

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第19期

台灣數學教育學會

2009年09月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2009年09月出版 NO.19 2009

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師電子期刊 2009, 第十九期

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 19 期

2009 年 09 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 19 期

2009 年 09 月

序言.....	1
林碧珍	
課程實施的忠實性: What, Why, How及挑戰.....	2
羅珍珍、鄭震文	
開發數學建模的教材.....	15
梁崇惠、邱佩萍、施皓耀	
實施數學探究教學所遭遇的問題與解決之道：一位七 年級數學教師之行動研究.....	35
秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林	
活動報馬仔	59

ISSN 1815-6355

序言

林碧珍

國立新竹教育大學 數理教育研究所教授

台灣數學教師(電子)期刊是台灣數學教師學會誕生下目前唯一的學術性刊物，本期刊能自 2005 年 3 月起以季刊出版，至今能永續經營，這是主編楊德清教授辛勤耕耘的果實，更是身為數學教育社群一份子的驕傲！

本刊出刊已近五個年頭，已經度過了她的嬰幼兒期，現在該是邁入兒童期、少年期了，她需要改變體質，以她茁壯的體質爭取在社會科學學術刊物受到重視，佔有一席之地！身為數學教育社群的每一份子，都是肩負著改變本刊體質的重要推手，您的投稿、您的閱讀、您的引用、您的宣傳、您的審稿、您的編輯，都是改變本刊體質的重要營養素之一。我們期許某年的一天，她也會和科學教育學會的學術性刊物「科學教育學刊」一樣，進入 TSSCI。

台灣數學教師期刊第 19 期誕生了，這期雖然只有三篇，卻包含了課程、教材、與教學三大主題，而且第一篇由羅珍珍和鄭震文從國際觀點談論課程的實施，首先描述什麼是課程實施的忠實性(fidelity of implementation)? 為什麼需要研究它? 美國和台灣的學者專家是用那些方法來研究這個主題的? 並討論突顯有關研究這個議題的爭論和帶來的挑戰。

第二篇由梁崇惠、邱佩萍、施皓耀嘗試從真實生活情境中取材，設計一則數學建模教學示例，從學生傳統的學習過程改變為：「直覺--試誤--思索--猜想--證明」，以提升學生的數學論證能力，並啟發學習數學的興趣。第三篇是由秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林描述一位七年級教師實施數學探究教學所遭遇的如何「引導學生思考」、「幫助瞭解問題」、「鼓勵學生討論」、「改善教案」、「家長的反對」、「掌控時間」、「維持秩序」與「均等發言」等問題與使用「由臆測出發」、「鼓勵多元表徵」、「加分」、「使用數學史」、「充分溝通」、「放下主導權」、「訂定規則」與「抽籤」等策略來解決問題。

課程實施的忠實性: What, Why, How 及挑戰

羅珍珍¹、鄭寰文²

中山大學和美國西密西根州立大學¹、中山大學教育研究所²

摘要

課程實施的忠實性(fidelity of implementation)在數學教育中是一個被廣泛討論的新興主題。在這篇文章中，我們首先將提供一些背景：它是什麼？它的重要性為何？美國和台灣的學者專家是用那些方法來研究這個主題的？然後，我們將提出一些國內外代表性文獻，包括測量實施的忠實性(教學情境、涵蓋的內容範圍、融合教學情境與課程內容)和實施的指標，並討論突顯有關研究這個議題的爭論和帶來的挑戰。最後，我們將為這個領域有興趣進行研究的人，提出一些建議供未來研究參考。

關鍵字：課程實施的忠實性、八十二年版國小數學課程、九年一貫數學、教學內容涵蓋範圍

壹、背景(Background)

什麼是課程實施的忠實性？課程實施的忠實性是指教學是按照課程設計者的原意來實施的。除了數學教育，各領域的研究已經廣泛使用了課程實施忠實性的概念。例如健康教育、職業訓練、藥物治療等。在任何時候，如果有人想知道一個新的計畫或訓練是否有效果（或者比目前已有的更有效果），課程實施的忠實性議題將會浮現出來。

課程這兩個字在研究文獻中有多重意義。TIMSS 2003 (Mullis, Martin, Gonzalez & Chrostowski, 2004)提供了三種課程。第一是官方課程(official curriculum)，指的是學生必需學的課程，一般指的是國家制訂課程綱要，例如九年一貫課程綱要。第二是意圖課程(intended curriculum)，指的是由以上綱要設計出的課程，例如教科書、教學指引、教師手冊、課本、習作。第三是實施課程(implemented curriculum)，指的是實際教學內容，包含功課。課程實施的忠實性的研究一般是把焦點放在意圖課程和實施課程之間契合的程度。

近年來，課程實施的忠實性議題在數學教育中已經變成一個熱門的主題，因為在過去二十年，美國和世界各國都在進行課程改革。當然，政策制定者和社會大眾會想要知道是否所有的改革確實能改進教學和學習。這個問題在美國會熱門也是因為從幼稚園到十二年級所使用的已出版的數學課程間，在內容上依然存在的廣泛差異。這個現象是由於美國沒有國家統一制定的國家課程標準，即使在50個州的課程綱要之間也存在許多明顯的相異點。例如 Reys, Dingmon, Olson, Sutter, Teuscher 與 Chval (2006)發現，即使像正整數加法這種簡單的主題，各州對六個年級學生學習的期望仍然存在差異。在42個有公布課程綱要的州中，有29個州列出在三或四年級要達到熟練精準的程度。另外，一個州選擇一年級以及三個州選擇六年級作為達到他們對於這個主題能達成熟練精準的期望年級。為了應付這些不同的需求，教科書典型的作法是將每個州在一個特定年級所有需要的內容，都放進單一本教科書中。教師必需依據他們學區或州的課程指引或綱要

選擇適當章節來作為授課的內容。

早期著重在課程實施的忠實性方面的研究想要知道某個數學教科書、教學方法，或是新的教學和學習的教案對學生學習的影響。近年來的研究已經把焦點放在比較兩個或更多個數學課程的效果上，例如依照美國數學教師協會制定的課程標準所發展的數學課程(standards-based curriculum)和其他商業性出版的數學課程(Senk & Thompson, 2003)。這種焦點上的改變，已經對研究者產生了許多新的挑戰與爭議，因為這樣的結果已不再僅僅是學術上的產物。數學課程出版品在美國和台灣是很大的商機，在美國，一般的高中數學課本一本都在 70 到 100 美元，而任何數學課程只要被「獨立的，以科學為基礎的研究」(independent, scientifically-based research)證明是對改進學生的學習是有效的，都會立即獲得廣大市場的利益。然而，美國國立研究組織 (National Research Council, NRC) 主導的一個特殊委員會所做的回顧研究發現，沒有任何一個數學課程有充分證據的情況下能宣稱這樣的結果(NRC, 2004)。目前有許多大規模的、多年的研究計畫，使用多種工具去探究數學課程對學生學習的效果。但是要能宣稱課程有效，一個重要的先決條件是研究者能具體掌握課堂上教學實施與作者對這個課程的設計原意的契合程度。

貳、測量實施的忠實性(Measuring Fidelity of Implementation)

在這個部分，我們將討論一些測量實施的忠實性的一些方法。第一個方法著重在實施的教學情境。第二個方法著重在涵蓋的內容範圍，而第三個方法融和前面兩者：教學情境與課程內容。在討論每一方法時，我們將用一個或二個重要的研究來展示出這些方法。

教學情境

當代的美國數學教育改革運動可以追溯到美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 在 1989 年的出版品「學校數學的課程

和評鑑標準」。這份文件定義出學生學習的五個目標，就是學會評價數學（或懂數學的價值）、數學推理、用數學溝通、在做數學時對自己的數學能力有信心、成為數學問題的解決者。這樣的描寫呈現出一個讓學生主動學習的教學情境，而不是只有看教師演示數學習題的解答。因為這個所謂的標準課程需要一些時間才被應用到實際的課程設計。在早期，檢驗改革運動的效果的研究，傾向於著重在教學實施上的評量，而用來研究這種實施的忠實性最一般的方法，是調查法和教室觀察。

在美國，90年代的早期有一個有名的改革計畫，叫做 QUASAR 計畫，是針對中學經濟情況不佳或是少數族裔的學生設計的課程。當分析他們在課堂上收集的資料時，QUASAR 發現了一個按照課程實施教學的重要因素：數學題目在實施過程中的認知需求(Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Stein & Lane, 1996)。他們定義高層次的教學實施是將焦點著重在使教學內容有意義和作出內容間的連結，而伴隨的題目是複雜，較少架構，沒有明顯的解答，並且需要較長的時間去解決。低層次的教學實施則是著重在記憶，並且傾向於能利用簡短的固定步驟解答，且能在短時間內完成的例行練習。從四個不同的個案研究資料得到的 622 個在課堂討論的數學題目中，隨機抽出 144 個數學題目作為樣本來分析，他們發現在課堂中討論數學題目時，認知需求層次有降低的趨勢。只有 38% 需要較高認知需求的數學題目維持其認知層次。同時他們也發現，在數學題目認知需求能被維持在較高層次的教室裡學習的學生，在測驗中的推理和問題解決方面表現的比較好。QUASAR 另一個以課程標準為實施基礎的教學的研究焦點，是教室中的數學對話，Stein 和她的研究團隊剛出版一篇文章，包含了許多的參考資料及他們十多年來在這個課題的研究心得(Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008)。

在臺灣，八十二年版的國小數學課程實施忠實性的問題曾引發社會大眾及教學現場的教師的誤解，而導致此課程在實施了五年後，因爭議擴大遭修改。此課程是民國八十二年九月頒布，從八十五學年度由一年級開始逐年實施，由板橋數學課程研究小組開發實驗教材，在全省各縣市共有 70 個班級實驗，以收集教材

之適用性及課本、習作、教師手冊的意見為主(鍾靜, 1994)。八十二年版的國小數學課程強調兒童的數學認知發展、數學知識形成的過程以及有意義的數學學習, 其論及的「建構」用語是強調學生學習數學的過程, 教師轉型為佈題者, 教學方法由「講述式教學」轉向「討論式教學」, 未主張特定的教學法(劉好, 1999; 鍾靜, 1999, 2005), 但此課程在實施時, 許多教學現場的教師普遍未參與課程研習(劉好、易正明, 2000), 而劉好(1999)的文章中, 亦提到一些小學教師認為若要達到課程預定的目標, 在解題方法、學童計算能力、教師進度壓力、班級人數、教師專業知識和觀念、升學導向的風氣等方面, 會有許多困難, 若這些困難無法解決, 行政人員也無法給教師有力的支援和鼓勵, 就會造成教師在教學時無法忠實地將課程設計者的精神呈現而誤用了教科書, 也因而引發家長及社會大眾的誤解(鍾靜, 2005)。數年後, 九年一貫課程數學領域暫行綱要於民國八十九年公佈, 九十二年底公佈正式綱要, 九十四學年實施, 因此目前小學一到四年級的數學是實施正式綱要。與八十二年版實施的綱要不同的是, 92年正式綱要部編本的實驗班級僅有花蓮一所學校的4個班級和台東一所學校的1個班級, 而有關其課程實施忠實性的問題則尚未有研究報告。即使已經有課程分析的研究, 比較了不同版本的數學教科書在數學主題呈現方式之間的差異(游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊, 2007), 我們仍沒有搜尋到比較學生不同的學習潛在效果的任何研究。

涵蓋的內容範圍

這是另一測量實施的忠實性的方法, 例如透過教師日誌, Freeman 和 Porter (1989)主導的研究要求4位有經驗的四年級教師(從三所學校), 將他們一整個學年的教學記錄下來, 包含: 每個課程片段總共所花的時間; 課程的目的(goal)和目標(objective); 教學的本質; 在教學中提出的問題和教科書中指定的練習題。

除了教師日誌, 他們也進行經常性的訪談, 去檢驗關於教師使用的課程進一步的議題, 例如教師使用教科書的理由, 或是以一種特殊的方式使用其他教學材

料的理由。基於這些資料，他們辨認出三種使用教科書的不同類型：照課本教的(textbook-bound)、專注在基本知識(focus on the basics)、專注在地方學區的課程目標(focus on district objectives)。他們也發現四個小學教師之間使用的課程佔的百分比：從 13.2%到 60.6%不等。甚至同一位教師教導兩個不同群體的學生都有差異存在。例如 Andy 使用大約 43%的教科書內容教導他高程度的學生群體，但是只有用 13.2%去教導低程度的學生群體，其間的差異有三倍那麼多。此外，他們也發現在同一間學校的兩位老師，分配在概念和技巧的教學時間也不一樣。他們的結論認為，與一般的信念相反的，數學教科書的內容與小學課堂中教導的課程內容不盡符合。許多因素如：教學目的、學生能力、時間限制，以及在他或她對教科書在教學設計中所扮演的角色的信念，都會在實行數學課程時影響教師的決定。因為國內的數學教科書都是依據全國統一的數學課程綱要編排的，教師們都希望教導教科書中所有的內容給學生，一般都相信沒有教科書使用百分比的問題，但教師如何使用教科書內容可能仍會有差異存在。他們會直接使用教科書的例子和練習題，還是他們自己設計類似的問題取代教科書中的問題？再者，在步調上可能有很大的差異，就像個別教師用來補充的不同類型和數量的額外的教材？教師是為了什麼目的使用這些補充教材？這些差異將影響學生的學習機會並且應該進一步透過研究去檢驗。

融合教學情境與課程內容

直到最近，由於想要知道最有效的數學課程的公眾壓力，美國國家科學基金會(National Science Foundation, NSF)贊助了許多大規模的、長期的研究。這些研究通常是由研究團體主導的，其成員有資深和資淺的研究者、博士後研究者、研究生和大學生、以及測量、評鑑專家。例如中學數學的研究(MS)²和高中數學的研究(COSMIC)。兩者都是在密蘇里(Missouri)大學。

中學數學的研究(MS)²，其主要目的是去比較使用 NSF 資助設計的課程和出版商發展的課程兩者的學生成就，其中包含課程實施忠實性的測量，和標準課程

學習情境在 HLM 模式中的適合性。其中一個測量是蒐集了 39 位中學教師對於「內容實施記錄表」的自我報告(Tarr, Reys, Chávez, Shih, Osterlind, 2008)，其平均教導的內容大約佔教科書的 68%。要注意的是這個百分比是根據選項檢核表(table-of-content-implementation-record)，而不是教師日誌，這是一種為了讓更多的教師參與的權宜變通。為了補充這個檢核表的不足，(MS)² 的研究者使用額外的工具去測量實施的忠實性。

對於 39 位參與的教師，(MS)² 的成員進行一年三次的課堂觀察，為期二年。課堂觀察的一個目的是記錄教師及學生在課堂上或課後使用教科書或者其他補充教材的情形。此外，觀察研究員對教科書中每一課影響實際教學內容以及課程教學呈現的方法的程度各給一個 1-5 分的評分。除此之外，教師也在一年三次，一次十天的期間填寫詳細的教科書使用日誌，針對計畫使用的材料、實施課程和指定回家功課以便做三角驗證。

為了合併和量化從這些多種來源蒐集的資料，(MS)² 定義了單一量化的實施指標(Implementation Index)及其結果，包含：教學時教師使用教科書的相對次數(21%)；教學時學生使用教科書的相對次數(8%)；家庭作業使用教科書的相對次數(11%)；教科書對課程內容的影響(21%)；教科書對課程呈現的影響(17%)和教科書涵蓋範圍(21%)。

分析結果顯示，在 NSF 資助的課程實施團體和出版商發展的課程實施團體間，實施結果的平均指標有很小的差異存在(第一年：78.77 vs. 73.29；第二年：77.71 vs. 76.23)。使用階層的線性模型(HLM)顯示，課程類型對學生的成就而言不是一個重要的預測因子。Tarr 等人(2008)同意這可能是由於他們的實施指標在實施一個課程時，對於指出教師所做的大的變化並不靈敏。

由於(MS)²的經驗，COSMIC的研究團隊建構起一個更精緻和複雜的課程實施的忠實性測量，並且應用在他們研究高中的課程和學習的關聯為何的計畫中。他們現在使用兩個分開的檢驗，一個是**課程內容忠實性**：高中數學教師在每天的數學課中，教科書內容的使用程度為何？另一個是**課程呈現忠實性**：高中數學教

師在每天的教學中，使用教科書的教學方式與教科書的教學哲學一致的程度為何？此外，他們也在實施課程時，蒐集這些教師接收到的專業發展機會的資訊。這是NRC (National Research Council, 2004)所作的一個建議，是要區別那些已經提供機會給教師去學習如何成功實施課程的學校，以及沒有提供機會的學校。在課程內容忠實性方面，他們初步發現樣本中的高中教師教導 77%的教科書內容，而這個計畫仍在進行中。對這個計畫有興趣的研究者可以到計畫的網站找他們其他的初步發現：<http://cosmic.missouri.edu/>。而上述類似的研究在國內還沒有出現。

參、討論

在上述的內容中，我們討論了三種測量課程實施忠實性不同的方法。把焦點只放在學科內容或是其外顯，只能告訴我們關於課程實施的部分情形。Stein 和她的研究團隊警告我們只測量教師達成教科書教學的涵蓋率是不夠的，在實施課程中，還會有不預期的降低數學作業的認知需求的情形發生。但是，就算教師能在數學佈題及後續討論中維持認知需求，如果只教授一小部分的教科書內容，或是用了許多教科書以外的材料，課程實施的忠實性程度仍舊是不高的。學生學習的成就和教科書的關聯還是沒法建立。因此課程實施的忠實性程度的研究在測量上必須至少要同時兼顧教科書內容的涵蓋率及教學情境的重要元素，例如數學佈題以及數學對話認知度的維持。

密蘇里(Missouri)大學研究團隊的研究結果顯示，在他們研究中的國中和高中教師，教導教科書的內容超過 70%，這個比例是遠高過 Freeman 和 Porter 關於小學教師的研究，後者其比例則是從 10%到只有 60%之間而已。這個差異可能是許多因素造成的。例如可能是由於在 Freeman 和 Porter 的研究中，參與的教師較少，所以結果並不具代表性。這個差異也可能是因為小學數學教科書比國中或高中教科書涵蓋了更多的內容，導致選擇上的彈性變大。另外，這個差異也可能是因為使用了兩個不同的研究工具所造成的結果：一年之久的教師日誌和三十

天課程實施的記錄表格所收集到的資料是相當不同的。前者，當使用得當時，準確度應會比後者高很多，可是填寫一年的教師日誌是一件很費時的工作，如沒有研究者定時的監督，很可能會發生填寫遺漏或不實的情形。所以這種研究工具多用於小型的個案研究。然而，個案研究的結果要作為一般化的結果，其強度是很弱的。當一個研究的參與教師人數增加時，從每個教師中蒐集到資訊的類型，必須為了資料蒐集、管理和分析，作適當的調整。如何能依然保持測量上的準確度，對研究者來說是一個很大的挑戰。隨著電腦科技的發達，像電子記事本這類的工具有很大的潛能來幫助研究者提升測量的效度及信度，以及降低資料分析的複雜性。

(MS)²發現在國中學生的數學成就上，課程類型缺乏重要的影響，這意味著 NSF 資助的和出版商發展的數學課程，在學生的學習上有相同的效果。當他們在作研究報告的最後反思時，發現這也可能是因為(MS)² 研究團隊定義的實施指標，沒有抓到課程實施所有的重要元素(Tarr, et. al., 2008)。例如 Stein 和她的研究團隊發現對相同數學題目的兩個討論可能從同一點出發，可是隨著學生不同的反應及貢獻，結果可能會落在非常不同的認知需求層次，而導致不同的學習成果。在這個領域仍然需要更多質的研究去鑑定、發展和測量像討論認知需求層次這樣具影響力的元素。

美國密蘇里州州立大學哥倫比亞校區教學與課程所教授 Dr. Grouws 在 2008 年訪台，於嘉義大學演講結語時，透過下列這些問題來導引國內數學教育研究者的反思：

- 臺灣的教師如何使用他們的教科書？
 - 教科書內容涵蓋的範圍有多少？與美國的教師相似嗎？
 - 涵蓋什麼內容（強調的）？有教學內容忠實性的問題嗎？
 - 教學法有按照教科書作者所希望的嗎？
- 教師使用教科書與學生學習到的多寡有相關嗎？
- 教師使用教科書與提供的專業發展有相關嗎？

在國內，雖然有很多關於數學課程和教學的爭論，但是很少有研究真正去分析教科書教學內容涵蓋率和教學方法的問題以及這些變數對學生數學學習的影響，進而能夠回答前述 Dr. Grouws 提出的問題。對整個數學課程實施忠實性程度以及與學生學習效果的相關研究，可以由一組包含教授和研究生的研究團隊來做深入的調察。然而，對研究生來說，由於人力和時間有限，可考慮把焦點放在一個數學主題。例如針對學生的學習來比較兩個版本的課程(如南一版和康軒版)在整數運算和課程實施忠實性的程度和效果，哪一種版本的課程，教師比較會照著課本教？哪一種版本的課程可以更有效的幫助學生在整數運算這個主題獲得更深入的了解？這領域需要有更多的研究投入來替教改的各項爭議提出有科學基礎的實證。

參考文獻

中文部份

- 游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊 (2007): 數學領域教科書評鑑報告。輯於李隆盛、張芬芬編, **九年一貫課程之教科書總評鑑: 設計理念、能力指標與統整性 (上冊)** (IV-1~IV-127)。台北: 中華民國課程與教學學會。
- 劉好 (1999)。談落實國小數學新課程的教學。**國教輔導**, **38(4)**, 50-57。
- 劉好、易正明 (2000)。小學新課程數學科實施情況調查研究。**臺中師院學報**, **14**, 321-340。
- 鍾靜 (1994)。校長角色協助數學新課程實施。**臺灣省國民學校研習會 (編) 國民小學數學科新課程概說 (低年級)** (頁 197-204)。台北: 台灣省國民學校研習會。
- 鍾靜 (1999)。落實國小數學新課程之意圖與學校本位的進修活動。**課程與教學季刊**, **2(1)**, 15-35。
- 鍾靜 (2005)。論數學課程近十年之變革。**教育研究月刊**, **133**, 124-134。

英文部份

- Freeman, D. J. & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26, 403-421.
- Grouws, D. A. (2008, November). *Three hundred classroom visits: What did we learn?* Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematics teaching and the development of curriculum, National Chiayi University.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., and Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council (2004). *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations*. Committee for a review of the evaluation data on the effectiveness of NSF-supported and commercially generated mathematics curriculum materials. Jere Confrey and Vicki Stohl (Editors), Mathematical Sciences Education Board, Center for Education, Division of Behavior and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.
- Reys, B. J., Dingmon, S., Olson, T. A., Sutter, A., Teuscher, D., & Chval, K. (2006). Analysis of K-8 number and operation grade-level learning expectations. In B. J. Reys (ed.), *The intended mathematics curriculum as represented in*

state-level curriculum: Consensus or confusion? (pp. 15-58). Washington, DC: IAP-Information Age Publishing, Inc.

Senk, S. L. & Thompson, D. R. (2003). *Standard-Based School Mathematics Curricula: What Are They? What Do Students Learn?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50 - 80.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Stein, M.K., Grover, B.W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.

Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, O., Shih, J. & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 247-280.

開發數學建模的教材

梁崇惠^{1*}、邱佩萍²、施皓耀³

¹國立彰化師範大學科學教育研究所

^{2,3}國立彰化師範大學數學系

摘要

我國中小學生在近年幾次公布的國際數理成就測驗的表現上，成績都是名列前茅，但是有一項警訊就是低興趣與低自信，此現象是數理教育學者及教師們不可忽視且責無旁貸地要從研究與教學尋求改善之道。本文想先藉由分析數學建模的內涵與九年一貫數學課程的「連結」主題之各項能力，據此從真實生活情境中取材，設計一則數學建模教學示例，配合使用教具期能引起中小學生學習興趣，提升數學學習自信與數學論證能力。另外也希望提供有心以數學建模教學來改善上述現象的老師們一個參考，使學生原本的學習過程：「老師講授—學生模仿—練習與測驗」，改變為：「直覺—試誤—思索—猜想—證明」，這種轉變不僅切合教育部九年一貫課程綱要中所提列的教學活動型態，也是真正提升中小學生數學建模與解題能力並啟發學習數學興趣的關鍵。

關鍵字：數學建模、數學論證

壹、動機與目的

教育改革的許多措施皆立意良善，但其結果卻始終有許多無法令人釋懷的地方，如中小學生對數學的恐懼症未見有所改善，反有越來越嚴重的趨勢。2005年公佈 Third International Mathematics and Science Study - REPEAT [TIMSS-R] 研究調查結果即是一例，在問卷的趨勢問題中，相較於1999年的填答，不同意「我喜歡學數學」的國二學生百分比則增加16%；另外，學習數學自信指標，僅26%學生達高自信指標，遠低於國際平均百分比。因此透過創新教學來提昇學生的學習興趣與自信仍是數學教育上的一個重要的課題。去年公布之 TIMSS 2007 結果報告，一如往常，我國四年級和八年級學生的數學成績分獲第三名和第一名的佳績，但學生對數學的學習態度方面，四年級學生在36個列入排序的國家中敬陪末座，八年級學生則是在49個國家中排名第39，兩項均顯著低於國際平均。國內多數中小學生的數學學習過程往往是「課堂老師講授--學生模仿解題--練習與測驗」般地循環著，與生活嚴重脫節，除了考試外學生們實在感受不到數學的用途。前述國際評比高成績的背後隱藏著低興趣的隱憂，即測驗成績雖然高，卻未必對數理學習有興趣，更別說將數理研究視為個人的未來志業，由此顯示國內中小學學生亟需能增進其數學學習興趣的活動。有些數學教育學者 (Romberg, 1994; Harel & Trgalova, 1996) 建議可採取數學建模教學當作引起學生學習興趣的手段，同時鼓勵全班討論與小組學習的教室環境，配合使用電腦科技，以激勵學生學習，引導學生進行數學思考。

美國數學教師協會自 1989 年起陸續出版的一系列關於學校數學課程、教學、評量等各項的標準，期望學生應該重視數學，對自己的數學能力有信心，能解決數學問題，並且能用數學方法來溝通與推理。標準中強調數學觀念應該是以一種「探究導向」的態度，由學生發掘問題，而不是老師提出問題再來教導；朝向非例行問題的解題和推理；增加包括開放性的問題、發現數學理念、由經驗推

理、將數學與外面世界連接等方面的教學內容 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 1991, 1995, 2000)。而國內九年一貫課程綱要目標強調的是能力的開拓，要為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷，這有別於僅是知識的傳授。不但沒減低數學的重要性，反而能使數學課程顧及技術層面外，更重視與其他領域的連結，更強調解決問題，以及與他人溝通講理等各種能力的培養，這些能力就是幫學生發展如何學與樂於學的基礎 (教育部，2003)。

要使學生樂於學的關鍵就是要引發學生的學習興趣與動機，數學建模正是讓學生體驗主動觀察、形成問題，嘗試簡化與假設、建立與求解模型、檢驗模型等過程，學生在此探索過程中是主動的，除了積極地運用自己的數學知識、觀點與方法來解決問題，由嘗試錯誤到成功解決問題正可磨練其養成堅忍不拔、樂觀自信的態度。

綜合以上，本文想先藉由分析數學建模的內涵與九年一貫數學課程的「連結」主題之各項能力之關連，據此從真實生活情境中取材，設計一則數學建模教學示例進行教學，希望能提供有心進行數學建模教學的老師參考。

貳、數學建模的內涵

一、數學模型與建模

本質上，自然世界中的任何現實情形，只要它可以用定量的術語來描述，就能夠通過建立模型使它符合解析的規律。數學模型 (Mathematical Model) 就是用數學語言去描述與模仿實際問題中的數量關係或空間形式。Blum, Galbraith, 和 Niss (2007) 提出好的數學模型應具備下列特點：

(一) 對於待解決的問題有較全面的考慮

在一個實際問題中，往往有很多因素同時對所要研究的對象發生作用。進行數學描述之前，應全面地考慮這些因素。可以分三步進行：1. 列舉出各種可能影

響的因素。2.選取主要因素納入模型。3.考慮其他因素的影響，對模型進行修正。

(二) 創造性地改造已有模型或自創新的模型

待解決的實際問題，往往沒有現成的理論或模型可以套用。因此，評估一個數學模型的優劣往往要看其創造性，即是否能結合實際提出自己的獨到見解。若沒有辦法自創新的數學方法來解決問題，有時尋找既有的模型作出創造性的改進也是一途。

(三) 能在簡單與複雜、精確與普遍等特徵之間取得平衡

數學模型應能反映出實際問題的本質，如果考慮得太過簡單，易淪為未抓住問題的本質；若將所有因素均納入模型，則可能因過於複雜無法求解反而掩蓋了問題的本質。

(四) 注重結果分析，考慮在實際中的合理性

數學模型是一個從實際到數學，再從數學到實際的過程，從模型得到的結果是否符合實際便是模型好壞的重要標誌。

(五) 善於對模型進行檢驗

根據各種真實情況檢驗模型是判斷其合理性的重要依據。好的模型所做的預測應有穩定性，並可透過實際數據模擬，其實際可行性與有效性。

建模需透過了解、分析、探索現象來達成，建模的歷程除了要找出問題的答案，更重要的是過程中體驗概念化的了解、嚐試表徵化的資訊處理、詮釋模式與現象間的意義，累積這些經驗漸漸形成建模過程所需的能力。依照模式發展的程序來看，完善的建模過程必須包含模式啟動(model-eliciting)、模式探究(model-exploring)和模式調整(model-adapting)的活動。模式啟動主要在引起學生各式各樣的想法，模式探究偏重數學結構的導入，模式調整則是聚焦於統整和應用(引自楊凱琳、林福來，2006)。

二、數學建模的過程

數學建模 (Mathematical Modeling) 是把現實世界中的實際問題加以整理，寫成數學模型，求出模型的解，再驗證模型是否合理；並用該數學模型所提供的解答來解釋現實問題，做為解決現實問題的參考，我們把數學知識的這個應用過程稱為數學建模 (Andrews & McLone, 1976；葉其孝，1998)。在建立數學模型時，不可能、也沒有必要把原來實際問題中全部訊息毫無遺漏地加以考慮，只能考慮其中最主要的因素，甚至要捨棄部分的次要因素。而數學模型建立之後，實際問題轉化成了數學問題，便可用數學工具、數學方法去解答這個實際問題。但數學模型是否真正反映出實際問題中的關係與規律，尚待將解答接受實際的檢驗，看它合理與否來決定接受或再加以修訂。

數學建模應是一項具有挑戰性的學習活動，雖然數學建模存在許多不同的意義，但其必包含介於待建模的真實情境問題與模式的數學表徵之間的轉變，如圖一 (Murthy, Page, & Rodin, 1990)。

圖一插入在此

三、數學建模實例：七橋問題

柯尼斯堡 (Konigsberg) 位於普雷蓋爾 (Pregel) 河口附近，河上有 A、C 兩座島，共有七座橋使這兩座島與河的兩岸陸地 B、D 相通，現在想要找出一條路徑能走遍這七座橋，且每一座橋只能走過一次 (圖二)。

圖二插入在此

圖三插入在此

尤拉 (Euler, 1707-1783) 將該問題的圖形轉化成上圖三，每座橋用一條線表示，陸地則以線與線的交點表示，並且利用起點、終點的連線數特徵。在 1736 年提出「一筆畫模型」解決原問題的要求是不可能做到的。此一筆畫問題從原始問題的型態過渡到數學中的組合學模型，再藉由精確掌握特徵而順利以數學模型解決此類問題，充分反映了前述所列好的數學模型的五項特點。

叁、數學建模與數學教學

數學建模活動教學基本上是關於解決問題 (Problem Solving) 的教學，了解數學解題大師 Polya 的理論觀點是有必要的。

Polya (1957) 的名言：「在數學教學中必須有猜想的地位，教學必須為發明作準備，或至少給一點發明的嘗試。」，他特別強調解題教學中，解非例行性 (non-routine) 問題與猜想的重要，並堅持數學的學習過程應當讓猜想、合情推理佔有適當的位置，此思想深深地影響 NCTM 所制定的各項標準 (NCTM, 1989, 1991, 1995, 2000)。他提出了數學教學的三大原則：

一、主動學習原則：

為了有效學習，學生應當在給定的條件下，盡可能地自己去發現要學習的材料。讓學生主動地為問題的明確表述貢獻一份力量。

二、最佳動機原則：

為了有效學習，學生應當對所學習的材料感到興趣並且在學習活動中找到樂趣。

三、階段序進原則：

為了有效學習，應當先有一個探索階段；經過引入術語、定義、證明等的形式化階段，上升到一個較為概念化的階段；最後所學的材料經過消化吸收到學生的知識體系中。

另一位提出「學數學就是要學習用數學」的荷蘭數學大師 Freudenthal (1973) 在其名著 *Mathematics as an educational task* 中，提出了四個數學教學的基本原則：

一、「蘇格拉底方法」原則

蘇格拉底所做的就是在教學過程中讓學生再創造或再發現所教的東西，學生感覺一切都是當面發生的，而不是以教條形式灌輸的。

二、「再創造(re-invent)」原則

學一個活動的最好方法是做。學生應當透過再創造來學習數學，這樣獲得的知識與能力才會有更好地理解，且能保持較長久的記憶。

三、「數學化」原則

學生應當學習在最低層次，對非數學事物進行數學化（使之合乎數學精確性要求）以保證數學的應用，接著進到下一層次，能對數學事物進行局部組織。

四、「嚴謹性」原則

數學可加上一個有力的演繹結構，從而不僅可以確定結果是否正確，還可以確定是否已經正確地建立起來，這就是數學的嚴謹性，教數學也必須遵循這個標準。嚴謹性是相對的，有不同的層次，每個題材都有相應的嚴謹性層次，學生必須通過不同層次的學習來理解並獲得自己的嚴謹性。

綜合上述，我們可以看出數學建模教學活動不但符合 Polya 與 Freudenthal 兩位數學大師所一致推崇的教學方式與原則，且自 70 年代起便漸受到世界各國數學教育學者的重視，紛紛努力往中學階段推展，企望能往下扎根提昇競爭力。

肆、數學建模與「連結」之各項能力的關連

NCTM (2000) 的數學課程標準認為連結的意義在於使學生：認識和使用數

學觀念之間的連結；了解數學觀念彼此連結和互相建立以產生連貫的整體；在數學外的脈絡中認識與應用數學。

九年一貫數學領域課程中，有別於以往傳統的課程標準，特別在數與量、幾何、代數、統計與機率之外，加入第五個主題：連結。在這主題中，相當重視學生應該要能針對數學內部相關概念之間的連結，也要對數學與我們生活週遭的環境作連結。

數學要能與生活連結、要能與其他領域連結，才能落實，才有助於終身學習。連結的內涵如下（教育部，2003）：

- 一、察覺：察覺生活以及其他領域的某些情境中有數學的要素，可藉助數學觀點的切入，使情境的情景變得清晰。
- 二、轉換：把察覺到的數學要素，以數學的語言表出，把情境待釐清的問題轉化成數學問題。
- 三、解題：解答轉化後的數學問題。它必須植基於數學本身的技能，有時候更要把數學的內容主題（數與量、圖形與空間、統計與機率、代數）融會貫通，這屬於數學內部的連結。
- 四、溝通：與自己以及與他人溝通解答的過程與合理性。因為解答的是經過轉化的問題，我們必須了解數學語言的真意，它與一般語言的異同，我們要一般語言與數學語言說明解題的過程與答案的屬性、合理性，使得數學式的解答有助於情境的了解。
- 五、評析：評析情境的轉化及其後的解題，兩者的得失，闡釋原來的情境問題，提出新觀點，或必要的調整，同時能將問題解法一般化。

經過察覺、轉換、解題、溝通及評析後，連結完成了一周的歷程，不但有助於情境的了解，而且也能掌握數學的方法。一方面可增加數學素養，廣泛應用數學，提高生活品質，另一方面也能加強數學式的思維，有助於生涯中求進一步的發展。

九年一貫的連結主題，希望貫穿數與量、幾何、代數、統計與機率等數學領域來培養學生覺察、轉換、解題、溝通和評析等能力。對照數學建模的過程，學生要先「覺察」現實世界中的實際問題，考慮與分辨其中的主要因素，建立數學模型後，實際問題「轉換」成了數學問題，再以合宜的「解題」方法求出模型的解，並用該數學模型的解答來「溝通」並解釋實際問題，最後「評析」與驗證模型的解答是否合理。由此顯示數學連結主題的能力與數學建模教學所強調要培養學生的能力是一致的。

伍、數學建模教學示例的設計理念、原則、目標與反思

設計理念

一、Freudenthal 的再創造 (re-invention)

荷蘭數學教育大師 Freudenthal (1973) 認為，學習數學的唯一正確方法是實行「再創造」，也就是由學生本人把要學的東西自己去發現或創造出來；教師的任務是引導和幫助學生去進行這種再創造的工作，而不是把現成的知識灌輸給學生。這是一種最自然的、最有效的學習方法。

「再創造」應使學生體驗到：只有透過自己的再創造而得的知識才能被掌握與活化應用；更為重要的是，數學是人的一種活動，我們也必須在做數學中學習數學，也就是在創造數學中學習數學。

二、促進大腦成長的重要因素

洪蘭 (2004)指出，在大腦的研究中，我們看到學習最重要的是「主動」，如果是被動的做一件事並不會增加兩個神經元之間的連接，而神經元之間連接的密度是我們對智慧的新定義。如何促進孩子大腦神經元之間連接的密度，才是我們應該要重視關心的事。因此，在課程與教學設計上要注重：1.充滿挑戰性的學習環境；2.可得到相互回饋的學習方式。

我們的大腦非常有效率，且具有調適能力，我們生存就是建立在適應能力和善於尋找其他的解決方法。一般的教室教學經常窄化了學生的思考策略和解決問題的方式，堅持只用一種方法和堅持唯一「正確答案」的教育工作者應深思人類得以存活幾千年，靠的是嘗試新事物，而不是只是找出「正確」的舊有答案。

原則

高品質的教學應該鼓勵學生具備另類的思考、多元的答案和有創意的洞察力。因此，數學教學應該要能促進師生及學生之間的對話，而好的問題或任務(Task)則是成功與否的重要因素，本文提出的數學建模教學活動示例之任務是與學生生活情境有關、能引發學生間的對話及創意思考，並能促使學生運用數學知識建立模型來解決問題。

下列四點為我們考慮如何引發中小學生主動學習數學的設計原則：

- 一、活動或任務須是源自真實情境的問題。
- 二、要探究此活動或任務的問題必須要簡化問題，並建構一個適當的模型，許多不同的數學概念均可被用來建立模型。
- 三、求解過程可以使用各種不同的數學程序，例如考慮特定數值、描繪特定點、模擬等等。
- 四、此問題或任務可以引出一般化或其他有趣的問題及其解決方法。

目標

在附錄的數學建模教學活動示例中，我們一方面以模式引出、模式探究、模式調整的架構來設計，另一方面以九年一貫數學課程中的連結主題所列出的五項數學能力來檢視該教學方案是否具備促進中學生數學建模能力的內涵。教學目標為：

- 一、協助學生體驗生活情境與數學的連結過程，培養學生從數學的觀點考察周遭事物的習慣，提高數學建模的能力。
- 二、讓學生體驗並注重形與數量的聯繫，在實測與直觀中，獲得數、量、形的概念，並逐步適度地抽象化，進而體會數學的模式 (pattern)。

反思

本教學示例設計是要讓中小學生體驗利用數學建模轉化問題的探索活動，藉此培養學生探索與解題的能力。當學生完成指定任務時，更督促他們進一步藉由改變原來的問題與條件，嚐試提出新的問題與解決的方法。學生從嘗試錯誤到試驗成功、片面到全面、部份到全局的過程中，改進原問題與求解方法，運用新的想法和方法來設計新的問題，學生進行創新設計與數學建模的能力儼然已生。

陸、結語

科學美國人資深作家 Martin Gardner 曾說：「喚醒學生最好的辦法是向他們提供有吸引力的遊戲、智力問題、魔術等或那些呆板老師認為無意義而避開的東西，數學必須是能使學生獲得愉悅與滿足的經驗。」

若以 NCTM 的標準來看，好的教學活動實例實在不易開發。我們可清楚看到本文附錄的示例設計與進行過程，確實符合上述提到關於數學建模與探究的精神。在教育部九年一貫數學課程綱要中幾乎未見到連結主題教學具體的實例，這可能會使中小學老師們陷入各自解讀的情況。期盼有更多有心的第一線教師團隊，一起努力來開發學生樂於學，學習如何學的數學活動。

參考文獻

中文部分

- 洪蘭 (2004)。歡樂學習理所當然。台北：天下文化出版公司。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。
- Polya, G. (1957/2006). *How To Solve It (A New Aspect of Mathematical Method)*.
蔡坤憲(譯)。怎樣解題。台北：天下文化出版公司。
- 葉其孝 (1998)。中學數學建模。中國：湖南教育出版社。
- 楊凱琳、林福來 (2006)。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。科學教育學刊，14(5)，517-543。

英文部分

- Andrews, J. G., & McLone, R. R. (1976). *Mathematical modeling*. London/Boston: Butterworths.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Harel, G. & Trgalova, J. (1996). Higher Mathematics Education. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of Mathematics Education* (pp.675-700). Boston: Kluwer.
- Murthy, D. N. P., Page, N. W. & Rodin, E. Y. (1990). *Mathematical modeling: A tool for problem solving in engineering, physical, biological and social sciences*. U.K.: Pergamon Press plc.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

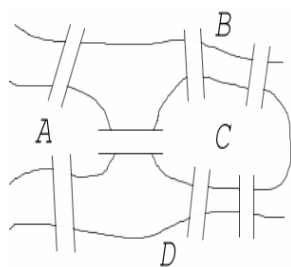
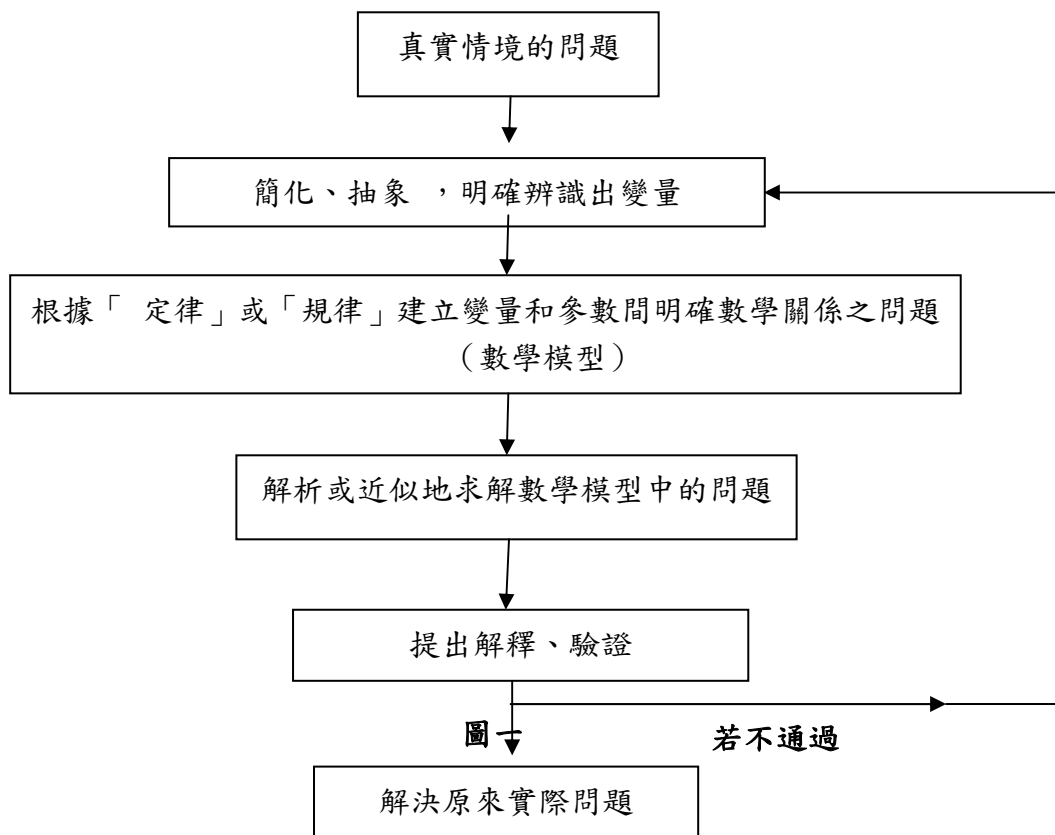
National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

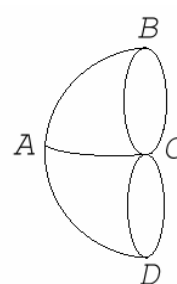
Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp.3-44). NY: Springer.

Romberg, T. A. (1994). Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem solving: Connections Between Theory and Practice. In A. H. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. NJ:LEA.

圖表頁



圖二



圖三

附錄一：數學建模教學活動示例（河馬吃水蓋好玩）

一、簡介

本教學示例設計構想來自市面上一種叫做「河馬吃水」的益智玩具。益智玩具或遊戲背後往往有許多值得探討的奧秘，你可以用玩玩具的心情，認真地來「解」與「剖」析設計此玩具的數學原理，實地進行一趟數學探索之旅。

圖示與任務如下：

六隻可愛的河馬，每隻有兩條不同長短的腳，要把牠們全部插進水塘內，好讓牠們的嘴都能接觸到水面，喝水解渴。



二、教學目標

藉由合作探討如何完成河馬吃水玩具的任務，體驗問題的已知與待答、轉化問題求解、判定解的存在性與唯一性等，從而理解玩具的設計原理並親身經歷數學建模的精神與過程。最後再深入思考進一步延伸原設計的可能性。

三、器材

河馬吃水玩具、紙筆。

四、設計流程（括號內的代碼為九年一貫數學課程的連結的代碼）

老師講解任務，讓學生自由探索：隨機拼湊、嚐試錯誤，辨識問題的關鍵因素，從操弄中思索如何完成任務。

↓ 分析 (C-R-01)

學生實際操作後，寫出已知條件，得悉待解問題：將河馬全部排入洞中的組合方式。
有待澄清：是否有解？只有一種解嗎？

↓ 轉化 (C-T-04)

測量六隻河馬的腳長、12 個洞的深度，並將數據轉成代號，轉化原問題為可看到整體全貌且較簡單的狀態，並畫出原問題的數學模型。

↓ 求解 (C-S-04)

解析數字配對組合的可能性，確定解的存在性。

↓ 證明 (C-C-06)

利用演繹推理，論證解的唯一性。

↓ 延伸 (C-E-02)

在原問題的條件下，更動一個條件，設計出最多解的情況並證明其正確性。

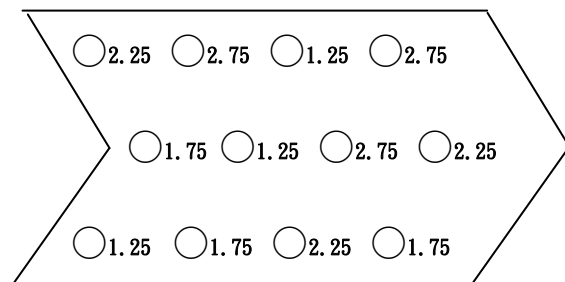
五、教學過程

- (一) 老師拿出河馬吃水的教具，講解完河馬吃水的任務後，發下教具給學生，兩人一套為原則。學生們自行決定要如何完成任務。多數學生以不斷地嘗試錯誤的方式解題，嚐試錯誤有時雖然是解決問題的一種辦法，但是往往無法見效。
- (二) 當學生們嘗試許久卻不得其解之後，漸漸有該如何辨識出問題中的關鍵因素的感覺。這時提醒他們關於 Polya 的解題思維與步驟：1. 找出問題的已知條件與待解問題是什麼？2. 把已知條件的訊息寫下來。3. 執行擬訂的方法。4. 回顧問題與延伸問題。
- (三) 根據小組討論的結果，已知條件是：6 隻腳長不一樣的河馬，12 個不知道深度的洞；待解的問題是：如何安排這 6 隻河馬的位置，讓牠們都能完全貼合插入面板上的 12 個洞。
- (四) 進行測量：將面板上 12 個洞的深度與河馬的腳長分別量出來。

六隻河馬的腳長

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th	6 th
前腳長度 (cm)	2.75	1.75	2.75	1.25	1.75	1.75
後腳長度 (cm)	1.25	2.75	2.25	2.25	2.25	1.25

面板上十二個洞的深度

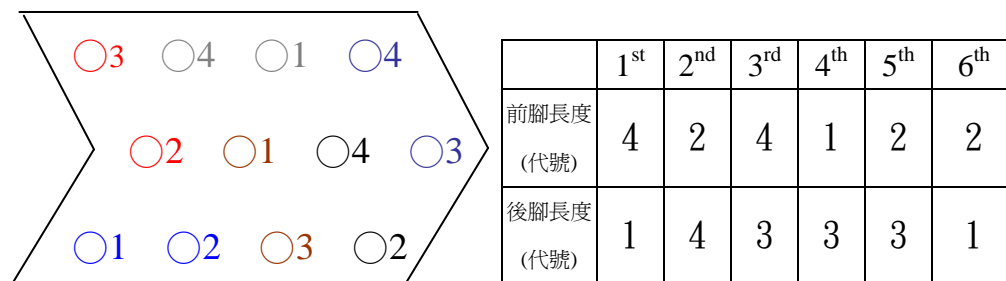


- (五) 原來的任務轉化為上圖的表徵，就可清楚看到問題的整體全貌。
- (六) 簡化數據：避免小數點數字過於繁雜，我們將腳長最短的(1.25 cm)到最長的(2.75 cm)依序訂為 1、2、3、4。每個洞的深度也分別由最淺的到最深的對應地訂為 1、2、3、4。
- (七) 轉化問題：數據簡化後，可以輕易看出原來的問題其實是數字配對問題。參照之下便有效率地將 6 隻河馬都完全放入對應的位置了。

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th	6 th
前腳長度 (代號)	4	2	4	1	2	2
後腳長度 (代號)	1	4	3	3	3	1

- (八) 教師提問：解的存在性與解的唯一性在數學中的地位是很重要的，解的存在性隨著實際排出的結果已經得到驗證。但是，是否只存在一種解呢？
- (九) 經過各組同學排出的結果比對後發現都是同一種解法，學生們猜測應該是只有一種解。教師提問：請提出證據說明完成任務的方法是唯一的。
- (十) 老師提供 6 張骨牌教具，分別是 $(4, 3)(4, 2)(4, 1)(3, 2)(3, 1)(2, 1)$ ，及一張空白面板，學生透過動手操作骨牌來回答以下的提問。此時河馬吃水玩具完全退場，改以骨牌來蓋對應的數字的方式，簡稱「蓋好玩」。

(十一) 解的唯一性之證明：(此法是一位小學三年級的學生在課堂上推出來的)



The diagram shows a hexagonal board with 12 holes arranged in three rows. The top row has holes with numbers 3, 4, 1, 4. The middle row has holes with numbers 2, 1, 4, 3. The bottom row has holes with numbers 1, 2, 3, 2. To the right is a table with 7 columns (1st to 6th) and 3 rows (Front leg length, Middle row, Back leg length).

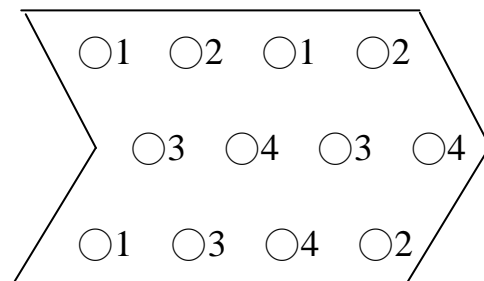
	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th	6 th
前腳長度 (代號)	4	2	4	1	2	2
後腳長度 (代號)	1	4	3	3	3	1

1. 觀察上圖的面板中，12 個洞分布的位置不一，但是其中只有一組 $(3, 1)$ ，故我們可以確定 4 號河馬一定是放在 $(3, 1)$ 的位置；
2. 4 號河馬確定後，可以明顯發現，6 號河馬也跟著確定位置，一定要放在左下角的 $(1, 2)$ ；接著，5 號河馬只能放在左上的 $(3, 2)$ 的位置；
3. 然後 1 號河馬確定在 $(4, 1)$ 的位置；3 號河馬確定在 $(4, 3)$ 的位置；最後 2 號河馬確定在 $(4, 2)$ 的位置。

(十二) 結論：

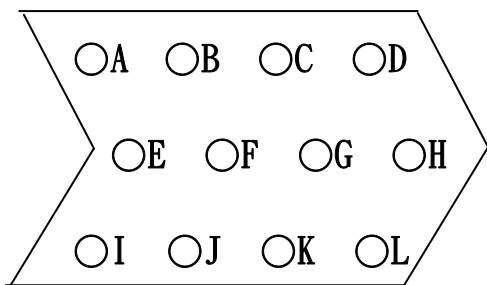
1. 由以上的推理，得證河馬吃水玩具的設計只有唯一解，難怪一開始嚐試錯誤成功的機會不大，總是會遭遇到第 6 隻河馬擺不進去的情形。
2. 我們學到原先是以嘗試錯誤的方法找解，當我們辨識出已知條件與待求問題後，將原問題轉化為數學數字組合問題，提出一個數學模型並加以求解，推理出該模型有唯一解，並回到原問題排出河馬吃水的解答。

(十三) 老師提問：當我們試著改變這些洞的位置時，應該會形成新的問題。例如，這個面板會是有解的嗎？



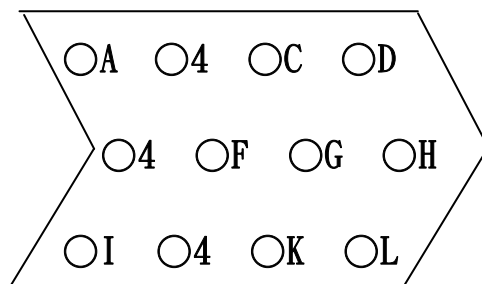
(十四) 老師提問：如何設計出有最多解的面板呢？(此法是 2 位國一學生課後合作完成的)

為便於說明，先將面板上的 12 個洞分別編碼為 A、B、C... I、J、L。

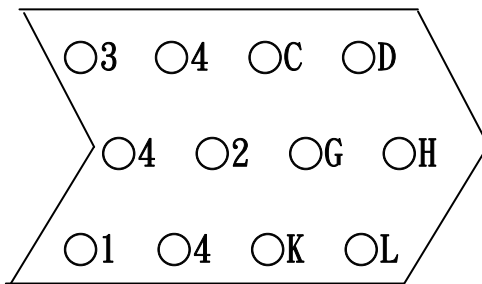


	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th	6 th
前腳長度 (代號)	4	2	4	1	2	2
後腳長度 (代號)	1	4	3	3	3	1

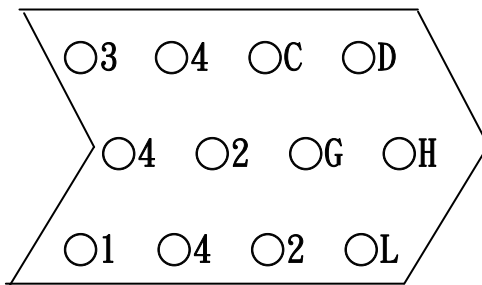
- (1) 因為 A、I 的位置在角落上，所以 (B, E) (E, J) 這兩個地方不可能放河馬，否則 A、I 便會被孤立，以致無法完成任務。
- (2) 既然 (B, E) (E, J) 不能放河馬，而河馬腳的長度也沒有前後腳相等長的情形，所以較好的策略是在 B、E、J 三處放入相同的數字，例如 4。



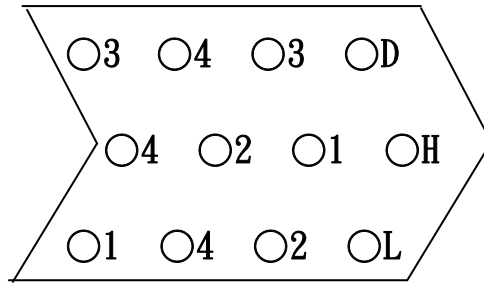
- (3) 接著決定出 A、F、I 的數字為 3、2、1。



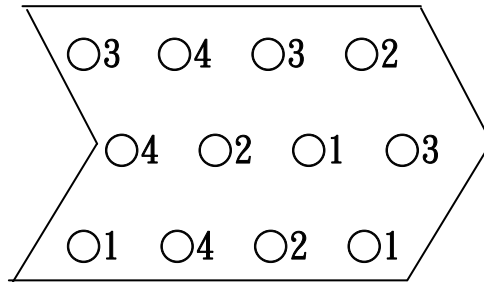
- (4) 剩下的六個空位 C、D、G、H、K、L，則分別放入剩下的 (3, 2) (3, 1) (2, 1)，不讓相同數字相鄰，以利製造出更多解的可能性。我們決定先把 2 放在 K 的位置，如此可以讓 (4, 2) 多一個可能放的位置。



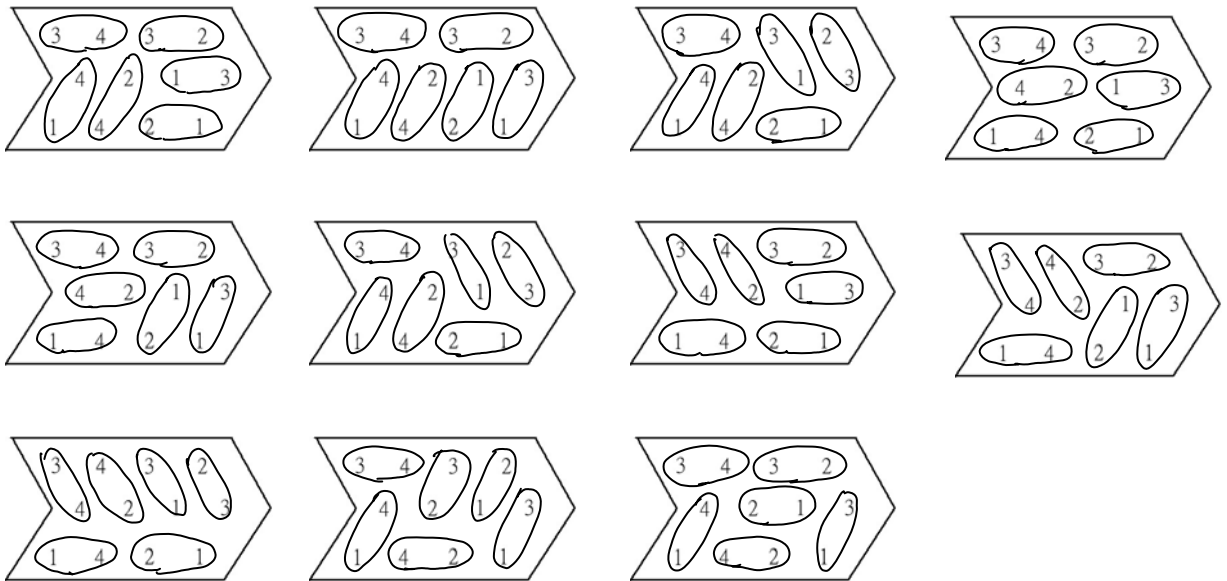
(5) 因為在 F 的數字為 2，環繞 F 的位置已有三個 4 及一個 2，故 C、G 位置要放入 1、3。



(6) D 的位置放 2，H 的位置放 3，L 的位置放 1，完成如下的設計圖。



(十五) 根據我們在推理解的唯一性時所使用的方法，列出改變面板數字位置所造出有最多解 (11 組解) 的情形。



附錄二：數學建模教學活動示例照片(河馬吃水蓋好玩)

小學生們開始以嚐試錯誤試圖找出解答



小三學生上台，論證河馬吃水問題只有一組解



學生們改成用給定的 6 片骨牌來蓋面板上的數



實施數學探究教學所遭遇的問題與解決之道：一位七年級數學教師之行動研究

秦爾聰¹、林勇吉²、林晶珮³、段曉林⁴

國立彰化師範大學 科學教育研究所^{1,2,4}

南投縣立水里國民中學³

摘要

本研究旨在描述一位實務教師，在七年級課室實施數學探究教學所遭遇的問題與解決之道。本研究是行動研究，期間歷經三次主要循環。資料蒐集包括「課室錄影錄音」、「學習單」、「學習日誌」、「訪談」與「教學日誌」。研究結果發現，教師在實施探究教學時遭遇如何「引導學生思考」、「幫助瞭解問題」、「鼓勵學生討論」、「改善教案」、「家長的反對」、「掌控時間」、「維持秩序」與「均等發言」等問題，並使用「由臆測出發」、「鼓勵多元表徵」、「加分」、「使用數學史」、「充分溝通」、「放下主導權」、「訂定規則」與「抽籤」等策略，解決問題。

關鍵字：行動研究、數學探究教學

壹、前言

「都講那麼多次了，為什麼還是會錯呢？」

這是研究者在近年的教學中，一直感到困擾的問題，研究者進一步深思：這是否意味著研究者的教學有問題？因緣際會下，研究者學習數學探究教學理論（inquiry-based mathematics teaching）（或稱探究教學），深刻體會到，如果不能實施以學生為中心的教學，讓學生在探索問題中，應用數學知識，這些問題將重複發生（Cooper & Harries, 2002），因此改變傳統的教學方式，實施改革取向的探究教學，才能夠真正幫助學生，因為探究教學中，學生參與開放式的問題，透

過對這些問題提出想法（臆測）、說明支持這個想法的理由（論證），以及接受老師或其他學生的挑戰（驗證），能主動獲得知識，改善學習成效（McNeal & Simon, 2000）。

為了促進教師實施改革取向教學，學者們建議探討教師實施改革取向教學時所遭遇的問題，以及如何解決問題的經驗（Mills, 2007）。因為這不但可以最直接提供實務教師發展探究教學的重要參考，同時也間接幫助研究者瞭解教師改變課室教學的過程（Edwards & Hensien, 1999）。

「行動研究」被師資培育界視為廣泛瞭解教學情境與促進高品質教學的最佳工具（Krainer, 2006）。教師與整個研究團隊（如同儕、師資培育者或研究者）共同工作，提供教師進行行動研究的支持，藉此幫助教師發展探究教學（Buck, Latta & Leslie-Pelecky, 2007）。因此，行動研究在本研究扮演兩種角色，首先在行動研究的循環過程中，呈現教師如何解決探究教學時的問題與解決策略；此外，也作為支持教師發展探究教學的手段，透過「閱讀文獻」、「反思課室實務」、以及與「研究團隊」（一位具三年探究教學經驗教師、二位師資培育專家）討論，整合上層（理論）與下層（實務）知識（Krainer, 2006）。

基於上述，本研究目的為：探討教師發展數學探究教學時，所遭遇的問題與解決之道。

貳、文獻探討

一、數學探究教學

前述我們已經提及 McNeal 與 Simon（2000）對探究教學的若干定義，其主要意涵是將探究教學視為「臆測-論證-驗證」的過程；在此我們進一步討論其他文獻之見解。

American Association for the Advancement of Science [AAAS]（1993）認為探

究是數學家在研究數學所進行的工作，可描述為探索循環（a cycle of investigation），透過這個循環發展數學觀念的有效性。這些循環是：「表徵」（representation）、「操弄」（manipulation）與「驗證」（validation）。「表徵」意謂使用符號或算式來表徵真實世界的問題。「操弄」意謂依據邏輯規則、移動這些數學符號、獲得答案。「驗證」在數學中是判斷，而非權威，一個解答的好壞，應該關係這個問題是如何形成的，以及解題的過程如何實施。

Whitin (2006) 認為探究教學，是使用學生的「觀察」和「問題」當作跳板，例如當學生知道 $6+4=10$ ，那麼可以進一步詢問有哪些三個數相加，也可以得到同樣的結果（如 $2+4+4$ ）。原來的問題，可以導致更多的小問題（臆測），這就是探究的機會。

Siegel, Borasi 與 Fonzi (1998) 的探究環（探究教學架構），提出探究應包含「準備和聚焦探究」、「執行探究」、「綜合與溝通來自探究的結果」、「評估與延伸」，等四個連續的循環，其理論重點應在於「評估與延伸」階段，這個階段的核心就是「反思」先前探究的成果。

綜合上述，本研究定義探究是學習數學的過程，包括：「探索」（探索已知的數學知識與題目間的關係）、「臆測與論證」、「驗證」與「反思」（反思整個探究過程，並提出新的問題），並據此提出探究教學架構（表 1）。

表 1 探究教學架構

二、教學活動設計理論

我們依據研究需要分別在行動研究循環一使用 Zaslavsky (2005)「不確定性」（uncertainty）與行動循環二、三使用真實數學教育（Realistic Mathematics Education [RME]）的活動設計理念，先行說明如下：

Zaslavsky (2005) 認為教學活動中的「不確定性」可促使學生進行有意義與

深度的學習（探究學習）。所謂「不確定性」，意謂學生在解決問題的過程中充滿不確定性，不是簡單、直接可獲致答案。這個過程通常由一個臆測改變至另一個臆測，最後才通往有效（valid）結論。

Realistic Mathematics Education [RME]主張數學是人類的活動，數學教學應該被組織為「引導式的再發明」（guided reinvention）（Gravemeijer, 1994），所謂「再發明」是學習過程的步驟，而「引導」是指提供一個能夠讓學生經歷這些學習步驟的教學環境，這意謂學生需要被引導經歷像數學家學習數學的過程，而「數學史」是一個很好的媒介，可用在引發探究的活動設計上。

三、 實施探究教學所面臨的問題

Lawson（1995）指出，教師在科學探究教學中，面臨兩個最普遍的問題是「時間與精力」與「進度問題」。關於問題一，多數教師認為致力於發展良好的探究教材必須花費很多時間，並且在教學過程中，必須花費許多精力。關於進度，部分教師認為為了配合考試與學校的規定的課程，教師沒有時間進行探究教學。Lawson也提到解決這些問題的關鍵，在教師改變傳統信念與培養學生探究學習的習慣。

基於Lawson的研究，研究者在實施探究教學時，特別關注這兩個問題，希望透過有效的教案設計，或是流暢的組織教學，克服這些問題；但實際教學時，研究者仍面臨了「進度問題」（見研究結果）。

參、 研究方法

一、 研究情境

本研究在七年級上學期的數學課中進行，期間歷經三個學習單元：「絕對值」、「一元一次方程式」（包含以符號列式、一次式運算、一元一次方程的解法）與「一元一次方程式的應用」。依據研究者過去的教學經驗，學生在這三個單元

上，往往缺乏概念性的理解（conceptual understanding），常出現記憶教師講法或公式化解題的行為。為了解決教學者在課室所面臨的實際問題，故特別選取這三個單元作為行動研究的教學主軸。教學單元與時間如表 2：

表 2 教學單元、目標與時間

二、研究方法

本研究以 Mills (2007)「辯證行動研究螺旋」(dialectic action research spiral) 為架構 (圖 1)。Mills 回顧先前許多模式，歸納出這些行動研究模式中，都包含四個共同元素：(1)「確認聚焦處」：研究目的是基於問題或聚焦之處 (area of focus)；(2)「蒐集資料」：觀察和監控這些實務；(3)「分析解釋資料」：整合所得資訊；(4)「發展行動計畫」：展開行動，並在行動後再度回到 (1)，成為循環。有別於其他模式，Mills 的特點在他強調行動研究的過程，可依據研究需要，適時改變程序，例如從「確認聚焦處」到「蒐集資料」後，可能發覺聚焦方向需調整，而重回到「確認聚焦處」，改變研究聚焦，重啟「資料蒐集」。

圖 1 辯證行動研究螺旋

基於此架構，本研究在各階段的主要工作為：

1. **確認聚焦處**：本研究主要目的在探討教師實施探究教學所面臨的問題與解決之道。
2. **蒐集資料**：本研究蒐集五種資料。說明如下：
 - (1) **課室錄影、錄音**：共十九節課（每節 45 分鐘）。使用「錄影」、「錄音」的方式紀錄上課內容。錄影機共有二台，第一台架於教室後，主要拍攝「師生對話」與「學生發表」之全班性互動。第二台由協同研究者於各

小組拍攝，紀錄有意義或特別的討論。學生開始探究時，協同研究者會先巡視各小組的討論，當發現有值得注意的對話或討論時，便會停下來特別錄影，直到這個對話過程結束。此外並於各小組置錄音機，主要在記錄同學間討論時的對話。錄影、錄音可能會疏漏部分複雜的討論與探究過程，對此我們利用學生在學習單的表現與訪談彌補。

- (2) **學習單**：每位學生皆需繳交，三個教學主題共三份。學生需將解題想法紀錄在學習單中。非各組繳交一份的原因是若僅交一份，部分學生會置身事外，認為只要有人寫出答案即可，因而減低投入程度；此外，小組雖然討論後才填答學習單，然而小組中成員可能有額外的個人想法，可以將這些想法紀錄在學習單上，幫助研究者分析學生的學習。
 - (3) **學習日誌**：每位學生皆需繳交，三個教學主題共三份。主要讓學生紀錄探究過程中的收穫與心得，並對整個過程進行反思，藉以提供研究者分析和解釋學生的學習，其大綱有三：(1) 在這次活動中，我學到了？（如數學知識、探究技巧或其他）(2) 在這次的活動中，讓你印象最為深刻的是？(3) 在這次的活動中，你覺得自己表現如何？（探究能力、上台報告、對小組的貢獻等）
 - (4) **訪談**：當教師初步閱讀上述研究資料（如課室錄影、錄音或學習單等），或是活動中對於學生表現有疑慮之處，便利用早自修時間（45分鐘），對特別學生進行一對一訪談。
 - (5) **教學日誌**：每次課後，研究者會紀錄該次的教學反思（共十次，見表2），大綱如下：(1) 此次教學的大致情形（如學生的表現）。(2) 此次教學的心得與反思（如覺得自己哪裡表現不好，可以怎麼改進）。
3. **分析和解釋資料**：本研究參考 Warfield, Wood 與 Lehman (2005) 的質性分析程序，首先將部份資料進行轉錄，接著將上述五種不同資料逐一檢視，進行互相比較，瞭解其關係，藉此勾勒教師在行動研究中所遭遇的問題，並尋求解決之道。例如研究者想瞭解在「絕對值」單元教學上的缺失，先與研究團

隊逐一檢視這個單元的「課室錄影、錄音」、「學習單」、「訪談」、「學習日誌」與「教學日誌」，接著研究者先提出自己在本次教學過程中的反思，陳述一些教學中的問題，例如「學生的探究狀況不佳」；此時研究團隊其他成員根據研究者的陳述，提出更進一步的問題，如：「學生都是怎樣解決這些問題？」，進行共同討論與磋商，並視情況重新回顧上述研究資料，與參考探究教學相關文獻最後擬出新的行動計畫，例如「改變探究教學活動的設計方式」等。

4. **發展行動計畫**：依據上述分析和解釋資料的結果「發展行動計畫」，如擬定教學計畫或提出問題的解決之道。

三、研究參與者

1. 個案班級

本研究學校位於南投地區，中小型規模，全校共 21 班，七年級有 7 班。本研究選取七年級的一個班級作個案班級（研究者為數學科任教師），因該班學生較為活潑，上課時，師生與生生間的互動頗為熱烈，有利於探究時討論活動的進行。

本探究教學是以（小組）合作探究的方式進行。依照學生暑期輔導數學成績與第一次段考數學成績的平均，以 S 型方式對學生進行分組，共分七組，每組四人，包括一位高數學成就（前 25%）、二位中數學成就（中間 50%）及一位低數學成就的學生（後 25%），然其中一組僅三人（ $n=27$ ，男生=10，女生=17）。

2. 研究團隊

本研究團隊成員有一位具三年探究教學經驗的教師、二位師資培育者。該教師曾參與國科會三年的探究教學專業成長計畫，在此期間學習探究教學，並在計畫結束後，實際在課室中進行探究教學，約三年的時間，具有良好的探究教學能力，能提供研究者許多實務上的建議；兩位師資培育者中，都具有良好的探究教學輔導經驗，成功協助許多教師進行探究教學。

在運作模式上，研究者會先初步規劃該次上課的課程內容，接著將這些內容與研究團隊互相討論，擬定教學活動的初稿，接著實際進行教學，並在完成一個教學循環後，將實際發生的問題與研究團隊討論，作為改進下次教學的依據（相關內容可見上述「分析和解釋資料」）。

四、資料編碼

本研究使用「資料來源-日期-對象」作為編碼的依據，編碼說明如表 3：

表 3 資料編碼說明

五、研究信度考驗

本研究以「不同研究人員的三角校正」與「資料來源的三角校正」作為信度考驗之依據（相關範例可見上述「分析和解釋資料」）：

3. **不同研究人員的三角校正：**本研究在「分析和解釋資料」都是經由研究團隊（成員如前述），反覆磋商與討論的過程，對於未能達到一致性的觀點，研究團隊會重新檢驗研究資料，逐項討論，直到共識形成為止。
4. **資料來源的三角校正：**研究團隊在分析教學者所遭遇的問題時，會仔細簡視不同的資料來源，務求各方面資料達一致性結果時才會下定論。

肆、研究結果

本研究共歷經三次主要行動研究的循環中，在這些循環中，我們都是先聚焦如何設計此單元的探究教案；接著反思這些教學實務，發展行動計畫；並根據這些經驗，發展下一次的行動研究循環。如圖 2 中，首先聚焦在設計絕對值教案（F1），經蒐集課本、參考書與相關文獻後（D1），研究團隊進行討論（A1），最後依據 Zaslavsky（2005）的「不確定性」，設計此次的教案（P1）；之後轉向聚

焦教學實務 (F1.1)，經初步蒐集資料後 (D1.1)，聚焦三個此階段教學的主要問題 (F1.11)，接著再經研究團隊分析與解釋資料後，提出解決計畫 (P1.11)；並根據此次的經驗 ($D2=D1+D1.1$)，重新聚焦下次教學的教案設計 (F2)，開啟第二個行動研究循環。

圖 2 本研究中三個主要行動研究循環

一、循環一：絕對值教學

在仔細審視絕對值單元的教學內容、相關文獻分析與研究團隊的討論後，我們使用 Zaslavsky (2005) 的「不確定性」作教案設計。在這些題目中，學生需從反覆試驗，歸納「去絕對值運算規則」。例如圖 3 的題目，學生可由不斷的代入數值嘗試，觀察答案，探究「去絕對值」的規則。

圖 3 絕對值單元題目範例

然而學生在探究這些題目時，遇到挫折。程度較差的同學不知道如何思考問題，無法參與討論；在補習班學過的同學，直接記憶規則解題：

探索

R：好…我們剛剛已經討論過絕對值在數線上面代表的意義，現在請你們小組探究一下這個題目 (圖 2) …

臆測與論證

(以第五組為例)

S22：這要怎麼做阿？

S23：笨，直接算就好了阿…如果大於零（指絕對值裡面的計算）出來就要加負號…

S22：喔…

S8：為什麼？

S19：我們補習班教的…

驗證

R：好，現在請各組上台發表你們探究出來的結果…

（以第五組為例）

S19：（在黑板寫下答案 b ）

R：好，請你跟大家解釋為什麼要這樣做？

S19：ㄟ…我也不知道，就是這樣算阿（說明去絕對值規則）…

R：…（不知該如何引導學生發現此規則）（REC-081024）

一些此階段的問題與解決之道如下：

問題 1. 如何引導學生進行深入的思考（「引導學生思考」）

上述引言中，研究者的困難是當學生說明他記憶規則後，無法進一步引導學生思考這個計算規則的由來：

雖然這次的探究教學，大致上都能依照進度進行，由於研究者與學生接觸探究教學經驗皆不多，因此學生的主動性與研究者的探究教學能力，略顯不足，一些學生突然產生的反應（如上述引言，S19：就是這樣算阿），有時會讓研究者不知該如何回應（TJ-081024）

方法 1. 以學生的疑問作跳板（「由臆測出發」）

Whitin（2006）認為數學探究起始自學生的臆測，並經由學生自主佈題與解題，組織整個探究過程。因此，研究團隊認為可從學生的臆測去引導。如圖 3

問題，可引導學生先猜答案，或嘗試用實際數值運算（如 $a=-2, b=1$ ），最後再歸納出去絕對值規則。在其後的教學，研究者會特別注意鼓勵學生發表想法，再從這些想法去引導。

問題 2. 如何幫助學生瞭解問題（「幫助瞭解問題」）

教學過程中，研究者發現有些學生在解題時，會一直盯著題目，但遲遲無法下筆。當詢問他們是否有想法時，大部分學生其實尚未瞭解題意：「拿到題目時，每個符號都看得懂，但合起來看就不懂了，更不用說怎麼下筆去算。」

(SJ-081027-S12)

方法 2. 鼓勵學生用多元方式來表徵題目（「鼓勵多元表徵」）

AAAS（1993）提出有效表徵問題可幫助解題者思考、溝通與解決問題。針對絕對值問題，若學生能以數線來表徵問題，可幫助學生瞭解問題。有鑑於這次的經驗，在其後的教學，研究者會引導學生用不同方式來表徵題目。

問題 3. 如何鼓勵學生主動討論、分享與提問（「鼓勵學生討論」）

這些學生都很習慣聆聽講述，所以在初次實施探究教學時，不習慣與組員進行討論，也無法說明想法，因為單站在台前，就需很大勇氣：「上台報告時我好緊張，一直冒冷汗，這種上課方式似乎太刺激了吧！」(SJ-081027-S6)

方法 3. 加分與集點卡（「加分」）

研究團隊的資深數學教師提到，學生所產生的文化很重要。也許開始時，多數學生不敢表達，但只要討論、發表的風氣一形成，其他學生很容易受影響。因此，研究者使用發送集點卡與加分策略，藉此鼓勵學生發表，或紀錄討論結果。

問題 4. 如何改善教案，使它更能引起學生探究的動機（「改善教案」）

研究者與團隊重新省思教學過程與活動設計，發現學生只想趕快把答案算出來，不願意多花時間思考這些問題，因此我們認為教案應該作適度修正。

方法 4. 使用數學史的教案設計

為了幫助學生探究，我們參考 RME 理念，以「數學史」作為下次教學的教案設計。這樣的設計方式注重教材的情境，學生會覺得較有趣（Gravemeijer,

1994), 並且能夠順著數學史中「代數符號演進」脈絡, 進入「再發現」的探究學習過程(如瞭解代數演進歷史相關小故事後, 對假設未知數與解方程式覺得更親切、更容易投入)。

二、 循環二：一元一次方程式教學

在循環二中, 我們依據循環一的行動計畫, 改採數學史的教學活動設計, 並解決學生無法投入探究的相關問題, 教學過程中, (1) 研究者先介紹「數字」的演進過程引起動機; (2) 接著提供一些關於代數發展的數學家, 請小組報告關於這些數學家的生平事蹟與對代數上的貢獻, 讓學生對於符號有更深的印象; (3) 之後引入假設未知數與解方程式的探究活動。以下舉列的教學片段, 是學生報告代數演進歷史有關的數學家後, 研究者引入探究活動:

(學生報告完關於代數發展的數學家後)

探索

R: 好, 聽完這些故事後, 你們可不可以去找找看日常生活中, 其實有許多用符號來代表某些數量或訊息?

SI: 有阿, 像買衣服那個, 有 M 阿、S 的...

R: 很好... 還有其他的嗎?

SI0: 還有那個華氏、攝氏的, 理化有教... (指 $^{\circ}F$ 、 $^{\circ}C$)

臆測與論證

R: 所以其實我們是常常接觸到符號的, 接下來的活動, 我要請你們用符號分別表示, 下面圖形的周長與面積。(長方形、正方形、三角形、平行四邊形、梯形與圓)

(學生進行討論)

驗證

S7: 像正方形可以用 $S=2a+2b$, 然後面積可以用 $A=ab$

R: 你那 a 、 b 是代表什麼? 跟長方形面積公式有什麼關係

S7: a 、 b 就是代表長方形的長跟寬, 然後... (學生解釋如何產生這個答案)

R: 好, 我再解釋一次他的講法喔, 因為我們知道長方形面積公式是長 \times 寬...

(把學生說過的話, 再重複一次) (REC-081113)

在這個階段的主要問題, 是在學生的小組報告上; 另外當學生討論變劇後, 時間問題也產生:

問題 1. 家長的反對

由於學生在循環一中, 已有幾次上台經驗, 且此次是小組報告, 相較個別發言, 他們不會懼怕, 因此表現更為活躍, 花費許多時間, 事前過多準備也引發家長反彈:

這次的報告很多都要上網找資料, 還要跟小組討論如何製作報告資料, 所以花了很多時間, 我是很喜歡啦! 但我媽咪說這樣的上課方式很浪費時間 (SJ-081113-S10)

方法 1. 教學前充分與家長、學生溝通 (「充分溝通」)

雖然上課方式引發家長異議, 但學生卻覺得收穫豐碩:

從活動中讓我對很多數學家在代數上的貢獻產生興趣, 我也學習到如何在日常生活中靈活運用「符號», 更知道使用符號來代替一些東西, 與解決問題是多麼的方便, 讀書就是要學以致用, 數學也是, 因此, 此次的活動讓我感受到「玩」符號的樂趣。(SJ-081113-S1)

顯見這個引發探究的活動，能對學生產生意義，因此「溝通」格外重要。除了與家長溝通，讓家長瞭解教學的意義外；也須跟學生溝通，讓他們學習如何準備報告，精要發表想法。

問題 2. 如何控制教學時間（「掌控時間」）

此次教學中，研究者發現會不自覺在學生講解後，再講解一遍（如上述引言），並補充許多題目，深怕學生遺漏重要題目，導致這次教學時間超過原本的計畫（多二節）。

方法 2. 教師放下主導權（「放下主導權」）

Lawson（1995）指出教師的傳統取向信念，讓教師在教學過程中花費許多不必要的時間與精力。雖然研究者明瞭探究應該放下主導權，但在面臨實務時，卻又忍不住主導學生。因此，研究者開始徹底改變心態，學習接受學生用他們的語言去解釋數學觀念，自己是引導者。

問題 3. 討論風氣更盛，但卻造成秩序失控（「維持秩序」）

循環一時，學生討論風氣不盛，研究者設計加分與集點卡，至此已顯露成效，學生討論較熱烈。但風氣形成後，同學們爭先恐後搶著發言，過度積極卻造成秩序失控：「我覺得以辯論的方式很有趣，但是若是以開罵的口吻，就不是很好了。」

(SJ-081113-S10)

方法 3. 訂定規則，培養學生溝通之素養（「訂定規則」）

當初研究者只專注激發討論風氣，卻忽略培養溝通素養，以及當觀點不同時，應有的風度等。為了避免秩序失控，研究者訂出扣卡規則（不禮貌的質問需扣卡），以及用額外時間對學生進行輔導及常規上的訓練。

三、循環三：一元一次方程式的應用教學

上次單元中，有個小組以戲劇的方式表演丟番圖（Diophantus）的故事，由

於這樣的契機，研究者設計丟番圖的墓誌銘（圖 4）作為探究活動的開端，透過歷史的情境，引發探究：

圖 4 丟番圖的墓誌銘

在「驗證」階段，學生對「再添七分之一」引發爭論，其中一方認為「再添」應該扣掉前面的部分；而另外一方則是認為直接乘以 $\frac{1}{7}$ 即可；這是很好的探究議題，在此過程，學生必須嘗試解釋自己的想法，捍衛自己的立場：

驗證

S1：「再添」應該是指扣掉前面之後所剩下的部分才對，所以應該寫成

$$(x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x) \frac{1}{7} \text{ 才對。}$$

S10：不對吧！應該是接續之前的話，也就是一生的 $\frac{1}{7}$ ，所以寫成 $\frac{1}{7}x$ 。

R：你們可以試驗看看，假設 $(x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x) \frac{1}{7}$ 與 $\frac{1}{7}x$ ，算出來有什麼不一樣？

S1：一個算出來是 84（解 $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$ ）；另一個是 63 阿（解

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{3}{28}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

R：那這兩個答案都合理嗎？（大部分人覺得兩個答案都可以，一段時間後一位同學舉手）

S20：我覺得是 84，因為 $84 \times \frac{1}{6} = 14$ 、 $84 \times \frac{1}{12} = 7$ …這些算出來都是整數，但是

$$63 \times \frac{1}{6} = \frac{63}{6}、63 \times \frac{1}{12} = \frac{63}{12} \text{ …這些算出來是分數，感覺怪怪的吧…}$$

(REC-081201)

接著教學者歸納在上述探究過程所學，並藉由討論這些探究過程，精緻學生

的思維與引發新的探究議題：

反思

R：好，從剛剛各小組的發表，和討論的過程，你們學習到了什麼？

S6：嗯…學到怎麼用方程式算出來答案

R：那解這個題目有哪些方法？

S15：可以假設「一生」是 x ，然後把這些幾分之幾假設出來列方程式，最後算出來答案

R：很好，那可不可以不要用未知數的方法？

S21：剛剛有人是用通分找出讓 $\frac{84}{84}=1$ 的方法，他就沒有用未知數；還有人用

$(4+5) \div (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2})$ 也可以算出答案… (REC-081201)

在此階段，研究者已經較能流暢的實施探究教學，而學生的參與度也大大提升，僅剩下一個主要問題：

問題 1. 如何給予各小組均等的上台發言機會（「均等發言」）

由於學生已習慣探究教學模式，小組討論風氣已形成，加分規則也迫使學生得克服上台的恐懼，所以相較於前兩次，學生非常積極踴躍，然而在有限時間下，無法讓每一組都發言，所以如何公平挑選組別上台分享，成了目前最重要的問題。

方法 1. 抽籤決定出上台的組別（「抽籤」）

在有限時間下，研究者使用抽籤的策略，但也考量讓學生報告最重要的探究成果，因此也會適時介入，讓有重要探究成果的組別優先上台。學生在此階段的表現呼應前述 Lawson (1995)，培養出學生的探究動機後，學生的主動性增強。

伍、結論與建議

本研究透過行動研究，幫助教師於課室中發展探究教學，聚焦在此過程所遭遇的困難與解決之道。茲將本研究結論與建議說明如下：

Krainer (2006) 認為行動研究是促進教師發展高品質教學的最佳工具。在本研究中，我們進一步發現行動研究中持續的「討論」與「反思」，是促進研究者發展探究教學的關鍵，因為它幫助研究者發現問題、解決問題。回顧這些研究者在教學現場所遇到的問題，可將它們分成兩類：(1) 關於教學方法的問題 (e.g. 如何「引導學生思考」)；(2) 班級經營方面的問題 (e.g. 如何「鼓勵學生討論」)。教學方法方面的問題，本研究利用相關文獻與研究團隊的討論，找到解決方法；而班級經營方面的問題，本研究透過與資深教師的對話，獲得成長。

研究期間，研究者遭遇與先前相關研究 (Lawson, 1995) 所稱的「時間」問題，並因此造成家長的質疑。透過研究者放下主導權，以及與家長的耐心溝通，成功解決此問題。之外，本研究也提出若干先前研究未提及的問題，如學生在初期對探究的參與度不佳 (學生無法深入思考、無法主動討論等)，這也許是未來同樣初次實施探究教學會面臨的問題，解決這個問題可以從內在的「以學生的疑問來引發討論」、「改變教案設計」；或外在的「加分」來達成。另外當學生討論變劇烈後，也要注意培養學生溝通素養。

教師想改變早已習慣的教學方式，並非一蹴可幾。如研究者已明瞭「放下主導權」的重要性，但在實際教學中仍不自覺主控課室教學。事實上發展新的教學方式本來就是來回穿梭的過程，教師必須在嘗試挫敗中，勇於改變原本熟悉的教學方式，透過研究團隊的支持 (Buck, Latta & Leslie-Pelecky, 2007)，逐步發展新教學方式。

參考文獻

- American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for science literacy*. New York: Oxford University Press.
- Buck, G., Macintyre Latta, M., Leslie-Pelecky, D. (2007). Learning how to make inquiry into electricity and magnetism discernible to middle level teachers. *Journal of Science Teacher Education*, 18, 377-397.
- Cooper, B., & Harries, A. V. (2002). Children's responses to contrasting "realistic" mathematics problems: just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, 49, 1-23.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.
- Edwards, T. G. & Hensien, S. M. (1999). Changing instructional practice through action research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 187-206.
- Krainer, K. (2006). Editorial: Action research and mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 213-219.
- Lawson, A. E. (1995). *Science teaching and the development*. California: Wadsworth Publishing Company.
- McNeal, B. & Simon, M. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 475-509.
- Mills, G. E. (2007). *Action research: A guide for the teacher researcher*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Merrill Prentice Hall.
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.

Warfield, J., Wood, T., & Lehman, J. D. (2005). Autonomy, beliefs and the learning of elementary mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education*, 21, 439-456.

Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching & Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21 (1), 59-83.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 297-321

表 1 探究教學架構

階段	教師活動	學生活動
1. 探索	1. 挑戰學生的原始想法, 點燃學生的興趣並聚焦在值得討論的議題上	1. 學生回想過去的先備知識與學習經驗
	2. 透過教師介紹任務, 喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識	2. 學生參與開放式的探究任務之中
	3. 清楚表達探究目標	
2. 臆測與論證	1. 精心引導並幫助小組/個人進行探究工作	1. 學生開始進行臆測、分析、推理與試驗等探究行為
	2. 回應學生在探究時的需求, 如提供學生不同的思維方式	2. 獲得探究後的初步結果
3. 驗證	1. 給予學生機會, 分享探究結果	1. 學生必須學習如何闡述自己的想法與回應他人的意見
	2. 學生在與他人溝通探究結果時, 引導並幫助他進行討論	2. 持續與他人討論, 藉由相互辨證、論證的過程, 獲致較精緻結果
	3. 適時引導或幫助學生作結論	
4. 反思	1. 清楚說明重要的探究結果和意義	1. 學生必須反思這整個探究的過程與確認在探究過程中所獲得的數學知識
	2. 與學生討論探究過程與所習得數學知識	
	3. 藉由評鑑學生的探究過程, 幫助學生精進下次的探究	2. 依據反思, 可能形成新的探究問題, 開啟下一個新的探究循環

表 2 教學單元、目標與時間

單元	目標	日期與教學時間
絕對值	1. 能了解絕對值所代表的意義。	20081024(2 節課)
	2. 能熟悉數線的畫法。	20081027(2 節課)
	3. 能理解兩點距離在數線上的圖義。	
	4. 能熟練絕對值的運算。	
一元一次方程式*	1. 能了解文字符號的由來及所代表的涵義。	20081110(2 節課)
	2. 能根據題目的假設及題意列出適當的式子。	20081113(2 節課)
	3. 運用符號的代數操作，依題意做不同的表徵方式。	20081117(2 節課) 20081120(2 節課)
	4. 能利用移項法則解一元一次方程式，並做驗算。	
一元一次方程式的應用	1. 能根據應用問題的情境，適當的假設未知數，且依據題意列出一元一次方程式，並解出答案及驗算。	20081201(2 節課) 20081204(2 節課) 20081208(2 節課)
	2. 能利用一元一次方程式解決生活情境中的問題，並能描述其解。	20081211(1 節課)
	3. 的意義及判斷合理性。	

註：*, 原本計畫 6 節，但多花了 2 節

表 3 資料編碼說明

編碼	說明
REC	課室錄影、錄音
INT	訪談
SJ	學習日誌
TJ	教學日誌
LS	學習單
Sn	座號為 n 的學生
R	研究者

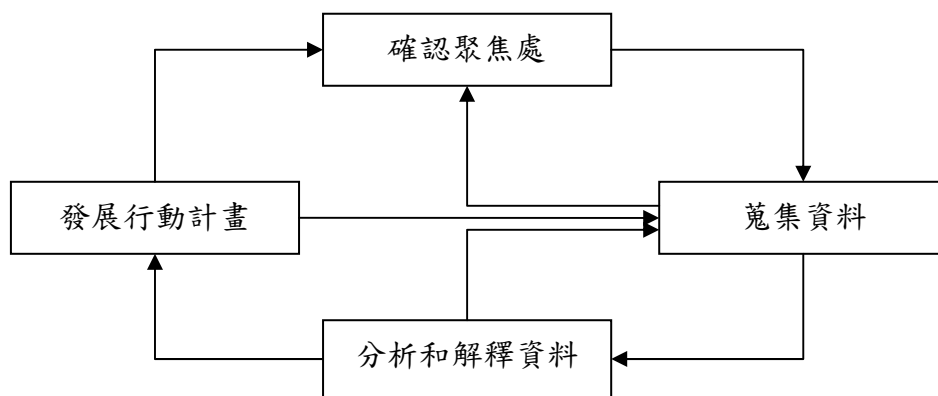


圖 1 辯證行動研究螺旋

F, 確認聚焦處; D, 蒐集資料; A, 解釋和分析資料; P, 發展行動計畫

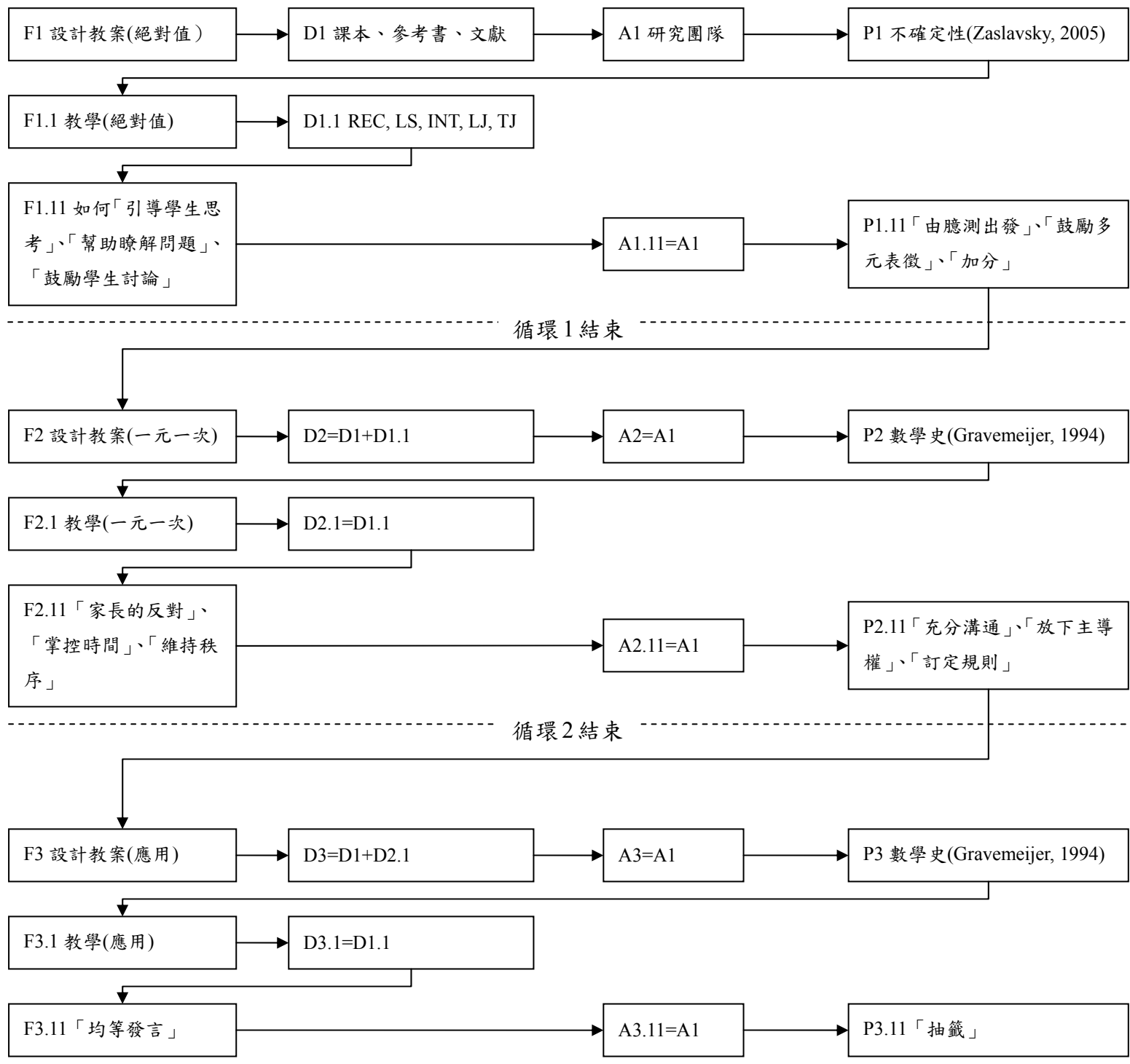


圖 2 本研究中三個主要行動研究循環

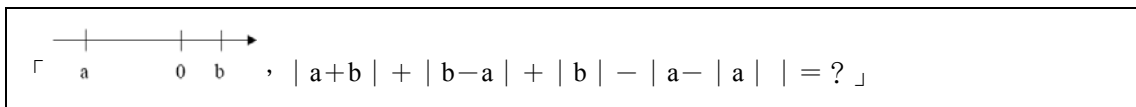


圖 3 絕對值單元題目範例

據說希臘數學家丟番圖的墓誌銘，是一首藏著他年齡的詩謎，依據下面的文字，你可以解出這個謎嗎？

童年占他六分之一的人生，又過十二分之一，人已鬍鬚如戟，再添七分之一年歲，點燃起結婚的蠟燭。五年之後，天賜麟兒，可惜這位遲到的寶貝，享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓。悲傷只有用數論的研究去彌補，又過四年，他也走完了人生的旅途。

圖 4 丟番圖的墓誌銘

活動報馬仔

一、 2009/10/21(三)~2009/10/24(六)

「2009」年東亞科學教育研討會

地點：台北福華國際文教會館(臺北市新生南路3段30號)

參考網站：<http://esciedu.nctu.edu.tw/ease/>

二、 2009/11/27(五)~2009/11/28(六)

2009年台灣教育學術研討會

地點：國立新竹教育大學

參考網站：<http://2009edu.nhcue.edu.tw/>

三、 2009/12/18(五)~2009/12/19(六)

中華民國第25屆科學教育學術研討會

地點：國立臺灣師範大學公館校區(台北市汀州路4段88號)

參考網址：<http://140.122.147.25/se2009/>

四、 2010/01/07 (四)~2009/01/10(日)

**The 8th Annual Hawaii International Conference on
Education**

地點：Honolulu, Hawaii

參考網站：<http://www.hiceducation.org/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 () 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

- (二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

- (三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

- (四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

- (五) 來稿請e-mail

至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw