一、對數學學科的認識以及對學生學習數學目的性的認識基本一致

就如前面所述，兩位教師走入教學崗位之前的初始學歷都是相當於中等師範學校畢業，因此從專業教育背景分析，他們可能直接接觸高等數學的機會相對較少，但訪談中他們還是用樸素的語言說明了數學是經驗科學與演繹科學的辯證統一。兩位特級教師都認為數學是一門揭示關係、形成方法、開發思維、並與人們的日常生活有密切聯繫的一門學科。其中 C 老師還認為“不同教師對數學的不同認識，會直接影響這個教師的課堂教學”。關於對學生學習數學的目的性認識，兩位元老師的認識也基本一致。

S：學習數學，不僅能夠幫助我們瞭解世界，解開思維中的問題，解決生活中的許多實際問題，還能學會用數學的思維認識這個世界，接受大自然的挑戰，對大腦的發育與思維的開發也很重要。

C：學生學習數學的最終目的就像學習語文、科學一樣，首先是作為工具來學習的，我們的生活、勞動、工作都離不開數學，學好數學就掌握了一種工具。其次，數學作為一門獨立的學科，具有高度抽象性，是培養學生高水準思維的重要載體。學會思維、學會從數學的角度思考，就為學習其他學科提供了基礎性的保障。如學會了數學建模的方法，就可推廣到其他學科，物理中有模型，經濟中有模型，所以，對人來說，學習數學主要還是學習思維方式，學習數學的基礎知識和基本技能，學習數學的思想方法和思考經驗……如果把數學課上成了人文課，那是對數學本質的偏離。

顯然，兩位元特級教師的這些共同認識，反映了數學教學之共性，就如吳曉紅、鄭毓信（2007）所指出的，“更一般地，這種共性很大程度上是由數學學科本身的特點決定的”。同時，這種共性也為我們進一步研究奠定了基礎。

二、對有效教學的認識一致，教學理念有差異

最近幾年來，教育的有效性是很多教育研究者和教師十分關注的一個問題，尤其在中國大陸作為一個熱點話題有不少討論。就如有學者所指出的，在教學上，“所謂‘有效’，主要是指通過教師在一段時間的教學後，學生所獲得的具體進步或發展”（鐘啟泉、崔允漭、張華，2001）。而“有效教學”，歸根結底離不開有效地促進學生的全面發展，而學生的全面發展又是以有效地改善學生的學習方式和提升教師的專業水準為前提的（鐘啟泉，2007）。

談到對有效教學的認識，本研究中的兩位特級教師都一致認為：“有效教學意味著有效學習”。我們來看兩位老師是如何具體解釋有效學習的。

S：只有通過用手觸摸，用眼看到，用他們的五官去觸摸瞭解世界，才能啟發學生對世界的敏感度，加深對世界的認識，所以教師要創造機會，讓學生去瞭解周圍的世界。同時要學於致用，讓他們學習的知識在生活中應用到，才會使學習有意義，才會有好的學習效果。

而S老師的經驗：要實施有效教學，教師一是要把自己作為學習者，想著可以從學生那兒學到很多東西，以激發自己對課堂和學習內容的興趣，保持對課堂教學的熱情，二是要時刻想著，我們面對的是人而不僅是數學，三是要讓學生有安全感，才能使課堂教學有效。

C：要使學習有效，有三條標準：一是基於學生的經驗。每個有經驗的教師要使教學有效首先會關注學生的認識背景……。

二是關注學生的思考過程……。我認為教學的首要任務是要讓學生學會自主學習，作為基礎教育的數學，不能因為學生積澱少，就認為學生不可能自主探究，事實上，年幼的孩子恰恰更具探究的動力，

關鍵在於我們教師能不能為學生提供足夠的時間和機會讓學生去思考、去探究。有效的學習是需要一定的思維含量的。

三是組織有效的活動，包括外在活動形式的有效性，以及內在活動內容的有效性。如國外用得比較多的“圍圈”教學（學生圍繞在教師周圍開展教學活動），就是通過外在組織形式的變化促進活動的有效性，而教學材料的組織，不同材料的呈現方式以及邏輯順序的安排則是活動是否有效的關鍵要素。學數學就像下圍棋，同樣三步，次序不同，效果就會大大不同。所以，要讓學生的學習有效我與大家一起分享的經驗主要是三條：基於學生經驗，關注學生思考，重視活動方式。

可見，優秀教師的一個共同的特徵是關注學生，但進一步分析，兩者關注的角度是有差異的。新加坡的 S 老師是從與學生交朋友、向學生學習的角度來關注學生、分享知識，而大陸的 C 老師是從如何合理組織教學活動，讓學生主動探索，以提高學生的學習效率來關注學生。S 老師重在考慮學生如何學，而 C 老師重在關注如何教才能促進學生的學。“以學促學”，或是“以教促學”，反映出他們教學理念上的差異。

三、對有效教學的具體經驗中有文化上的差異

為了進一步瞭解不同文化、不同的教學理念對教學設計可能產生的影響，我們請兩位元特級教師對同一內容“三角形的內角和”，分別根據自己的教學經驗談了他們的不同教學設計。S 老師的教學設計如下：

S: 教學這個內容時，我不會直接講的，因為學生開始會認為大的三角形角的和會大一點，所以我一般會先讓學生自己畫三個不同的三角形，可以是大小不同，可以是形狀不同，等等，這裏教師自己不畫的原因是不能讓學生有這個誤解，就是只有老師畫的三角形內角和才是 180 度。學生一人畫 3 個，一個小組四個人就有十幾個三角形了，然後叫大家各自測量，組內同學分享測量的成果，結果發現他們畫的三角形不管大小、胖瘦，三個角的和都在 178-182 之間。有了這樣的體驗後，教師再告訴學生，經過數學家的證明，任何一個三角形的內角

和是 180 度，學生就會比較容易接受，而且不容易忘記。

由於學生已經學習了平角的概念，知道直線是 180 度，接著我會讓學生剪一剪，拼一拼：先讓學生給三角形的三個角塗上不同的顏色，這很重要，否則學生剪下來後就要找不到三角形原來的角是哪幾個，就拼不出 180 度了。同時，讓學生把自己剪好、拼好的三個角組成的平角展示出來，這樣學習學生比較喜歡，因為是學生自己發現的。

最後我會讓學生用不同長度的小木棒做三角形，把三角形的穩定性與內角和不變聯繫起來，並與四邊形的不穩定性進行比較，知道生活中常在長方形建築架上斜釘一根木條的數學道理。學生學了一些知識後，教師最好能把生活中的知識搬出來進行聯繫和對比，教學效果比較好。

C 老師提供的教學設計分為四個教學環節。

C：我一般會按以下四個教學環節組織教學活動：1、創設情景，初步感知；2、探究與驗證；3、應用；4、拓展。

首先要創設情景，讓學生感知三角形的內角和是 180 度。這裏由於學生的情況不同、起點不同可有不同的設計。如果學生起點低，我一般會讓學生經歷量的過程，如先叫每個學生任意畫一個三角形，量一量，再讓學生在小組內交流，然後抽一些同學“彙報”量的結果，如“我畫了一個直角（或一個鈍角、一個銳角三角形），它的內角和是 178 度”等等，一般都會在 178 到 182 度之間。在彙報的過程中，學生自己會思考：“怎麼都是在 180 度左右？”，“學起於思”嘛。這時，再叫其他同學量一量，在組內說一說，這樣從個別發言到小組交流，再到全班交流，學生就有了初步的感知。

如果學生的起點高，就可直接問難一點的問題，如“在我們學過的三角形中有沒有兩個角是直角的三角形？”通過問題直接引發學生思考，學生可能會用小棒操作，結果發現有兩個直角不能形成三角形，再組織探究與驗證。也有可能出現個別學生知道答案的情況，但他們一般都是只知結果，不知過程，這時可直接讓學生用多種方法，如量

一量、拼一拼、折一折，形成一種結論，這樣的探究活動，比前面兩個更開放。

通常的“驗證”都是通過折紙，因為學生在角的分類時已經知道平角是 180 度，這樣當折疊後三個角拼成一條直線時，學生自己會得出結論。在應用時，要注意變式的訓練，如求特殊三角形的內角和，知道（一個三角形的）兩個角、求另一個角等。如果學生基礎好，在學習三角形的內角和後，可叫學生繼續探究四邊形、五邊形、甚至多邊形的內角和。

總之，同一個教學內容，由於教師不同、班級不同，就會有不同的教學設計。教學活動能否成功，最終還是取決於教師的教學設計。

上述的訪談結果說明，這兩位特級教師都十分注重讓學生在實踐中發現數學問題（都從量角開始感知），並注意引導學生自己去驗證，都注意到了數學的應用。

林夏水（2002）曾指出，“從事數學工作的人，如果認為數學是一門演繹的科學，那麼他就不會去關心實踐中提出的數學問題，而專注數學的邏輯問題；反之，如果認為數學是一門經驗的科學，他就不會去關注數學的邏輯問題，而關心實踐提出的數學問題；如果認為數學是一門經驗性與演繹性辯證統一的科學，他就會既關心實踐提出的數學問題又關心數學的邏輯問題”。

由於兩位特級教師對數學與數學教育有共同的認識，所以，在他們的具體教學設計中也有許多共性，體現了從“感知——驗證——應用”的基本過程。儘管從嚴格意義上說，兩位老師所用的驗證都不是數學中的演繹與證明，但他們都力求體現數學是經驗性和演繹性的辯證統一的思想。如 S 老師通過向學生說明“數學家”已經證明（事實上，他們到了中學就能證明），來強調數學是需要證明的。而 C 老師借助把三角形的內角和推廣到四邊形、五邊形、直至多邊形讓學生體會數學的知識體系。

同時，兩位特級教師都十分關注學生的知識基礎，但 S 老師以其豐富的教學經驗，注意關注學生可能有的想法和錯誤，如讓每個學生任意畫三個不同的三角形，避免學生產生“這只是一個特例”或“只有老師畫的三角形的內角和才是 180 度”的誤解，又如在剪、拼前讓學生給三個角塗上顏色，不僅能在展示中因色彩

鮮豔而吸引學生的注意力，更可防止學生因找不到原來的三個角，而失去驗證的意義，而這也正是普通老師不太容易關注到的。

C 老師則十分重視針對不同學生設計不同的教學起點，關注教學設計的有效性與課堂結構的完整性和規範性。

為了解釋和驗證新加坡與中國大陸在課堂結構上的差異，作者分別看了兩位元老師的課堂錄影（S 老師的是“探究怎樣的六個面能圍成正方體和長方體”，C 的是“圓柱體的認識”），並到新加坡有關小學共聽了 8 位不同老師所教的 42 節數學課，訪問了在新加坡國立教育學院任教的兩位小學數學學科教學法專家。由此結合作者對中國大陸小學數學課堂教學多年的聽課和親自授課實踐，發現新加坡與中國大陸在課堂結構上確有明顯的差異。

中國大陸的課堂教學一般是 40 分鐘（也有 30 分鐘、45 分鐘、甚至 50 分鐘的），每節中間休息 10 分，並按新授課、練習課、復習課等六種課型組織安排教學活動，不同課型有不同的任務。對此，C 老師有生動的比喻，他把新授課比做“是從河蚌中掏珍珠”，練習課比做“把掏出來的珍珠擦亮”，復習課是“把這些珍珠串成了項鏈”，而最近新課程改革中提倡的綜合實踐活動課則“相當於把項鏈賣出去”，足見中國大陸一線教師對課堂結構的重視。

張奠宙和馬岷興（2001）曾分析說，大陸課堂結構的這些基本要求從前蘇聯傳入一直沿用至今，雖已歷經多次改革（目前的新課程改革認為是第八次課改），但仍未脫離前蘇聯教育家凱洛夫“五段式”--復習、導入、講授（新課）、鞏固、作業--的基本框架。這從另一個角度思考，說明這種課堂結構具有一定的有效性，而且結構本身的內涵在不斷的豐富與發展。如 C 老師把原來的“復習引入”改為“創設情景，初步感知”，把原來的“新授”改為“探究與驗證”，把原來的“鞏固”，改為“應用與拓展”等，體現了作為特級教師對原有課堂結構在繼承基礎上的創新。

新加坡的課堂結構多是根據學生的實際情況安排教學環節。新加坡教師有時會在一節課 30 分鐘裏，把 20 分鐘都用於復習或訂正作業，而把剩下的 10 分鐘用於講授新知識，有時會連上兩節一個小時，半小時講解或討論，半小時做作業。有時會整堂課都講例題，且有五、六個例題，結束後也很少有小結，而這在中國大陸都認為是不規範的。新加坡沒有我們平常理解的一節課的概念，一般每天從上午 7 點半到下午 1 點半連續不斷地上課，下午放學或安排其他課外活動，每節

課中間沒有休息（除了九節課中間的半小時休息時間），這可能與新加坡的歷史和文化背景有關。

新加坡是一個多元文化國家，人口中大約有 80% 是華人，但除了中國傳統文化，在最近幾十年的現代化過程中，在很多方面受到了英、美等西方國家的巨大影響，這與新加坡過去很長時間裏作為英國的一個殖民地的歷史有關。相應地，在教育上新加坡也無可避免地受到西方的影響，與西方國家（尤其是英國）一樣，更強調學生個性的發展（例如見 Fan & Zhu, 2007）。這些教學理念上的差異，或者說是文化上的差異，形成了課堂教學設計上的差異，更確切地說是形成了對課堂教學理解上的差異。中國大陸的教師更多的會考慮如何設計教學過程使教學有效，有些設計可謂到了經典的程度，總之是想盡一切辦法完成教學任務。而新加坡的教師更多的會考慮學生已經掌握了多少，還能學習多少，順著學生的學習進度安排教學進程。但值得指出的是，他們都遵循了數學教學的一般規律：“感知——抽象——理解——應用”，數學教學效果都令世界各國矚目（關於中國大陸和新加坡學生在國際大型數學成績比較研究中的表現，可見範良火, 2005）。

肆、結論和啟示

通過對這兩位中國大陸和新加坡的小學數學特級教師對數學、數學教育、有效教學的觀點以及具體的教學設計進行比較分析，我們發現兩者之間的共性多於差異，認為共性可能來自於數學及數學教育本身的特點，而差異則來自兩國的文化、教學理念，以及個人的教學經驗。

一、認識上共性多於差異

在對數學學科與有效教學的認識上，兩位元特級教師的觀點趨於一致，都認為數學是經驗性與演繹性的辨證統一，有效教學意味著有效學習。都注意關注學生，以促進學生的全面發展作為教學是否有效的主要衡量標準。這從一個側面反映隨著國際交流的不斷加強，以及數學作為“最具公共語言的一門學科”，使“各國數學及數學教育具有很大的的一致性”（吳曉紅、鄭毓信，2007）。這種共性為廣泛開展比較研究奠定了基礎。

張奠宙曾指出，“數學教育研究的目的，是揭示數學教育的基本原理、特有

規律，把隱藏在大量實踐背後的因果線索理清楚，並上升到理論”（轉引自範良火，2003）。本文所揭示的中國大陸和新加坡的特級教師對數學與數學教育、有效教學的一致認識，從一個側面說明數學教學要重視經驗性與演繹性的辨證統一，不能搞極端化，也就是說，數學教育不僅要關注數學自身的邏輯推演過程，也要合理地幫助學生經歷獲得數學知識結論的具體經驗，在經驗的基礎上發展和形成關於數學的結構和體系，而在演繹的過程中也應注意對所得到的數學知識結論的解釋與應用，這可能是數學教育改革應遵循的基本原理和特有規律之一。

二、教學設計上的差異受各國文化、教學理念與個人教學經驗的影響

在具體內容的教學設計與教學方法上，這兩位中國大陸和新加坡的數學特級教師也有許多共性，但受各自不同的文化、教學理念與個人教學經驗的影響，也存在明顯的差異。新加坡多是根據學生的實際情況自由地安排教學環節，“以學促學”，而中國大陸則是根據教學目的規範性地組織課堂教學，“以教促學”。我們認為，這些差異各有所長，但其最終目的都是為了促進學生的有效學習，值得互相借鑒和學習。

最後，我們要指出，本文所作的僅僅是一個初步的探討。特級教師作為從教學實踐中產生的典範，具有典型性和代表性，他們擁有的豐富學科教學經驗是研究數學教育的豐富資源。對他們的研究可為國際數學教育比較研究提供一個新的視角，對於數學教育理論尤其是教師專業發展的研究具有重要價值，值得數學教育工作者進一步關心和重視。

參考文獻

- 陳俠（1985）。特級教師。載《中國大百科全書（教育）》。北京：中國大百科全書出版社。頁368。
- 吳曉紅，鄭毓信（2007）。從質疑到釋疑：數學教育國際比較可比性解讀。《比較教育研究》，8，65-69。
- 張奠宙（2003）。《數學教育經緯》。南京：江蘇教育出版社。頁269。
- 林夏水（2002）。數學本質·認識論·數學觀——簡評“對數學本質的認識”。《數學教育學報》，3，26-29。

範良火(2003)。《教師教學知識發展研究》。上海：華東師範大學出版社。頁3。

範良火(2005)。《華人如何學數學》。南京：江蘇教育出版社。頁3-23。

鐘啟泉、崔允潔、張華（主編）（2001）。《為了中華民族的復興，為了每位學生的發展——基礎教育課程改革綱要（試行）解讀》。上海：華東師範大學出版社。

鐘啟泉（2007）。“有效教學”研究的價值。《教育研究》，6，31-35。

Fan, L., & Zhu, Y. (2007)。From convergence to divergence: The development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 491-501.

Paine, L. W. (1990)。The Teacher as Virtuoso: A Chinese model for teaching.

Teachers College Record, 92(1), 49-81

Singapore Ministry of Education(2001)。More career advancement opportunities for teachers。Press Release 29 Sept. 2001。Retrieved 19 May 2008, from <http://www.moe.gov.sg/media/press/2001/pr26092001.htm>

附錄（訪談提綱）：

1、請你談談對數學學科的認識，你認為學生學習數學最終的目的是什麼？

2、你認為怎樣的教學是有效的？作為小學數學特級教師，有什麼經驗與大家一起分享嗎？如讓學生探究三角形的內角和是 180 度，你認為應怎樣設計教學過程，才能促進學生數學思維的發展？教學 100 以內數的乘法口算呢？能具體談談嗎？

3、你認為過去的師資培訓與現在的教師教育有什麼區別？請你根據自己的成長經歷談談教師專業發展的要素與途徑。

4、請談談特級教師的作用與功能、困難與挑戰。

七年級學生運用數常識 (Number Sense) 解路徑問題 之探究

尤欣涵¹、楊德清²

¹國立嘉義大學數學教育研究所、²國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本研究之主要目的是透過數常識測驗卷了解現今七年級學生運用數常識解路徑問題的表現。研究者針對彰化市某國中七年級 30 名學生進行數常識活動，結果顯示，學生在數常識測驗卷第一部分答題正確率不到五成，而第二部份更只有一名學生正確作答。分析學生在第一部份之解題發現，對於已知的數據，學生較能藉由計算直接求出答案，而非計算式的判斷題目則較難正確作答，且對於單位量感與題目間的概念關係也難以進一步進行思考，而在第二部份之解題上，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響，顯示學生在運用數常識的能力上仍顯不足。

關鍵詞：七年級、路徑問題、數常識

壹、前言

日常生活中，數字與我們息息相關，舉凡食、衣、住、行、育、樂，無一不與數字有關。澳洲教育研究中心 (Australian Education Council, 簡稱AEC, 1991) 以及美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱NCTM, 1989) 皆認為，數常識教學為中小學數學教育所不可缺少的主題。NCTM (2000) 所出版的「學校數學課程原則標準」 (The Principles and Standards for School Mathematics) 中強調了發展數常識為中小學數學課程的主要目的，並闡明「本標準之中心旨在發展兒童數常識的能力」 (p.32)，由此可知，國際間已逐漸重視數常識的理念與發展，國內對數常識的研究 (楊德清, 2002) 更是投入了大量的關注與重視。數常識不僅成為近代數學中的後起新思潮，亦成為各國國民義務教育中的主要目標之一 (Berch, 2005; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)。

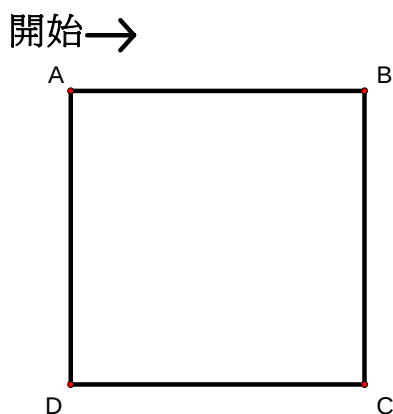
然而，受到考試文化的影響，傳統教師的教學與學生的學習淪為機械性的了解，學生的思考模式也缺乏靈活性與發展性 (Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998)。縱使學生在成績上獲得較高的分數，其邏輯思考、概念理解甚至對於現實生活的運用卻顯不足。在楊德清 (2000) 的研究中發現我國數學教育長期偏重訓練學生計算能力、計算速度及技巧，傳統算則的解題模式深深影響學生的思考方式，缺乏數常識的表現。當要求學生由小至大排序 0.4899 , $\frac{16}{25}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{19}{18}$, 0.91 時，竟有學生將所有的數轉成分數 $\frac{4899}{10000}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{19}{18}$, $\frac{91}{100}$ ，然後企圖將所有分數通分，找出同分母以判斷分數大小，學生缺乏對數字有意義的了解，便將自己困住，無法有效解題。另外，要求學生找出 $534.6 \times 0.545 = 291357$ 的小數點的位置時，沒有學生可以使用數常識概念找出答案，他們認為被乘數有1位小數，乘數有3位小數，所以答案要有4位小數為29.1357。由此可見，學生可能因過去學校僵化式的學習方式，而只會運用統一的標準算則，也逐漸失去思考的能力，並失去對數字真正的認知理解，也大大減低了學生的數常識能力。

而研究者觀察現今教材在路徑問題上的教學活動，其佈題方式多為直線式的 (例如：請在線段上畫出 $\frac{4}{5}$ 所在的位置)，學生在路徑問題上也習慣用平分線段的方式進行表徵。有鑑於此，研究者欲透過不同的佈題方式來設計數常識測驗卷以了解現今七年級學生在數常識方面上的表現為何並分析學生的數常識表現。

貳、數常識測驗活動

研究者針對彰化市某國中七年級 30 名學生進行數常識測驗活動，學生在此之前已學習過整數、分數與小數之概念與其乘除性質，數常識測驗時間為 40 分鐘，測驗後，研究者再依數常識測驗卷進行量化與質化的分析。量的部份，研究者針對學生每題的作答分為正確與錯誤兩部分，以了解學生於各題的答題正確率為何；質的部份，研究者針對學生的數常識測驗卷活動紀錄進行編碼與轉譯，並從中分析學生在解題歷程上所使用的策略為何。數常識測驗卷參考 Number Sense: Simple Effective Number Sense Experience (McIntosh, Reys & Reys, 1997) 所設計而成：

第一部分：以下問題皆由 A 點開始，並以順時針的方向進行。



1. 你會在哪裡，當……

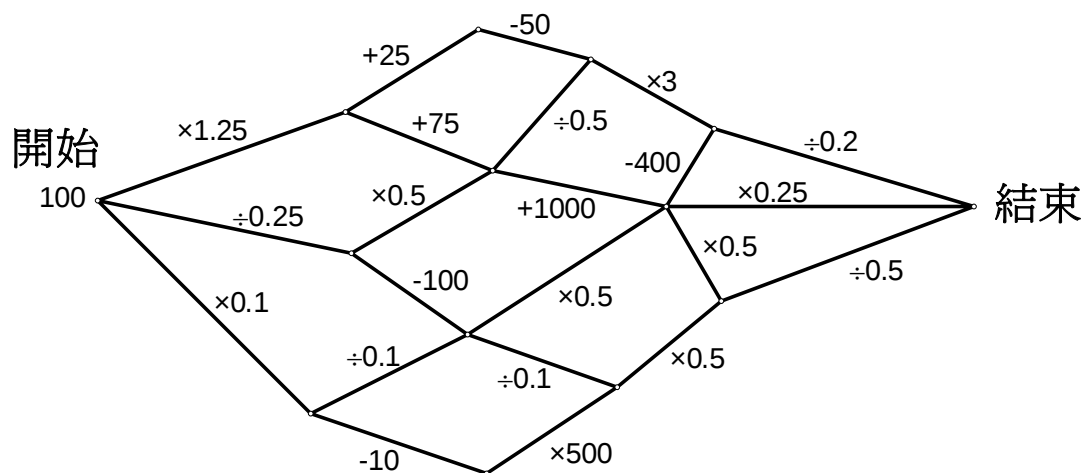
- 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 時？
- 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。
- 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{5}$ 時？請將此點標上 X。
- 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。
- 你在正方形全路徑的 $\frac{2}{3}$ 時？請將此點標上 Z。

2. 如果這個正方形的全路徑長為 100 公尺

a. 則正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 會是多長呢？

b. 如果你從 A 點順時針行走了 80 公尺，你的位置將在哪兩個點之間呢？

第二部分：請判斷走哪條路徑可以得到最大的值。（請由左至右不回頭走）



我的思考過程與想法：

參、學生整體表現

在 30 位學生的數常識測驗卷上，各部份及各小題的答題狀況如表 1 所示：

表 1：數常識測驗卷學生作答情形

題目	答對人數	答錯人數	答對率(%)
第一部份	14	16	46.7
第 1 題	14	16	46.7
1a	22	8	73.3
1b	19	11	63.3
1c	19	11	63.3
1d	16	14	53.3
1e	15	15	50.0
第 2 題	22	8	73.3
2a	26	4	86.7
2b	23	7	76.7
第二部份	1	29	3.3

學生整體的作答情形可分為兩部分，其中，第一部分的學生不到半數答題正確，而第二部份僅有一名學生正確作答。在第一部分的題目中，分為 1、2 兩題，學生在第 2 題的表現優於第 1 題。在第一題的各小題中，以 a 小題有最高的答對率，依次為 b 與 c、d、e；而在第 2 題的部份，a 小題答對率高於 b 小題。

進一步分析第一部份的題目，第 1 題學生需在正方形全路徑上標示各不同分量的位置，在 a 小題時，學生易察覺全路徑的 $\frac{1}{4}$ 即為 B 點所在的位置，但單位量變化後，學生較難判斷正確的位置，而後數據變為單位量的倍數，難度更加增高，學生的答對率也因此下降，但 1e 題學生的表現仍有 50% 的答對率。

第 2 題試題為告知全路徑長，學生需求出全路徑的 $\frac{3}{5}$ 為多長，值得注意的是，此題竟有 86.7% 的答對率，學生在已知路徑長的情境下，都經由計算直接求出答案，反觀第 1 題的 d 小題，學生只有 53.3% 的答對率，顯示學生對於全路徑的 $\frac{3}{5}$ 所在的位置並不清楚，但在數據已知的狀況下，學生可以藉由計算直接算出答案，卻不能因此反思而找出全路徑的 $\frac{3}{5}$ 所在的位置。在 b 部分學生的答對率也比第一題各小題高，學生一樣經由計算求出答案，大部分學生將 100 先分成 4 等分，算出每一等分的長度為 25 公尺，再進一步判斷 80 公尺為三等份後再多出 5 公尺，因此答出 D 與 A 點之間。由 1、2 小題之資料分析，研究者發現學生在有數據操作時較能正確作答，也因為題目的設計，學生對於圖形上的長度單位量感便受圖形四邊所影響，而由學生的答題表現也可看出學生對於數常識的概念仍顯不足。

第二部份，學生須找出一條使得數據結果最大的路徑。在此部份，僅有一名學生正確作答，研究者分析學生的工作單發現，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響；因此，學生在此題一開始便選擇 $\div 0.25$ 而後 -100 、 $\div 0.1$ 、 $\times 0.5$ 最後 $\div 0.5$ 。而唯一正確的學生，便是能考慮其前後碰到的數據所造成的影響，因此能夠正確作答。

肆、學生數常識測驗卷分析

研究者進一步就學生在數常識測驗卷第一、二部份學生的表現進行分析：

數常識不足之學生在第一部分表現分析

1. 由已知圖形與數據直接進行運算：學生 S1 在 1.1b 與 1.1d 的題目中，受到題目四邊形之影響，將正方形全路徑視為 $\frac{1}{4}$ ，在求正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時，學生將 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ ，但類似的題目 1d，學生卻使用 $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ ，也未能在圖上標示出所求得的数据位置，研究者分析，學生對於路徑之部分與整體概念仍不清楚，故由已知數據單純進行運算。

b. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$$

圖 1：S1 學生工作單 1.1b

d. 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

圖 2：S1 學生工作單 1.1d

2. 嘗試將正方形全路徑視為一條直線：學生 S2 嘗試用一條數線代表正方形，再依據題目要求將此數線分成三或四等分。此名學生在測驗卷上原畫有一條數線，並依據題目要求畫上各分量所在的位置，但學生最後無法由數線所在的位置轉換成正方形全路徑的位置，因此產生錯誤而將數線擦掉。研究者分析此名學生對於直線的各分量能進行畫記，但對於題目所給予的正方形全路徑，可能因為圖形已被劃分成四等分，因此對於三等分或五等分的畫記，學生便受此影響而未能順利標出正確位置。

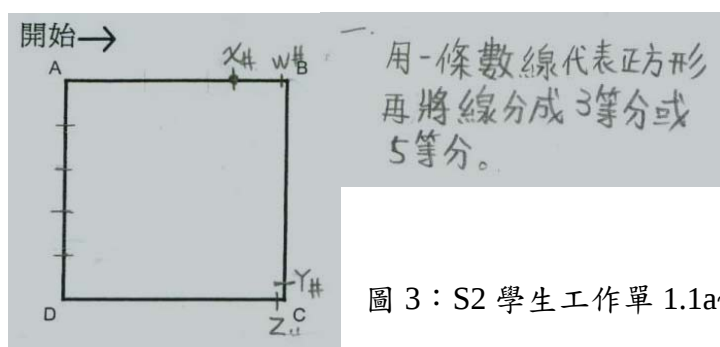


圖 3：S2 學生工作單 1.1a~e

3. 丈量長度直接計算：此名學生未做任何估測，直接丈量測驗卷上的正方形長度，測得邊長為 3.8，並依此數據算出各小題欲求的路徑長，再藉

由尺丈量出各小題路徑長所在的位置。此方式顯示學生完全依賴實際的數據進行判斷，未能由已知圖形或各部份單位量進行估測。

1. 你會在這裡，當.....

a. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 時？
 $15.2 \div 3 = 5.07$

b. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。
 $3.8 \times 4 = 15.2 \div 5 = 3.04$

c. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{5}$ 時？請將此點標上 X。
 $3.04 \times 3 = 9.12$

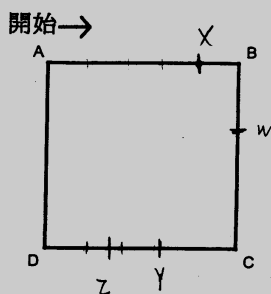
d. 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。
 $5.07 \times 2 = 10.14$ $3.8 \div 3 = 1.27 \times 2 = 2.54$

e. 你在正方形全路徑的 $\frac{2}{3}$ 時？請將此點標上 Z。

圖 4：S3 學生工作單 1.1a~e

具數常識之學生在第一部分表現分析

第一部分：以下問題皆由 A 點開始，並以順時針的方向進行。



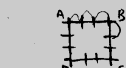
1. 你會在這裡，當.....

a. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 時？

A: B 點
 正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ = 正方形的邊長
 從 A 開始到下一個直角 (B 點)

b. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。

$\{4.3\} = 12$ $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$



c. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{5}$ 時？請將此點標上 X。

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$



d. 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。

$\frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{12}{20} - \frac{10}{20} = \frac{2}{20}$



e. 你在正方形全路徑的 $\frac{2}{3}$ 時？請將此點標上 Z。



$\frac{1}{3} = \frac{8}{12}$

2. 如果這個正方形的全路徑長為 100 公尺

a. 則正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 會是多長呢？

$100 \times \frac{3}{5} = 60$

A: 60m

b. 如果你從 A 點順時針行走了 80 公尺，你的位置將在哪兩個點之間呢？

$100 \div 4 = 25$

$80 \div 25 = 3 \dots 5$

A: D 和 A 之間

圖 5：S4 學生工作單 1.1a~e、1.2a~b

1. **由圖形的邊長判斷單位量：**此名學生由圖形為正方形進而判斷出正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 即為一個邊長所代表的距離。
2. **由圖形邊數與欲分割的單位量求出分割數：**在 b 小題中，學生由圖形邊數（4）與欲分割的單位量（3）求出圖形的分割數（12），再將 $\frac{1}{3}$ 轉變為符合分割數的分數（ $\frac{4}{12}$ ），最後，在計數 12 格中的 4 格即為全路徑的 $\frac{1}{3}$ 處。同理，e 小題學生將 $\frac{2}{3}$ 轉變為符合分割數的分數（ $\frac{8}{12}$ ），最後，在計數 12 格中的 8 格即為全路徑的 $\frac{1}{3}$ 處。
3. **先以 $\frac{1}{4}$ 為單位量判斷位置落於何處，再以 $\frac{1}{20}$ 為單位量找出正確位置：**此名學生在 c 與 d 小題中，並沒有使用如同 b、e 小題的方式，進一步的，學生先以 $\frac{1}{4}$ 為單位量判斷全路徑的 $\frac{1}{5}$ 應落於 A、B 區間，而後將 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{5}$ 相減算出 $\frac{1}{20}$ ，即為從 B 點往回數全路徑的 $\frac{1}{20}$ 的距離，值得注意的是，此名學生對於 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{20}$ 的單位概念非常清楚，在圖中，他將一邊邊長表示為全路徑的 $\frac{1}{4}$ ，再將其分成 5 等分，進而得知每一等分即為全路徑的 $\frac{1}{20}$ ，因此 X 點即為從 B 點往回數全路徑的 $\frac{1}{20}$ 長度所在之處。同理，在 d 小題中，學生先以全路徑的 $\frac{1}{4}$ 為單位量，判斷 $\frac{3}{5} > \frac{2}{4}$ （也就是 2 個全路徑的 $\frac{1}{4}$ ），所以全路徑的 $\frac{3}{5}$ 應落於 C、D 區間，而後將 $\frac{3}{5}$ 與 $\frac{2}{4}$ 相減算出 $\frac{2}{20}$ ，即為從 C 點往前數全路徑的 $\frac{2}{20}$ 的距離。

從工作中，研究者發現此名學生具有良好的數常識概念，尤其在 c、d 小題中，學生能先判斷位置的落點（比 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 大或小），再由相減的結果單位量 $\frac{1}{20}$

進一步將 $\frac{1}{4}$ 分成5等分即為5個 $\frac{1}{20}$ ，最後以 $\frac{1}{20}$ 為單位量正確判斷全路徑的 $\frac{1}{5}$ 與全路徑的 $\frac{3}{5}$ 位置。此外，學生在a~e五小題中使用了三種不同的方式判斷各分量的位置，更加說明此學生能靈活運用各種不同的策略進行解題活動，其數常識的能力是值得肯定的。

數常識不足之學生在第二部分表現分析

1. **僅依據運算之性質進行判斷：**此種策略方式是大多數學生所使用的，但在此種策略上學生也產生較多迷思，如學生 S5 認為一個數乘越大的數、除越小的數或加越大的數，其數值會越來越大，一個數減越大的數，其數值會越來越小，但對於不同運算間的大小關係，學生卻無法進行分析；學生 S6 則是認為只要乘或加，所得的數就是最大的；學生 S7 認為只要是乘的都會變越小，除的會變越大；學生 S8 雖有數字的乘除概念，但在第一段路徑時，卻選擇了 $\times 1.25$ 而非 $\div 0.25$ 。這些迷思概念，都顯示學生對於運算間的關係仍不清楚，也未考慮乘數或所加的數字大小，更可能是僅單純記憶公式化的結果。

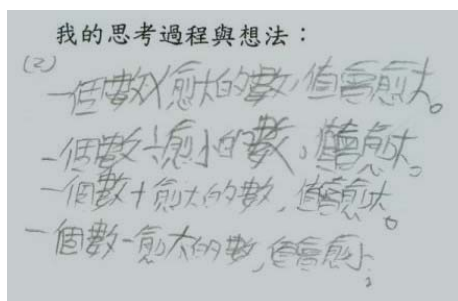


圖 6：S6 學生工作單 2



圖 7：S6 學生工作單 2



圖 8：S7 學生工作單 2

我的思考過程與想法：

第 2 部分：乘以 > 1 的數 $\rightarrow$ 其值愈大 $10 \times 1.5 = 15 \rightarrow 15 > 5$
 乘以 < 1 的數 $\rightarrow$ 其值愈小 $10 \times 0.5 = 5 \rightarrow 5 < 5$
 除以 > 1 的數 $\rightarrow$ 其值愈小 $10 \div 2 = 5 \rightarrow 5 < 5$
 除以 < 1 的數 $\rightarrow$ 其值愈大 $10 \div 0.2 = 50 \rightarrow 50 > 5$

圖 9：S8 學生工作單 2

2. 就每個路徑點考慮可獲得的最大數據進行選擇：學生 S9 與 S10 的作法皆將每一路徑會遇到的運算進行比較，再選出數值結果最大者，過程當中並未考慮路徑之後會遇到的運算所產生的影響，僅單就每個階段進行分析。其中，S9 之學生在過程部份更使用了錯誤的方式列出的等式。

過程：
 $100 \div 0.25 = \frac{10000}{0.25} = 400 - 100 = 300 \div 0.1 = \frac{3000}{0.1} = 3000 \times 0.5 = 1500 \div 0.5 = \frac{15000}{0.5} = 3000$

因為從 100 開始，第 1 階段有 3 個選擇，要選 $\div 0.25$ ，
 因為其它兩個越乘越小，接下來有 $\times 0.5$ 及 -100 要選 -100 ，
 因為這樣算下來 -100 後其值比較大，
 接下來是要選 $\div 0.1$ 不能選 $\times 0.5$ ，因為 $\times 0.5$ 會越小，
 後面要接著選 $\times 0.5$ 及 $\div 0.5$ ，
 因為往上選會越乘越小。

圖 10：S9 學生工作單 2

我的思考過程與想法：

① $\div 0.25 = \times 4$, $4 > 1, 25 > 0.1$, $100 \div 0.25 = 400$
 ② $400 - 100 = 400 \times \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} > 0.5$, $400 - 100 = 300$
 ③ $300 \div 0.1 = 300 \times 10$, $10 > 0.5$, $300 \times 10 \times \frac{1}{2} = 1500$
 ④ $1500 \div 0.5 = 1500 \times 2$, $2 > 0.5$,

圖 11：S10 學生工作單 2

3. 直接算出路徑值：學生 S11 直接計算各路徑的數值結果，再選出數值較大者進行下一路徑的運算，並不能藉由觀察運算間的關係進行選擇，僅單純依賴實際計算的數據選擇路徑，在過程中，也產生計算錯誤的部份。

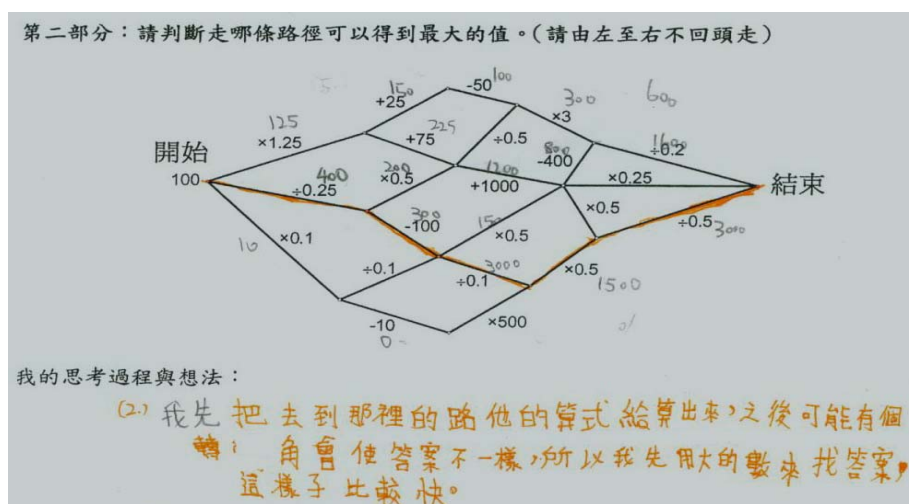


圖 12：S11 學生工作單 2

具數常識之學生在第二部分表現分析

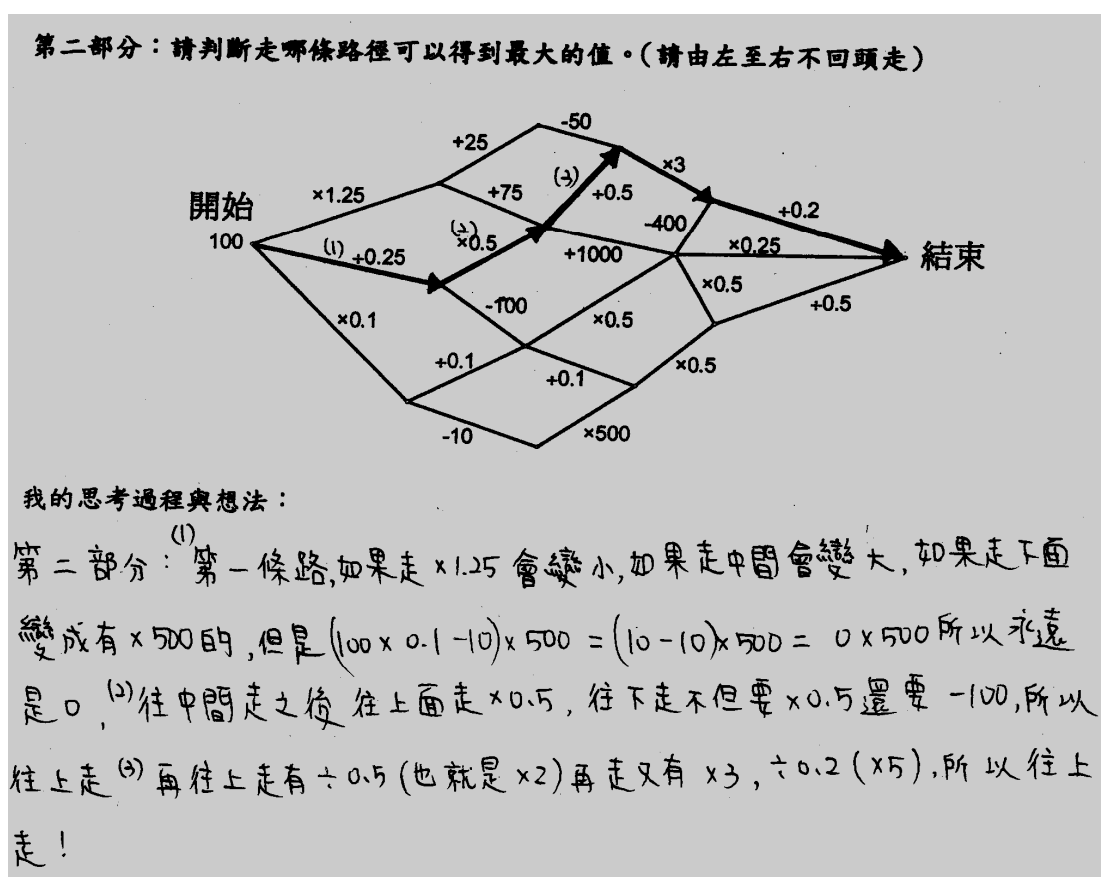


圖 13：S12 學生工作單 2

1. 考慮之後路徑的運算所造成的數據改變來進行每一步驟的選擇：學生在每條路徑的選擇上，皆能先分析路徑之後的運算所造成的數據改變，再

由此選擇出會使得數據最大的路徑。如學生的工作單所述，希望選到有 $\times 500$ 的路徑，但進一步發現 $100 \times 0.1 - 10$ 之後會使得其值為0，因此往下的路徑並不能獲得最大值。

2. 不經由實際算出數值而選取路徑：此名學生在路徑的選擇上有別於其他學生，並不直接算出數值，只有在選擇 $\times 500$ 的路徑上進一步算出

$100 \times 0.1 - 10$ 其值為0，其餘的路徑選擇，皆以使數據變大為考量依據。

此名學生是本次受測30名學生中唯一答對的學生，也是唯一在分析上有考慮路徑之後的運算所造成數據的改變。學生在剛開始寫下 $\times 1.25$ 會變小，研究者猜測此名學生可能在乘比1大或比1小的數字大小變化上仍有概念不清楚，但其分析的方式有別於其他學生僅單獨考慮每一點的最大值，所以能找出正確的路徑。其分析的過程當中並不直接算出數值，只是以數據變大變小為考量依據。因此，此名學生具有較好的數常識能力。

小結

進一步針對第一、二部分學生數常識測驗卷進行分析，發現在第一部分數常識不足之學生的解題策略為(1)由已知圖形與數據直接進行運算，(2)嘗試將正方形全路徑視為一條直線，(3)丈量長度直接計算；而具數常識之學生的解題策略有(1)由圖形的邊長判斷單位量，(2)由圖形邊數與欲分割的單位量求出分割數，(3)先以大單位量判斷位置落於何處，再以小單位量找出正確位置。而第二部分數常識不足之學生的解題策略有(1)僅依據運算之性質進行判斷，(2)就每個路徑點考慮可獲得的最大數據進行選擇(3)直接算出路徑值；而具數常識之學生的解題策略有(1)考慮之後路徑的運算所造成的數據改變來進行每一步驟的選擇(2)不經由實際算出數值而選取路徑。

五、省思

此次的數常識測驗活動，由於時間、地點及研究對象所限，研究者不能進一步對學生進行訪談以了解其解題歷程與想法，為本研究不足之處。然而，學生的答題狀況發現，雖第一部分各題學生皆有近50%的答對率，但由各小題的正確率也可看出對於已知的數據，學生較能藉由計算直接求出答案，而非計算式的判斷

題目學生較難正確作答，甚至於受測的學生當中有一名學生竟直接將試卷上的正方形長度用尺測量出來，再直接依題目算出各單位量的長度，最後再用尺測量出長度並在正方形圖形上標出座標點；而在試卷 2a 能正確作答的學生也很少進一步思考而在試卷 1d 正確作答，這些都足以顯示學生在數常識概念上的不足，僅單純藉由計算求出答案，對於單位量感與題目間的概念關係也很難進一步進行思考。而第二部份為試卷較難的題目，僅有一名學生正確作答，分析學生的表現研究者發現，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響，因此未能正確作答。

藉由此次的活動，研究者不僅發現學生對於數常識的概念仍顯不足，更看出熟於傳統計算的學生在試題的靈活思考上是有所受限的，而大部分學生處理數學問題時，也無法對題目作全面性的了解與思考，此結果整與先前之研究發現相呼應(Markovits & Sowder, 1994; Yang, 2003, 2005)，中小學生之數常識能力普遍表現不佳，學校之數學教育應進一步加強數常識之發展與培養。因此，本研究更呼應了 NCTM (2000) 中所強調發展數常識為中小學數學課程的主要目的。學生的數常識概念應被重視、被發現、被瞭解，並適時透過有效的教學與補救策略以提升學生的數感能力。

而在路徑活動的設計上，本次研究者所設計之數常識測驗卷屬於概念性知識，試題中的路徑為封閉式，不同於以往所呈現的直線式，許多學生也因此無法解題，研究者推測學生平時可能慣於在路徑問題上利用直接平分數線的方式解題，或是直接由已知數據運算出答案，也因此無法靈活運用分數的相對大小進行解題。研究者建議教師於此部分的教學上，可設計直線式與封閉式的路徑問題讓學生進行思考與討論，並以此檢視學生的學習成效，教學中也可刺激學生採用不同的解題策略，以建構學生的數常識能力。

參考文獻

- 楊德清(2000)。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法，*科學教育學刊*，8(4)，379-394。
- 楊德清(2002)。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究，*科學教育學刊*，10(3)，233-260。
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333-339.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining Basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1997). *Number Sense grades 6-8*, Palo Alto: Dale Seymour Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-37.
- Yang, D. C. (2003). Teaching and Learning Number Sense—An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(1), 115-134.
- Yang, D. C. (2005). Number Sense Strategies used by Sixth Grade Students in Taiwan, *Educational Studies*, 31(3), 317-334.

台灣不同時期國小數學課程能力指標之比較分析

徐偉民¹、張敬苓²

¹屏東教育大學數理教育研究所、²屏東教育大學應用數學系

壹、研究背景與動機

民國 64 年教育部著手修訂民國 57 年國民小學暫行課程標準，於同年八月完成並公布實施。但 64 年版的課程衍生許多問題，如：講解式的教學、過量的作業等。於是民國 78 年召開第一次全體委員會議，討論國小課程標準修訂之重點及方向，在民國 82 年公布新課程標準（林欣慧，2007）。

教育部在民國 82 年頒布的國民小學數學課程標準中，決定改變教育界行之多年的「吸收論」與「客觀主義」的想法，轉而採用「建構論」的觀點施行數學教育（胡志偉，2003）。這樣的改變造成了數學教育劇烈的改變。加上九年一貫實施教科書多元開放政策，教科書一綱多本，讓基層教師有一種無所適從的感覺。建構取向的數學教學、教科書的議題、以及課程綱要的議題，都廣泛引起關心國小數學教育人士的熱烈討論（楊美伶，2003）。

我國九年一貫數學暫行綱要，在與美國加州 **k-12** 數學課程內容標準的比較下，發現其內涵至少落後一至二年（鄭國順、王慶安，2003）。國際的比較、與高中課程銜接的問題、以及學生計算能力的下滑，使得暫行綱要尚未全面實施，便針對綱要內容進行調整與修正，並於民國九十二年公布正式綱要（教育部，2003），於九十四學年度起逐年實施九年一貫正式綱要。

數學教育課程劇烈改革的過程，對現場的教師造成了很大的影響，讓許多教師與家長對於朝令夕改的政策感到無所適從。因此研究者希望能夠透過不同時期能力指標的比較分析，讓現場教師或職前教師能夠對於數學課程的轉變與發展有更清楚的了解，以掌握目前教學的趨勢與方向。因此，本研究希望透過比較台灣三個時期（64 年、82 年及 92 年）的能力指標達成以下兩個目的：

一、比較數學領域的四個主題（數與量、幾何、代數及統計與機率）在各時期國小階段所佔能力指標的次數及其占總次數之百分比。

二、比較「概念理解」與「計算熟練」在各時期第國小階段所佔能力指標的次數及其佔總次數之百分比。

貳、文獻探討

一、各時期數學改革之因素

近四十年來，台灣數學教育歷經了四個不同的改革與發展時期（楊美伶，2003），以下將介紹各個時期強調的重點，以使對台灣數學教育發展的脈絡有出略的理解。

（一）強調使用教具的時代（64 年至 82 年）

在民國 64 年小學課程標準修訂時，認為數學教育的目的是使兒童理解知識後內化，他們就擁有這些知識並能善加運用。根據皮亞傑的兒童認知發展階段論，認為小學生對於形式數學的理解一定要透過具體物操作才能得到。於是，採用結構學派的理論，希望在形式數學和具體操作之間建立起連結。但實際執行後的結果並非如預期，學生的認知中具體物的操作和形式運算上不能產生關聯，造成學生的不理解（黃敏晃，1994）。

期望透過教具操作以理解運算規則的用意，並未十分明顯，倒是看到學生記憶規則，卻說不出所以然，在運算的部份尤其明顯（楊美伶，2003）。不重視思考問題導致學生就算能夠透過大量的練習而順利解題，但卻說不出來為什麼要這樣做，便成為 82 年數學課程修訂的主要原因。

（二）強調知識建構的時代（82 年至 89 年）

台灣數學課程改革的分水嶺是 64 年版和 82 年版，課程理念由學科中心轉向學生中心（鍾靜，2005），帶出這個時期所主張的中心思想。所謂建構式教學法是指「知識是由學生本身所建構出來的」，建構式教學的課程為老師先佈題，然後將學生分成小組之後進行討論、解題，學生發表與澄清，形成共識。這樣的教學法，學生不僅可以藉由發問的過程，釐清自己的思想、表達自己的意見，還可以培養意見發表的能力，欣賞其他人的想法，藉由溝通來達成共識。

這階段的教科書的教材結構、教學方式與以往有很大的差異，在教師準備不

及下實施，衍生出許多的問題。如將計算規則視為解題的方法之一、不規定一定要使用算則解題的前提下，學生自然不會要求熟練，因此產生計算速度的變慢、解題效率不彰，而使得社會大眾無法理解與接受（楊美伶，2003）。在教學問題叢生以及社會質疑聲浪中，在短短數年中，便又進入了下一個階段的改革。

（三）強調能力培養的時代（90 年至 92 年）

89 暫綱最主要的特色是強調學生能夠有統整的能力、能夠將所學知識帶著走的能力、由自身建構知識的能力、80%的學生能夠學會...等，但是九年一貫數學科暫行綱要的推行，除了能力指標的制定缺乏實際上的證據，還有能力指標的敘寫沒有很明確的指向，模稜兩可的敘寫方式，讓能力指標的解讀上便產生很大的問題，另外還大幅度的淺化教材的深度，將整體的標準降低（翁秉仁，2003）。

九年一貫暫行綱要施行的結果就是學生程度大幅度的降低，更不用說程度不好的學生有沒有學得更好了，另外，與國際程度的比較上有相當的落差，學生能力明顯的不足，教材內容的簡化導致無法銜接上高中甚至是大學的課程，造成銜接上有相當大的問題。也因為這樣，在短短三年左右的時間，便修改成九年一貫正式綱要，亦即所謂的 92 正綱。

（四）強調計算能力的時代（92 年之後）

九年一貫暫行綱要的修訂，除了有課程銜接、分階段能力指標以及與國際比較落後等因素之外，還有數學家的介入。數學家們（林長壽，張海潮，陳宜良，李瑩英，翁秉仁，2005）指出「課程綱要的定位太低」、「能力指標解讀困難」、「建構教學法對教師的數學素養與經驗要求很高」、「現在沿用的建構課本不是一本理想的教科書」等台灣數學教育一路走來的潛在危險，因此九年一貫暫行綱要才在短短三年的時間作修訂。

九年一貫暫行綱要在與國際比較修正之後（與美國加州 k-12 數學課程內容標準作比較），並且參考行之有年舊教材，在內容上做了深度的調整，另外，不再強調 80%的學生學會、學生能夠快樂學習，期望能夠藉由這次的調整回歸到數學本質，就是數學知識的本身（概念、定義、解題），希望能夠達到理解與熟練兼顧。

二、總結台灣的改革歷程

從 82 年強調建構取向的數學課程與教學開始，便不斷地出現批評的浪潮。台灣建構數學真正的問題在於，大多數的老師不能領會建構教學的要領，無法捨棄注重教科書的習慣，而偏偏這本教科書在數學內容的呈現、教材的安排、以及背後的思想，又都有很多的問題（翁秉仁，2003）。事實上，國小數學原有的舊教材並無差錯，只須鼓勵教師在教學法上引導學生一起建構相關內容，使教學活潑，並重視個別差異，學生便可適才適性，學到東西（黃武雄，2003）。

在九年一貫課程實施後，雖然強調帶著走的能力以及 80% 的學生學會的理念很吸引人，但是教師反應最為強烈的是教學時數不足一項。雖然，教師們永遠都在反應教學時數不足，九年一貫課程貫徹「減少教學上課時數、保留教學彈性」之原則下，數學領域和其他領域一致，其節數占全部時數的百分之十到十五，即使各領域的教學節數只規範下限，因彈性教學節數空間不大，學習領域節數調整受限，數學教學時間仍然調幅有限。數學課程內容與教學時數應該相輔相成，教師若無充分時間來進行教學，學生的學習無法兼顧理解和熟練，學習成效必打折（鍾靜，2005）。

前任教育部長曾志朗先生一上台，便提出台灣教育的主要問題在於教師。其實無論課程如何變革，關鍵在於教師對於課程的理解、詮釋、轉換與與實踐（Stein, Remillard, & Smith, 2007），教師如何把書寫的課程（written curriculum）如何轉換成實際實施的課程（enacted curriculum），才是影響學生數學學習成效與品質的關鍵。因此，希望現場老師或職前的老師能夠透本研究，對於台灣數學課程的演變與發展能夠有更深入的了解，以便對他們的教學理解與實踐有所幫助。

參、研究方法與實施

一、研究方法

內容分析亦稱資訊分析（informational analysis）或文獻分析（documentary analysis）。在許多研究的領域中，常需要透過文獻的分析或文件資料的彙整而獲得一些完整的資訊。因此，內容分析研究法便常見於許多文件分析的研究中（王文科，2002）。

內容分析法可依「定質」和「定量」的角度不同而分成「定質分析」（qualitative

analysis) 和「定量分析」(quantitative analysis)。定量分析是指將資料的內容以量的方式加以處理。定質分析則是指企圖由研究資料內容的意義(陳佩棻, 1999)。基於此, 本研究先採定量方式, 依文獻所得資料分析所含之類目, 進行量化分析各階段能力指標各領域的次數。再以定質方式, 根據量化分析結果, 分析其分配情形, 並針對各階段各領域之能力指標的敘述異同, 作深入的分析與討論。

二、研究架構與流程

本研究以探討分析 64 年版、82 年版及 92 年版各個主題(數與量、幾何、代數及統計與機率)中的數學學習領域能力指標為主題, 研究範圍為國小階段(1-6 年級)。研究初期, 先與指導教授溝通討論, 並且大量蒐集相關文獻以及研究的資料。研究架構如圖 3-1:

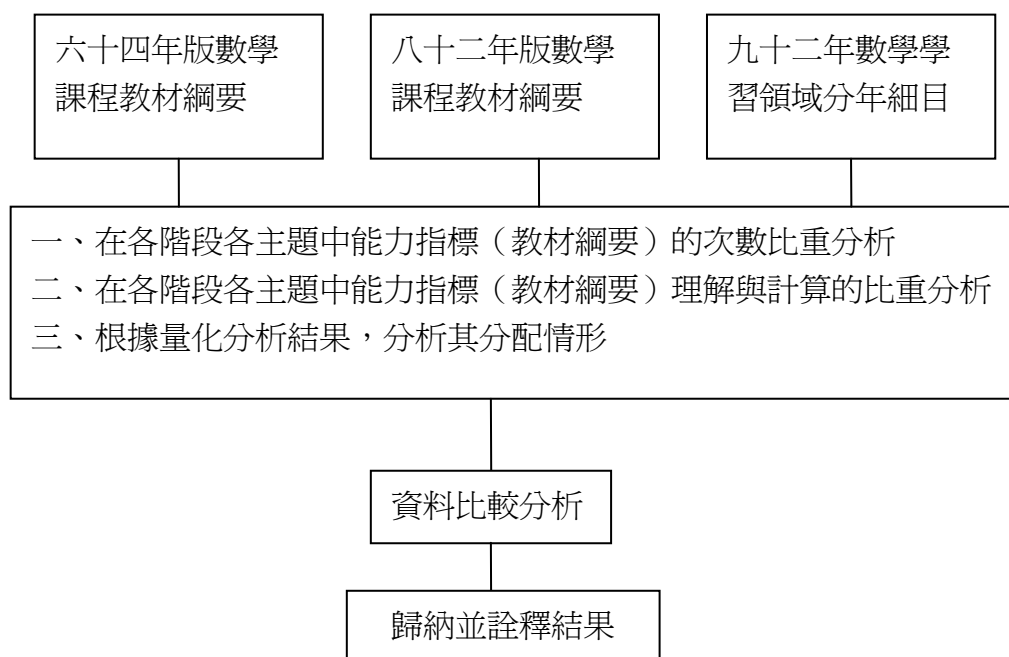


圖 3-1 研究架構圖

三、研究對象

本研究之研究對象如下:

一、64 年版數學課程教材綱要

64 年版的教材綱要採取分年敘說的方式, 敘寫方式較為精簡且理解類

與計算類的教材綱要均分條敘寫，因此無同一條教材綱要中同時含有理解與計算。例如：「幾點鐘、幾點半的認識」、「長方形、正方形的概念和畫法」。

二、82 年版數學課程教材綱要

82 年版的教材綱要以採分年敘說的方式，敘寫轉為以解說方式來闡述，在教材綱要的分類上過於細，部份會顯得有些多餘，教材綱要的長度明顯多於 64 年版。另外，強調與日常生活結合，因此加入許多物品來與課程內容作結合，在幾何部份最為明顯。教材綱要中理解類與計算類也是偏向分開敘寫，僅 4 條同時含有理解與計算的觀念。例如：「認識幾點鐘、幾點半」、「以幾點鐘、幾點半來報讀時刻」、「透過製作過程，瞭解三角形、四邊形的構成要素：角、邊、頂點及其個數；並認識周界及周長」。

三、92 年版數學學習領域能力指標

92 正綱採分年細目的方式敘說，敘寫的部份相對於前兩個時期有很明顯的改變，偏向於將相同的觀念之能力指標，融合為同一條能力指標，並且也強調與生活作結合，因此有多達 34 條分年細目同時含有計算與理解的觀念。例如：「能認識常用時間用語，並報讀日期與鐘面上整點、半點的時刻。」、「能認識平面圖形的內部、外部與其周界」。

四、內容分析之類目建構

以內容分析法分析教科書內容，首先必須訂定分析單位與分析類目，此兩者之操作性定義明確，才能使內容分析法達到科學方法的要求。

（一）分析單位

將內容量化時的分析標準，就是內容分析法的分析單位。內容分析的單位最常使用的有：字、主題、人物、項目、時間與空間單位、課、章、段、詞、句、頁等，研究者依照其研究目的而設定各種分析單位。分析單位的形成可分為兩種形式：一為依據理論或過去研究結果發展而成，另一則為研究者自行是需要與內容分析對象的性質而定（歐用生，1991）。

因此本研究在進行內容分析時，以數學主題為分析單位，數學主題的訂定研究者以 92 年版本為主，共有「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」四個主題，能力指標（教材綱要）依據分析類目進行分類記數。

(二) 分析類目

Berelson 將分析類目分為兩大類：一、「說什麼」類目 (“What is said”categories)：用以測量內容實質，包含主題、方法、特性、主角、權威、來源、目標、標準、方向及價值等十類。二、「如何說」類目 (“How is said”categories)：包含傳播形式、敘述形式、強度及策略等四類 (引自歐用生，1991)。本研究採用「說什麼」類目中的價值類目，以及「如何說」類目中的策略類目。研究者自行發展出「能力指標內容分析類目與處理表」見表 3-1。

表 3-1 能力指標內容分析類目與處理表

主類目	次類目	內容分析資料之處理
1.價值類目	1-1 數與量	計算三個時期之能力指標「價值類目」下各次類目所含能力指標的次數及其占總次數之百分比。
	1-2 幾何	
	1-3 代數	
	1-4 統計與機率	
2.敘述形式類目	2-1 理解	計算三個時期之能力指標「策略類目」下各次類目所含能力指標的次數及其占總次數之百分比。
	2-2 計算	

(三) 內容分析資料之處理

1. 計算三個時期 (64 年、82 年及 92 年) 版本國小階段之能力指標「價值類目」下各次類目 (數與量、幾何、代數及統計與機率) 所含能力指標的次數及其占總次數之百分比。
2. 計算三個時期 (64 年、82 年及 92 年) 版本國小階段之能力指標「敘述形式類目」下各次類目 (理解、計算) 所含能力指標的次數及其占總次數之百分比。
3. 在質性分析方面，根據量化分析的結果，分析其分配情形，並針對三個時期 (64 年、82 年及 92 年) 版本國小階段之能力指標的敘述及異同，作質性分析的描述與討論。

(四) 分析類目資料之涵蓋範圍

本研究所包含的能力指標(教材綱要)涵蓋三個時期所有的能力指標,共578條。因此,本研究所發展出來的類目,實際研究的範圍為三個時期各主題之國小階段的能力指標共578條,涵蓋率達百分之百。

(五) 分析類目表之信度

本研究採用評分者一致性作為信度的檢驗方式,評分者信度是指評分員對內容單位分各類目的一致性程度,通常評分員彼此對單位的同意度與一致性越高,及表示該研究的信度越高。以下說明評分者的組成與信度分析的步驟:

1. 評分員的選定:本研究邀請兩位評分員進行信度檢驗,此二位評分員皆為應用數學系之學生,均修過數學課程研究與數學教材分析等相關課程。同研究者共計三位評分員,一同進行評分者一致性的檢定。

2. 信度分析的步驟:

(1) 選取樣本:從64年、82年及92年三個時期國小階段之能力指標中,選出主題數理量中,計算與理解之相關能力指標。

(2) 說明:將類目標及定義發給每位評分員閱讀,並說明歸類原則。

(3) 歸類:研究者與兩位評分員針對類目表的問題溝通後,獨立進行類目歸類工作。

(4) 信度計算:將歸類之結果利用公式進行信度的計算,其公式如下(歐用生,1991):

I. 相互同意值(Pi)

$$Pi = \frac{2M}{N_1 + N_2}$$

M: 表兩人共同同意的項目數

N_1 及 N_2 : 每位評分員同意的項目數

II. 平均相互同意值 (P)

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$

N：表評分者兩兩相互比較的總次數

III. 信度 (R)

$$R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$$

n：評分員總人數

(5) 信度結果：

研究者與兩位評分員之間的相互同意值如下 (表 3-2)：

表 3-2：評分員相互同意度表

評分員	A	B
B	0.995	
研究者	0.985	0.98
平均相互同意值 P=0.986		
信度 R=0.995		

肆、結果與討論

一、各次類目之比較分析

三個時期的能力指標 (教材綱要) 選取範圍為國小階段，其中，92 正綱部份採用分年細目，為 64 年版與 82 年版採教材綱要。另外，未將 89 暫綱的部分納入討論的原因，是因為 89 暫綱為階段性的能力指標，而第三階段涵蓋了國小六年級以及國中一年級的部份，無法像 92 正綱有分年細目來區分哪些部分為國小六年級的能力指標，因此不納入討論的範圍。

(一) 各主題之能力指標數量比較分析

各時期「價值類目」下各次類目 (數與量、幾何、代數及統計、機率) 之能力指標數量統計，結果表 4-1、4-2，以及圖 4-1、4-2、4-3、4-4、4-5：

表 4-1 各時期價值類目下各次類目之能力指標數量統計

時期 主題 \ 數量	64 年版	82 年版	92 正綱
數與量	117 條	172 條	91 條
幾何	29 條	33 條	40 條
代數	16 條	23 條	23 條
機率與統計	7 條	17 條	10 條
總和	169 條	245 條	164 條

表 4-2 各時期價值類目下各次類目之能力指標百分比

時期 主題 \ 百分比	64 年版	82 年版	92 正綱
數與量	69.3%	70.2%	55.5%
幾何	17.2%	13.5%	24.4%
代數	9.5%	9.4%	14.1%
機率與統計	4.2%	7%	6.1%

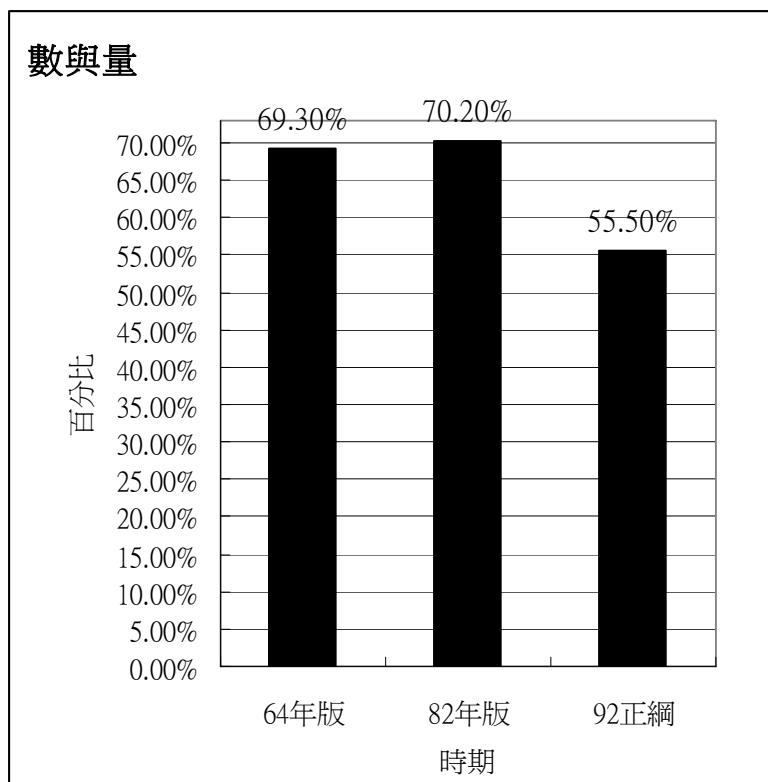


圖 4-1 各時期數與量之能力指標百分比長條圖

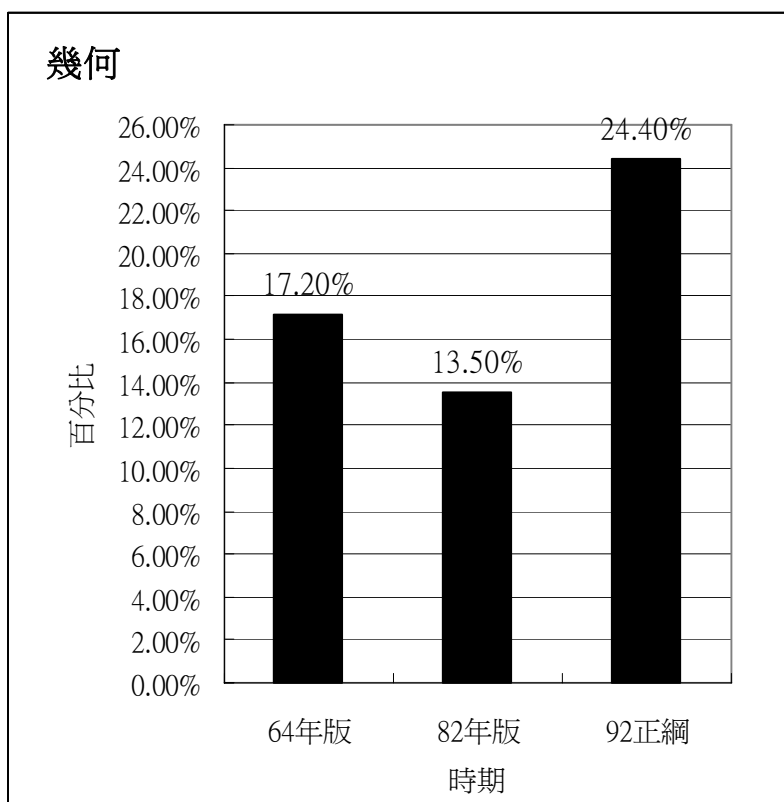


圖 4-2 各時期幾何之能力指標百分比長條圖

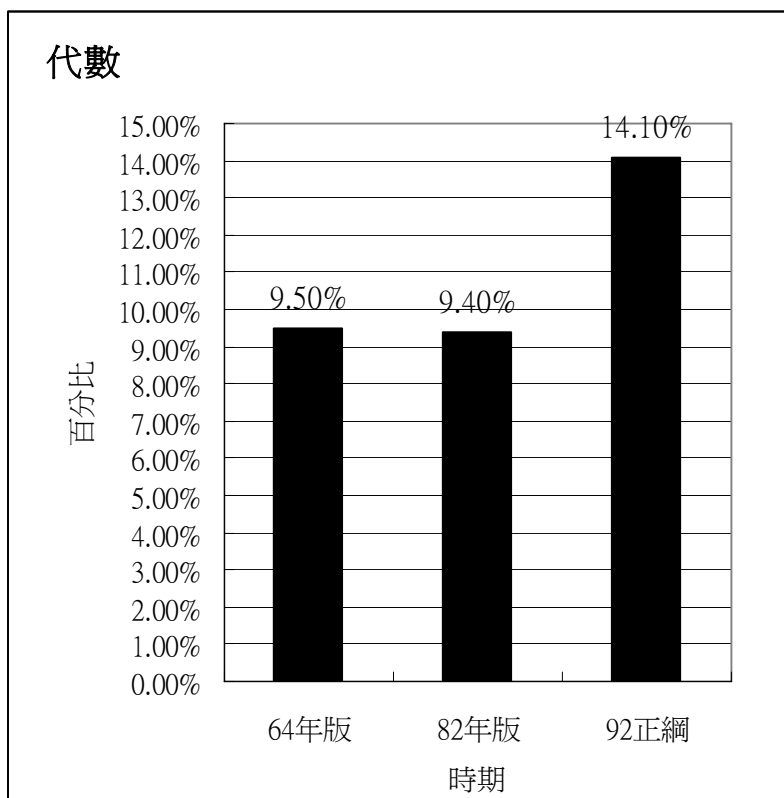


圖 4-3 各時期代數之能力指標百分比長條圖

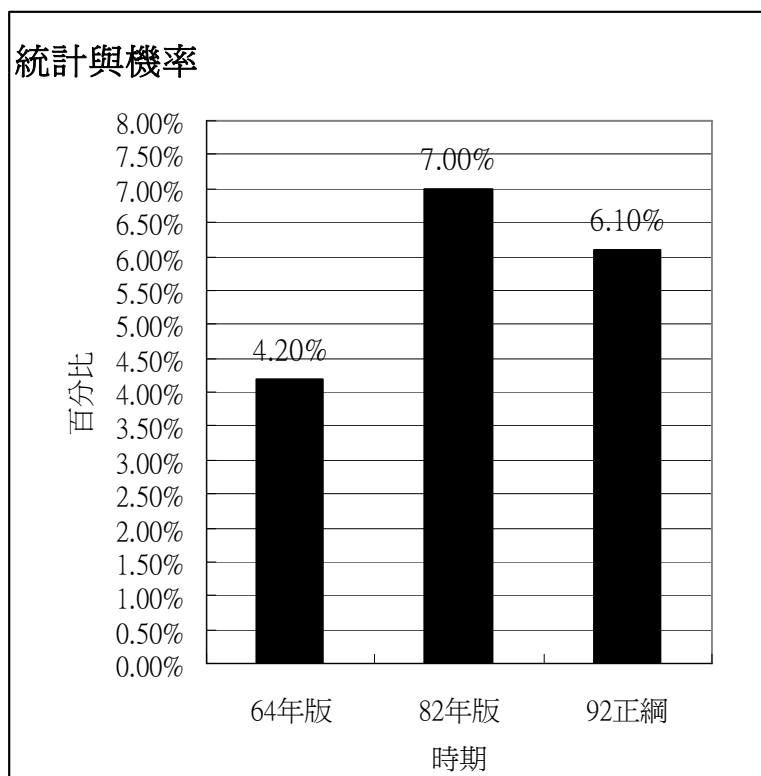


圖 4-4 各時期統計與機率之能力指標百分比長條圖

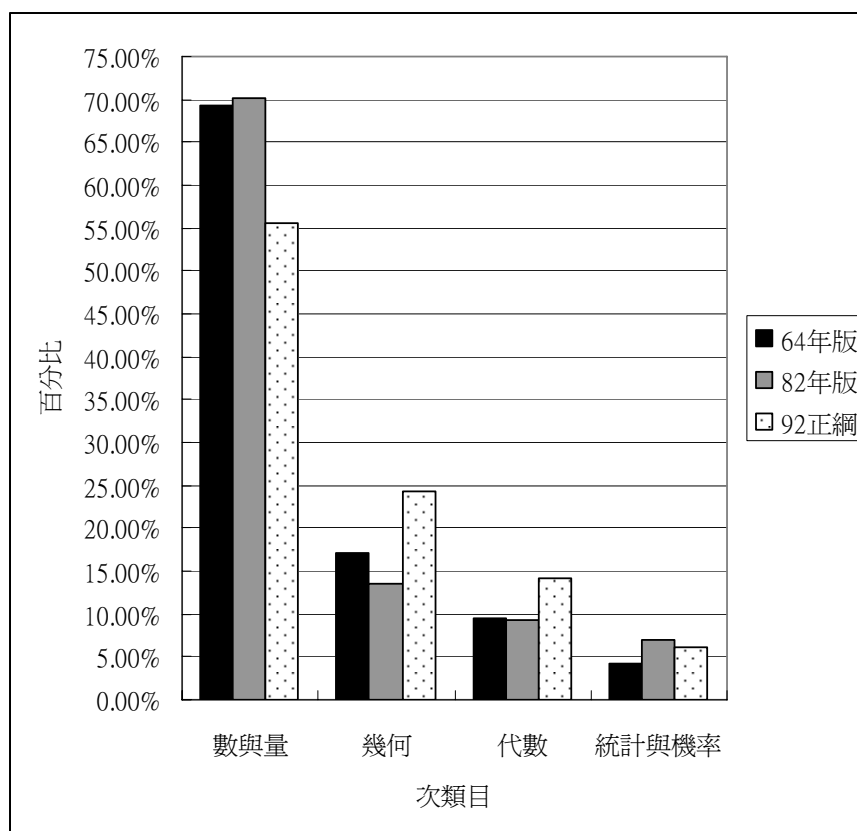


圖 4-5 各時期各次類目之能力指標百分比長條圖

從上述圖表中，我們可以得到以下的發現：

1. 數與量：從表 4-1 看來，數量以 82 年版為最多，但因相對的總數也多，因此佔全部的比例來看，和 64 年版僅差了 0.9 個百分比，如表 4-2。另外，92 正綱的部份是三個時期數與量主題所佔比例最低的時期，和最高的 82 年版相差了 14.7 個百分比之多，從圖 4-1 可明顯看出 92 正綱下降的幅度。造成這樣現象的原因也許和能力指標敘寫方式偏向將同一觀念寫入同一條能力指標中，造成數量上的減少有關。
2. 幾何：從表 4-1 來看，在數量上的差別不像數與量主題那樣的大，但佔全體比例最高的 92 正綱與佔全體比例最低的 82 年版也相差了 10.9 個百分比，從圖 4-2 可看出呈現 U 字型。為何幾何部份會有明顯的上升，表示 92 正綱特別重視學生幾何主題的學習。
3. 代數：從表 4-1 來看，在數量上 82 年版和 92 正綱相同，但佔全體的比例而言，92 正綱為最高的一個時期，較最低的 82 年版多了 4.7 個百分比。從表 4-2 來看，64 年版和 82 年版的比例差不多，92 正綱為最高。代數的比例近

年來有比較顯著的上升，研究者認為和九年一貫的著重有關，數學家開始重視數與數之間的關係、數與符號的關聯等，因此比例較以往的時期來得高。

4. 機率與統計：從表 4-1 來看，以 82 年版的數量最多雖然在全體的比例上也是三個時期最高的，但最多也只多出 64 年版 2.8 個百分比，而比 92 正綱僅多 0.9 個百分比，比例上的差距不大。至於 82 年版會佔比較多的比例的原因，研究者認為也許和 82 年版開始，開始特別強調要和日常生活作結合有關，因為統計圖表的使用與日常生活有較直接關係的連結。
5. 從整體來看，從表 4-2 來看，在各主題上的比例，近年來有較為平均的現象，不再只是注重數與量的部份，也是和台灣學生在國際上數學表現有關，雖然近年來的表現還是很優異，但作答的題目類型上，以幾何和代數的兩個主題表現就有比較明顯的下滑，因此九年一貫實施後，才會比較著重於幾何和代數這兩個部份的比重。從表 3-1-1 來看，以 82 年版的教材綱要總數最多，這個部份和教材綱要的敘寫方式有很大的關係，描述的內容更細更分散，有些教材綱要會有多餘的感覺，不像 64 年版的簡潔，更有別於 92 正綱的融合，因此在整體的數量上才会有比較明顯的增加。

(二) 理解、計算之能力指標次數比較分析

各時期「敘述形式類目」下各次類目（計算、理解）之能力指標數量統計，在總數統計的部份，由於部份能力指標（教材綱要）同時含有計算與理解的觀念，故會有重複計算的部份，其中 82 年版有 4 條同時含有計算與理解觀念的能力指標，92 正綱有 34 條同時含有計算與理解觀念的能力指標。結果如表 4-3、4-4，以及圖 4-6、4-7、4-8：

表 4-3 各時期敘述形式類目下各次類目之能力指標數量統計

時期 主題 \ 數量	64 年版	82 年版	92 正綱
計算	33 條	48 條	62 條
理解	136 條	201 條	136 條

總和	169 條	249 條 (4 條重複計算)	198 條 (34 條重複計算)
----	-------	--------------------	---------------------

表 4-4 各時期敘述形式類目下各次類目之能力指標百分比

時期 主題 \ 百分比	64 年版	82 年版	92 正綱
計算	19.6%	19.3%	31.4%
理解	80.5%	80.8%	68.7%

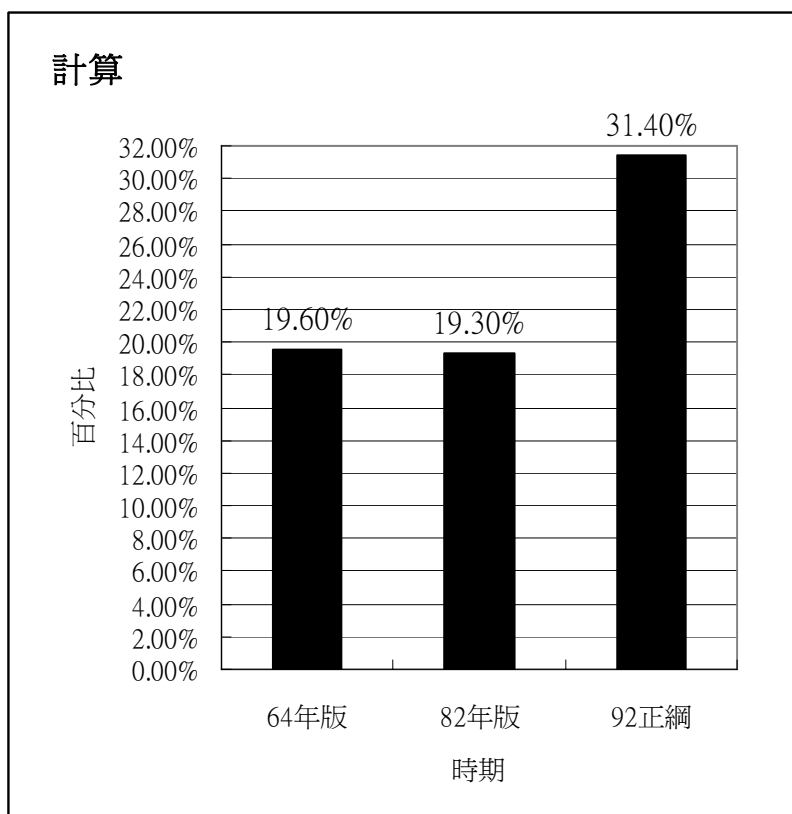


圖 4-6 各時期計算之能力指標百分比表

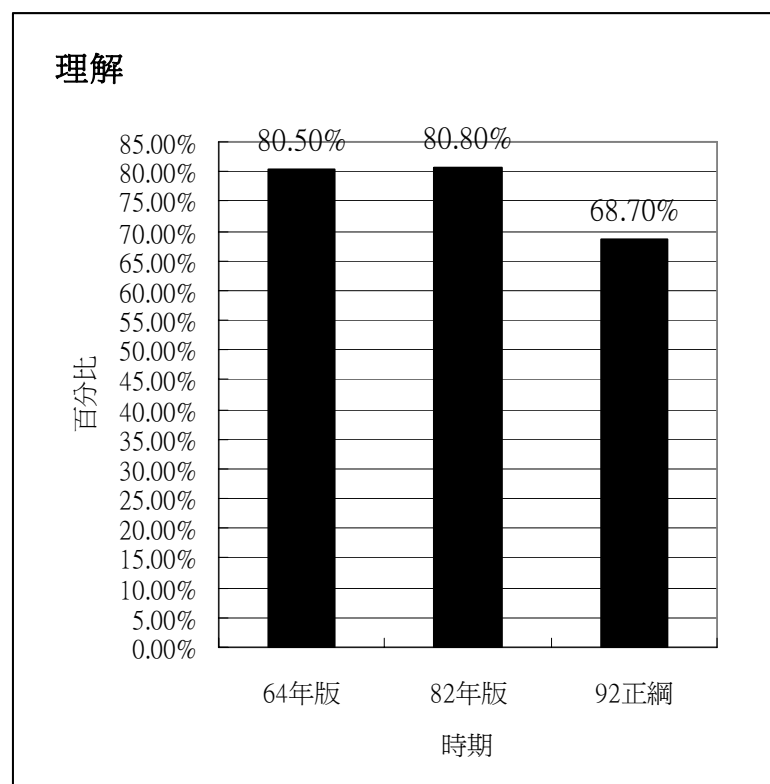


圖 4-7 各時期理解之能力指標百分比表

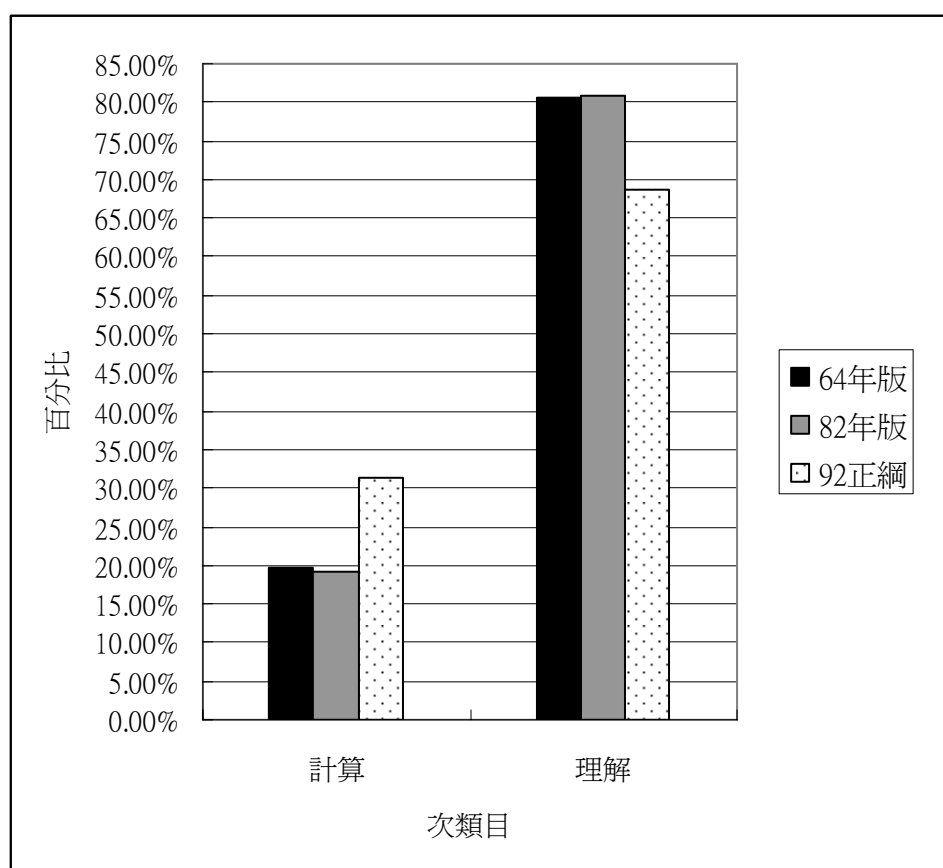


圖 4-8 各時期各次類目之能力指標百分比表

從上述圖表中，我們有以下的發現：

1. 計算：從表 4-3 看，以 92 正綱所含計算類的數量最多，比最少的 64 年版多了快 1 倍的數量。而佔全體的比例上依然是 92 正綱最高，比最低的 82 年版多了 12.1 個百分比，不過在 64 年版和 82 年版的部份，比例上是差不多的，僅相差了 0.3 個百分比，如表 4-4。為何 92 正綱比例增加會如此明顯，研究者認為也許和政策上得強調有關，因為 89 暫綱導致學生數學計算能力低落，因此 92 正綱希望能夠回歸到計算與理解並重的時代，從比例上來看 92 正綱也確實是三個時期較著重計算的一個時期。另外比例增加的原因，也許和 92 正綱有較多同時含有計算與理解觀念的能力指標，因重複計算導致計算比例上增加如此明顯。
2. 理解：從表 4-3 來看，64 年版和 92 正綱有相同數量的能力指標，而以 82 年版的數量最多，比 64 年版和 92 正綱多了 65 條之多，但在佔全體比例上來看，82 年版雖然也是三個時期最高的，但僅多 64 年版 0.3 個百分比而已，不過比 92 正綱高出了 12.1 個百分比之多。92 正綱流失的百分比納入了計算類的能力指標比例中，因此也拉進了計算和理解的比例上距離的差異。不過，在以往的印象中，大家總認為 64 年版較重計算類的能力指標，然而 64 年版的比例佔全體高達 80.5%，這和以往有很大的出入，理由也許和上課時數、比例有關，也和教材的編排上有關。

二、能力指標的延伸：代結語

（一）各時期能力指標的寫法比較分析

64 年版和 82 年版的教材綱要的敘寫方式在「數與量」的部份相似度很高，但 82 年版的教材綱要有和當時的課程綱要相呼應，因為 82 年版的課程綱要講求生活化，因此 82 年版會增加較多生活化性質的教材綱要，不過「數與量」裡面關於計算性的能力指標差別性就不大了。

不過 64 年版和 82 年版的教材綱要的敘寫方式在「幾何」的部份差異就非常大了，64 年版就非常的平鋪直述，如「三角形、四邊形、長方體、正方體的初步概念和構成要素」，而 82 年版則是利用許多生活性的方式去帶入幾何的觀念，如「透過摺紙、剪紙、鏡射等活動，觀察線對稱的現象；透過製作盒子及其骨架

的活動，了解長方體和正方體的構成要素。」希望透過圖形板、積木、摺紙、製作盒子等活動，來引發學生學習的興趣，相較於 64 年版，82 年版的教材綱要就更為活潑、生活化。

而從 82 年版進入到 89 暫綱的部份，在能力指標的敘寫上是一個非常大的轉折，同樣為敘述乘法學習的能力指標，但寫法上卻有很大的差異，82 年版同 64 年版就只列出「2 到 9 的乘法表的構造」，而 89 年版則沒有特地強調「乘法表」一詞，而用「能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單(積 ≤ 100)的整數倍問題。」這樣的方式來闡述乘法的學習，因為當時的教育環境強調不要背誦九九乘法表。再舉一個例子，同樣為敘述分數學習的能力指標，82 年版列出「分母為 20 以內的真分數的認識」，而 89 暫綱列出「在等分好、整體 1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能以真分數(分母在 20 以內)描述內容物為單一個物的幾份，並能延伸真分數的意義，進行同分母真分數的合成、分解活動(和 <1)。」和 82 年版同樣為分母 20 以內的真分數認識，但 89 暫綱還引出離散量和連續量的名詞，等分與整體 1 的觀念。

從 89 暫綱進入到 92 正綱的部份，92 正綱雖然在精神上和許多主張都和 89 暫綱不盡相同，但在能力指標的敘寫上仍能看出一些延續性，89 暫綱列出「能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單(積 ≤ 100)的整數倍問題。」而 92 正綱列出「能理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題。」，相互比較 92 正綱敘寫的模式較 89 暫綱來得淺顯易懂。

(二) 各時期教材的難度比較分析

如果把 89 暫綱的能力指標納入來看的話，四個時期的難易度是呈現 U 字型，64 年版的教材是四個時期中最難的一個時期，在教科書裡都附有大量的練習題，希望學生可以透過大量的練習來達到熟練的目的。到了 82 年因為當時教育背景推動建構式教學，在教科書上面的影響較大，減少大量的練習題，插入大量的圖片還有對話來引導學生自行思考，強調學生要不從死記或是大量練習來獲得知識，而是希望知識是從學生本身建構出來，所以教材的難易度較 64 年版簡單，不過從 82 年版和 64 年版的教材綱要來看，量個時期的差異性並不大。

進入 89 暫綱的部份，當時的教育背景推動的是學生能夠快樂的學習，因此大幅度的降低教材的難度，希望能夠達到預訂的課程目標，而且幾乎是刪除全部

的練習題，認為學生在課堂上所建構的知識就足夠，非常重視理解，開放式的教科書希望提供學生開放性的思考模式，因此在引導的過程中都是以模稜兩可的問題為主，但在教科書上卻沒有給予適當的答案，若學生沒有認真上課，其實也無法在課本上得到答案。因此這個時期是教材最為簡單的一個時期。

最後是 92 正綱的部份，在與國際程度的比較以及參考行之有年舊教材，在內容上做了深度的調整，在教科書方面也增加了許多練習題的部份，而且希望能回歸理解與計算並重的教育。

舉個例子，各時期乘法學習能力指標，四個時期最大的差別就是在於九九乘法表，64 年版、82 年版和 92 年版都強調九九乘法表的背誦，而 89 年版的部份則因為當時教育背景，因此不用背誦九九乘法表。另外在乘法學習的深度方面，64 年版已進入三位數乘以兩位數；82 年版則強調三位數乘以一位數；89 暫綱還停留在累加的階段，並且限制解決積為小於等於 100 的整數倍問題；92 正綱又回到強調三位數乘以一位數的階段，而且強調要熟練直式計算。從這裡就很明顯式呈現 U 字型的難易度。

（三）反省、檢討與未來的趨勢

從能力指標的比較分析來說，數學改革越來越著重全方位的學習，近年來各個領域的比例有逐漸拉近，不像過去特別著重於數與量的部份。另外，計算與理解的比例亦有逐漸拉近，因 92 正綱強調學生不僅僅是要理解還要熟練，比例上也可以看出 92 正綱較其他時期著重計算的部份，如圖 4-6。至於現場老師應該注意的是，如何增加練習的部份已達到熟練的程度，而不流於就有的窠臼，這個部份是需要好好思考的。

另外，教材的難易度近年來有逐漸增加的趨勢，若是程度較差的學生無法吸收較難的觀念，教師必須花較多的耐心與時間來指導，或是改變教學的方式讓學生更容易吸收。此外，授課時數不足的問題依然存在，如何提升教師內教與學的效率，使所有教師應該思考的方向。

由台灣三個時期數學課程的比較分析發現，未來的數學課程會偏向全面性的課程，有別於以往著偏重於數與量的部份，更強調與生活有相關的統計、機率等內容，期望學生能有機會把課堂上的學習應用到實際的生活中。因此，數學學習的焦點不僅於理解與計算而已，更要強調應用的層面，來達成九年一貫中所強調

的「培養學生帶著走的能力」。

伍、參考書目

王文科 (2002)。教育研究法。台北：五南。

林欣慧 (2007)。我國與美國小學數學教科書內涵之比較研究：以「整數」教材為例。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文。

林長壽、張海潮、陳宜良、李瑩英、翁秉仁 (2005)。教改：一些數學家的觀點。檢索日期：2008.6.2，

http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_03_13.htm。

胡志偉 (2003)。建構教學的理念、做法與問題。國民教育，44 (2)，15-26。

翁秉仁 (2003)。談建構數學。檢索日期：2008.6.2，

http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_02_21.htm。

翁秉仁 (2003)。談九年一貫數學。檢索日期：2008.6.2，

http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_04_14.htm。

陳佩蓁 (1999)。國民中學 (認識台灣) 課程實施之研究：一所學校之個案分析。未出版之碩士論文，國立中正大學教育學研究所，嘉義。

教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。

教育部 (1976)。國民小學數學課程標準。台北：教育部。

教育部 (1993)。國民小學數學課程標準。台北：教育部。

教育部 (2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。

黃敏晃 (1994)。國民小學數學新課程之精神。載於臺灣省國民學校教師研習會 (主編)，國民小學數學科新課程概說(低年級)，1-17。台北：臺灣省國民學校教師研習會編。

黃武雄 (2003)。教改怎麼辦？(下)。檢索日期：2008.6.2，

http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_01_15.htm。

楊美伶 (2003)。教師如何因應數學課程的變革。國民教育，44 (2)，27-31。

鄭國順、王慶安 (2003)。國民教育數學學習領域綱要修訂之省思與期許。檢索日期：2008.6.2，<http://www.wfc.edu.tw/math/course/92-s-02-00.doc>。

歐用生 (1997)。教育研究法。台北：師大書苑。

歐用生 (1996)。課程與教學革新。台北：師大書苑。

歐用生 (1996)。初等教育的課程與教學。載於王家通，初等教育，241-275。台北：師大書苑。

歐用生 (1992)。開放社會的改革教育。台北：心理。

鍾靜 (2005)。論數學課程近十年來之變革。教育研究月刊，133，124-134。

薛承泰 (2003)。十年教改為誰築夢。台北：心理。

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.319-369). Information Age

活動報馬仔

一、 2008/07/06～2008/07/13

**11th International Congress on Mathematics Education
(ICME 11)**

地點：Monterrey, Mexico

二、 2008/07/17(四)～2008/07/21(一)

**32nd International Group for the Psychology of Mathematics
Education (PME32)**

地點：Morelia, Michoac- Mexico

三、 2008/07/20～2008/07/25

XXIX International Congress of Psychology

地點：Berlin-Germany

四、 2008/09/16～2008/09/20

The 3rd IEA International Research Conference

地點：TAIPEI, CHINESE TAIPEI

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

(1) 期刊論文，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

(2) 圖書單行本，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw