

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第21期

台灣數學教育學會

2010年03月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers
2010 年 03 月出版
NO.21 2010

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員 Editorial Panel

呂玉琴 國立台北教育大學數學教育研究所

李源順 台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微 國立東華大學數學系

金鈴 國立台灣師範大學數學系

梁淑坤 國立中山大學教育研究所

蔡文煥 國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通 國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗 國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 21 期

2010 年 03 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 21 期

2010 年 03 月

序言.....	1
楊德清	
一個隨機遊戲中的機率理論註解.....	2
陳仁義	
三至五歲幼兒基本加減法的發展：「性別」&「社經地位」的差異開始了嗎?.....	20
賴孟龍、陳芸鍾	
活動報馬仔	52

序言

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所

「此刻打盹，你將做夢；而此刻學習，你將圓夢。」這是高掛在哈佛圖書館的二十條訓言之一，也是哈佛大學鼓勵學生們勤勉不懈的教誨，也許我們都不曾親眼所見，然哈佛圖書館的凌晨四點半卻是燈火通明的。臺灣數學教師電子期刊也以上述這一句話與大家共勉之，本期刊將秉持終身學習、隨時學習的精神，為教育做更大的貢獻。

本期TJMT容納了二篇相當好之文章：首篇是陳仁義教授之一個隨機遊戲中的機率理論註解，作者以基礎的機率理論為立足點，並從具體操作中尋找與探索線索，進而形成和推導「貝氏定理」的理論結果。對機率概念相關的教學具參考價值。第二篇是賴孟龍教授與陳芸鍾之三至五歲幼兒基本加減法的發展：「性別」&「社經地位」的差異開始了嗎？本文之主要目的在探究「不同年齡」、「不同性別」，以及「不同社經背景」的學齡前幼兒在基本加減法原則的理解。對於社經背景是否對學齡前幼兒的表現產生差異，讀者可在文中獲悉。

最後，期盼臺灣數學教師電子期刊未來能夠更加成長與茁壯，並對數學教育付出更多的貢獻。

一個隨機遊戲中的機率理論註解

陳仁義

南華大學資訊管理系

摘要

此篇文章是以陳仁義、魏志安和鄭信源（2007）的具體操作之實驗性遊戲為基礎，在理論方面作出適當的聯結和延伸性推導。經由一個簡單而有趣的隨機性遊戲為平台，他們帶領一些國中同學在「模擬操作」過程體會其中所蘊含「機率概念」的奧妙之處，結果在極短時間之內就有顯著的學習成效。本研究對象則是推廣到從事數學教育工作的在職進修班上，相當於是這些國中同學的師長們，我們也將這個有趣而似吊詭（Paradox）的隨機性遊戲（Monty Hall）之問卷請他們回應，有趣的是在初始的直覺回答中，典型的回應和國中同學們相當一致，堪稱為老少咸宜的遊戲題材。為了引領這些從事數學教育工作者，可較為深入而廣泛地體驗遊戲背後所蘊含的「機率理論」之推導過程，我們讓老師們利用同一亂數表來具體操作這個「模擬遊戲」之後，他們很快地調整初始階段所堅持的直觀反應，也極端訝異於『亂』數表所呈現的亂中有『序』狀態。藉此帶領大家嘗試來發現形成理論的一些可能推導線索(Clue)，樹狀圖歸類法引用了進來，分化征服法(Divide and Conquer)的技巧可讓大家強化概念。緊接著是如何有效鋪陳理論推導架構，我們將精簡型樹狀圖轉化成較為複雜的線形結構，以呼應出樣本空間和事件的表示法，因而在最為基礎性的「機率理論」中找到立足點，進而從具體操作中找出線索，以形成和推導「貝氏定理」的理論結果，彼此間的緊密聯結性也就浮現了出來。此外，相關的問題也將加以討論。

關鍵詞：樹狀圖，隨機模擬，樣本空間，貝氏定理。

一、研究動機和背景

經由一個簡單而有趣的隨機性遊戲為平台，陳仁義、魏志安和鄭信源（2007）利用一個亂數表來具體操作這實驗性遊戲，帶領一些國中同學在「模擬操作」過程體會其中所蘊含「機率概念」的奧妙之處，結果在極短時間之內就有顯著的學習成效。我們也將這一個容易瞭解和回答的機率遊戲推廣，在相關課程：基礎數學、機率理論、統計應用、決策分析和通識課程等教學活動中練習，同學們都感受到一種新的體驗，進而改變了對嚴謹數學語言的刻板印象，有了較為可親近的感覺。此篇論文是記錄了個人在推廣研究過程中的一些轉折、聯結和心得等點滴，正好是碰上從事數學教育工作的在職進修同學，激盪起的一些火花也就成了本文的主要研究素材。我們將這個有趣而似弔詭（Paradox）的隨機性遊戲（Monty Hall: Friedman, 1998; Gillman, 1992; Morgan et al., 1991）之問卷先請在職進修的同學們回應，有趣的是在初始的直覺回答和堅持己見反應中，典型的回應和國中同學們有相當的一致性，可堪稱為老少咸宜的絕妙遊戲題材。為了引領這些從事數學教育工作者，可較為深入而廣泛地體驗遊戲背後所蘊含的「機率理論」之推導過程，接下來也是讓老師們利用同一亂數表來具體操作這個「模擬遊戲」，各自完成之後，大家均可調整問卷階段所直觀反應，但是初衷堅持所引發的種種疑惑，還是久久不能散去，到底是學習數學的、且是從事數學教育工作者。此外，他們也極端訝異於『亂』數表所呈現的亂中有『序』狀態。藉著醞釀成形的蓄積動能，帶領大家嘗試發現形成理論結果的一些可能推導線索(Clue)，也就成了本文的主要研究動機。樹狀圖歸類法引用了進來，分化征服法（Divide and Conquer）的技巧可是讓大家豁然開朗。緊接著所面對的最大挑戰是如何有效鋪陳出理論推導架構，我們將樹狀圖轉化成較為複雜的線形結構，以呼應出樣本空間（Sample Space）和事件（Event）的表示方式，因而在最為基礎性的「機率理論」中找到了立足點，進而就是引用「貝氏定理」推導出理論結果來，於焉大功告成。因此，也就成了本文的機率理論註解。

在職進修同學的問卷回應，典型的回應和國中同學們有相當的一致性，可說是老少咸宜問題的『看山是山』之直觀性回應，我們在第二節中有扼要的整理。而在第三節中，

讓同學們利用一個簡單亂數表來動手具體操作以親身體會，我們從中整理了實際體驗之後的『看山不是山』之學習心得。其中的奧妙處，或可嘗試找尋其間的科學思維、條理和理論線索，最為自然的表示方法有樹狀圖歸類法呈現在第四節當中，並以分化征服法加以討論，將同中存異的遊戲問題條理化，在『看山不是山』的慌亂心理狀態之下，似又可以依稀找到山的模樣來。此外，我們將樹狀圖轉成線形的樣本空間和事件表示法，進而引用「貝氏定理」推導出理論結果，回到了『看山是山』的另一境界，這些都呈現在第四節當中。最後的第五節中有個簡單結論。

二、問卷回應與整理

此研究推廣到從事數學教育工作的在職進修班，希望能初步瞭解他們的直觀反應。遊戲規則的說明是三個門以 1、2、3 數字區別之，主辦單位只在其中一個門放著獎品，參加者在 1、2、3 中擇一，主持人公布是否得獎前會將沒有被參加者選中的兩個門之一，打開給大家看確定沒有超級獎品，緊接著主持人就問參加者：「要不要換成尚未被打開的那一個門？」。除了有「是、否」換門之簡答外，我們也讓大家把內心的想法和較為深入的直觀反應以文字表達出來（詳細內容可參見陳仁義、魏志安和鄭信源，2007）。

從回收的 32 份問卷中有 5 位同學「會更換」、27 位則是「忠於原味」。我們進一步分析第一群的 5 份問卷中，都是認為「更換」之後的中獎機率變大而改變心意，其中有兩位進一步寫出中獎機率由 $\frac{1}{3}$ 提升為 $\frac{1}{2}$ ，只有一位進一步寫出正確的中獎機率為不換 $\frac{1}{3}$ 、換 $\frac{2}{3}$ 。或許是從事於數學教育工作的這些在職進修同學們，已經具備有足夠的數理基礎，會優先從量化的機率值比較來作決策。另一方面的第二群多數者，從 27 份「忠於原味」問卷的整理中，大部份同學相信自己的第一直覺，就算是因此而不中獎也無妨，該是您的就不會跑掉；也有同學認為，當主持人開了門之後，換與不換均有一半機會中大獎，因此不想改變自己的原本選擇。一些有趣而多樣的典型回應和國中同學們有相當的一致性，值得我們深思，例如，「如果是因為改變決定而錯失，反而會責怪自己不堅定。」、「因為可能改變心意之後，會選到沒有獎品的門。」、「完全按照第一時間的直覺來決定，不會因為是否打開其中一個沒有獎品的門而改變心意。」、「如果最後沒

有得到超級獎品，心情就會由高點降到低點，可以說明「愛你所擇，擇你所愛」。「是你的就跑不掉。」、「已下定決心，就不要更改。除了考驗你對機率的看法外，也是有玩心理戰的感覺，意志不堅定的人或許易於陷入猶疑不定的情境當中。」、「就算中獎的機率可能改變，但並沒有任何理由顯示自己的選擇是錯誤的，因此，堅持自己的選擇即可。」、「既已決定，就不更改了，緣份天注定囉！」、「這種機會的問題，就相信自己的直覺。」、「依個人性格仍會擇善固執，平心以對。」、「相信自己的初衷，得者幸運、不得運也。」、「一開始既已選定了，中或不中獎則是由運氣來決定。」、「若是忠於原味而失敗則會平心靜氣接受結果，否則因為改變卻失敗了將會比較懊惱。因此，更要相信自己的直覺。」、「因為不管選擇哪個門，最後的結果皆是從二個門中擇一，我認為機率各為 50%，所以不會換。」、「目前未被打開的二個門都有可能放著超級獎品，得獎與否的機率應是相同的。」、「等等。這可從不同背景因素和面向來瞭解，也許只是賭賭運氣、或想遊戲一下；或許只是「當下」決定、或已覺察到中獎機率由原來的 $\frac{1}{3}$ 提升為 $\frac{1}{2}$ 。在主持人開啟一個沒有獎品的門之後，大部份同學認為「當下」的決定變成為「二擇一」的機會，也就是中獎機率由原來的 $\frac{1}{3}$ 變成 $\frac{1}{2}$ ，這是合理的想法。可算是老少咸宜的『看山是山』之直觀反應。

三、具體操作和體驗

為了讓同學們在動手操作中體驗『隨機性』真諦之一二，我們先以簡單的投擲骰子為開端，藉由亂數表來模擬真實的投擲情境，除了熟悉亂數表的特性之外，也體驗到了多次重複的實驗模擬情境，其中有兩位同學的心得或可反應端倪：“**在修讀此課程之前，對於機率、統計的學習總是拘泥於理論現象，不知道如何地靈活應用和有效學習，甚至在課室教學，只能死板版地介紹相關內容。經過這次的模擬遊戲，讓我豁然開朗，原來理論也可以賦予生命，感受到亂數表親切的一面，以及為何可作為隨機取樣的方式，更激發了我未來課室教學的創新理念，收穫頗為豐富。**”（哲源）；以及“**經由這一次的活動操作，讓我對教學新生幾許不同的省思，也激盪出不同的思緒，在冰冷生硬的數學理論架構，在學生心中嚴肅無聊得數學世界裡，其實是可以透過活動賦予它生命力和活力的，諸如這一次，利用亂數表為平凡無奇的骰子投擲，增添了許多意想不到的**

精采呢！我想，這是我往後在教學活動中又獲得的一項可貴的豐富資產喔！”（奇婉）。

為了運用同一個亂數表來具體操作我們研究中的隨機性遊戲（Monty Hall），就請同學們進一步認識附表一的亂數表，我們隨機選取 300 個亂數值且劃分為三區，對應著三組的同學且讓參與同學有個人專屬的具體操作之『初始值』，例如：附表二中實驗次別 1 的第一個亂數值 **0.327**，位於亂數表中的第 30 列和第 9 行（i.e., [29, 8]），是對應到第三組的 8 號同學之初始位置。我們將此遊戲規則之**獎品隨機**放在三個門之一（**獎品固定放的情況**可參見陳仁義、魏志安和鄭信源，2007），將遊戲實驗具體操作次數設定為 60 次，**首先是**決定獎品隨機位置、參加者選擇的門號，因為是**完全隨機**的選取，因此以我們依機率相等原則設定：亂數值落於 $[0, 1/3)$ 選擇**1 號門**、介於 $[1/3, 2/3)$ 則選取**2 號門**、如果落在 $[2/3, 1]$ 之中則選取**3 號門**；**其次是**主持人決定開門時有兩種情況：一是當亂數值決定的獎品位置和參加者選擇的門號**相同時**：例如均是**2 號門**則主持人可以開門的選擇有**1 號或 3 號門**，因此主持人所打開的門號是二擇一，所以亂數值落於 $[0, 1/2)$ 則選擇**1 號門**、落於 $[1/2, 1)$ 則選取**3 號門**，附表二中的實驗次別 11（選擇**1 號門**）、次別 24（選擇**1 號門**）、次別 29（選擇**3 號門**）、次別 48（選擇**1 號門**）；門號均是**1 號門相同時**，主持人可以開門的選擇有**2 號或 3 號門**，亂數值落於 $[0, 1/2)$ 則選擇**2 號門**、落於 $[1/2, 1)$ 則選取**3 號門**，附表二中實驗次別 14、20、25、26 等均選擇了**2 號門**。二則是另一種情況的獎品位置和參加者選擇的門號**不同時**：例如亂數值選中**1、3 號或 3、1 號門**的話，主持人只能打開唯一尚未選中的**2 號門**，例如附表二中的實驗次別 3、5、6、10、14、18 等均是。附表二中完整呈現作業初始值為 0.327 的 60 次結果，最右兩行是以 L(Loss)或 W(Win) 代表『沒中獎』或『中大獎』的結果，我們進而可確認一下『不換門中獎』、『換門而中獎』的實驗次數相加之後應等於總次數 60。

依此請參與的同學依個人『初始值』回家練習，參考附表二的呈現方式將具體操作的結果和個人在習作過程中的心得在兩週之後繳交一份報告。同學們遵循著相同的遊戲規則，卻得到全然不同的個別結果，經過適當的轉化和整理，又可看到全然不同結果中的一些共通點。

當我第一次知道遊戲規則後，我與大多數人的直覺想法一樣：主持人已經打開其中一扇門，那麼，參賽者只剩下二個選擇，不管換門或不換門，中獎的機率都是 $1/2$ 。做了這個模擬實驗後，讓我深深體會我的想法也許不夠縝密，因為我只考慮後半段，沒有考慮到主持人這個開門動作亦會影響參賽者換門中獎或不換門中獎機率，並非純

粹二選一，也體驗到直覺有時需要縝密的邏輯思考來驗證其真確性。這讓我想到機率學是那麼深奧有趣，需要考慮的條件是多方面的，並非想像的那麼單純。(正順)

經過這一次利用亂數表模擬參賽者的決定，自己在一次一次的試驗中，記錄結果的過程時，心中激起很大的體悟和聲響，也經過這樣的過程，更能體會隨機機率的趣味，記得在模擬大約二十幾次時，心裡發現，原來要換門而中獎的機率是比較高的！雖然這只是一個小小趣味的遊戲，但在那當下，心裡可是非常雀躍的呢！在我實際的教學中，將同樣的問題拋給我班上數理資質優秀的學生，看著他們有人直接說『不換！不換！』，也有人質疑的說『當然要換！變一半機會耶！』而此時，也有幾位學生，透露著思考的眼神表情，我想...這樣有趣又生活化的問題，激盪起他們的樂趣，以及探究思考的興趣和精神吧！無論孩子的結果如何？決定如何？但數學培養思考的精神已經在他們心中慢慢發酵了吧！(奇婉)

一開始在課堂上回答此問題時，單純的只以直覺、感性層面思考，我不想換，因為這一輩子沒福氣中過大獎，如果老天會讓我中獎，第一次就會讓我選中，如果老天不讓我中獎，有再多的提示對我而言也起不了作用，全然沒有想到，可以用數學角度思考此問題。在逐步完成此份模擬作業時，必須強迫自己在殘存的數學知識中，想辦法將試驗結果合理化，幾番思考，皆無從符合老師已公布的答案。在此次完成報告的進程中，先以亂數表模擬猜獎遊戲，並輸入於電腦中，以圖表、表格呈現其規律性，再尋找相關的機率或統計理論合理說明模擬的結果，最後，在進行過程中，感受到數學與生活的連結，說服自己不只可以直覺或感性層面，亦可以數學觀點思考此問題。而我們在教學過程中，也應多給予學生機會，讓其從實作中體會「數學即生活」。(嫩恬)

在作本次實驗之前，我一直感覺因換門與否的中獎率應為1:1，因為我會認為最後都是在兩扇門之間做決定，所以機率比應該相同，但是在做實驗的同時，發現換門中獎的次數竟然越來越多！此時，不禁懷疑自己先前的假設，因為我是先假設機率比為1:1而開始做實驗紀錄的，而且實驗起初只做了60次，為了再進一步確認自己的想法，我又多做了30次的實驗，發現卡方檢定的結果竟然還是否定了自己的假設，於是，我進一步的重新建立假設，發現卡方檢定的結果換門與否的機率比真的為2/3:1/3，才體會到原來自己先前對遊戲的感覺也是一種迷思概念，而且起初對遊戲的感覺是一旦選擇以後就應該堅持自己的想法，不要輕易變換，但透過本次實際去實驗，才發現原來要換門獲獎的機率才會比較大！(欣涵)

統計遊戲的模擬情形120次，而得到之結果為不換門中獎次數40次，換門而中獎

的次數為 80 次，恰好各佔 $1/3$ 及 $2/3$ ，這實驗結果正好與上課時所講的機率符合，這是一個很令人吃驚的結果，因為它與一般直觀的感覺不一樣，就直觀而言，相信會有很多人是選擇不換的，除了有些人單純靠感覺決定以外，有許多人必定和我有一樣的感覺，剩下兩個門，選擇哪一個門都是一樣的機率，然而事實呈現的數據卻令人訝異。(仕榮)

起初，我的認知是，換門與不換門的機率一樣都是二分之一，在上課老師解釋完後，我才知道換門後中獎的機率比較高，是三分之二，雖然用數學的角度下去看我接受了，但總覺得還是有點認知衝突，不太能接受，但做完虛擬的實驗後，感覺有比較強烈了，認知上也較能接受了。(晉瑋)

藉此，我們和同學在課堂上進行事後的分享和討論，發表個人在具體操作中所體驗的心得和啟示，多數同學肯定了這種具體操作的學習方式，在作中學可以釐清一些抽象的機率概念，並且從其他同學的類似而不相同的結果中，注意到不換門而中大獎機率為 $1/2$ 、 $1/2$ 想法應該要調整過來，來到了『看山不是山』的似是而非狀態。因此，我們在第四節中呈現了兩種科學化方法，樹狀圖歸類法帶領著他們反思一下個人的具體操作，也比較其他人的結果，或可逐漸體會出附表二第 7 行『主持人開門位置』的可能限制和規律性。此外，遊戲中的運用機率來作決策思維，正如陳仁義、魏志安和鄭信源（2007）提出的觀點：『然而「機率概念」所要解釋和延伸的，並非僅止於「一個人」在「當下」的情況，而是可以想像成在一個「共同體」或「長期性」的情境中，孕育著、互動著和遷引著，如此地一路下來，穩定的條理化狀態於焉形成，科學化思維方法當可引用進來。』

四、科學思維和理論註解

在此遊戲當中，看似簡單卻可體驗隨機中隱含著必然，然而又見反常的決策現象。如果可以運用科學方法來釐清，以發現條理性所在，是個有趣的探索、學習、和體驗。我們試圖以科學化的數理符號語言和一些角度來探索這個有趣問題：

在遊戲開始之前，主辦單位準備了三個門（D: Door）的箱子，門上分別以 1、2、3

數字區別之，只有其中一個門後已放著超級獎品，分別以 D_1, D_2, D_3 表示第 1、2、3 個門放著超級獎品；遊戲開始之後，參加者 (**G**: Guest) 在 1、2、3 個門中擇一，分別以 G_1, G_2, G_3 表示參加者選擇第 1、2、3 個門；緊接著主持人 (**H**: Host) 正式公布得獎與否之前會先賣個關子，將沒有被參加者選中且不是放著超級獎品的唯一門或兩門之一，打開給大家看確定沒有超級獎品，分別以 H_1, H_2, H_3 表示主持人打開第 1、2、3 個門。我們先呈現出最為自然的樹狀圖歸類法，以呼應出分化征服法；順著轉成為樣本空間和事件表示法，在最為基礎性的「機率理論」中找到了立足點；最後以「貝氏定理」推導出理論結果，完成了**理論註解**，也回到了『看山是山』的另一境界。

(一)、樹狀圖歸類法：

人類對於複雜問題的處理方法，很自然的會作適當歸類來簡化問題，若再以層次的方式伸展開來，則可作為較高維度的呈現，其中的師法自然界之樹狀圖就成了最有用的媒介，如圖 1 所示，將可能發生的事件依次而關聯地展現在圖中；至於不會發生的事件就沒有在圖中顯示出來。遊戲開始 (**S**, Start)，主辦單位隨機地在三門之中的一個門後放著超級獎品，分別由 D_1, D_2, D_3 的路徑下來，正如圖中的第一層路徑所示；遊戲開始之後，參加者並不知道獎落何處的情況下，也就隨機地在三個門 1、2、3 當中擇一，分別由 G_1, G_2, G_3 的路徑下來，正如圖中的第二層路徑所示。至此均是自由而隨機地選取，因此共有 9 條可能發生的路徑畫了出來。接下來**主持人**就不能完全自由而隨機的選擇，只能二擇一、或是被迫接受其中之一，正如圖 1 中的第三層路徑所示：中間的分支是為二擇一、兩旁的分支則分別都是唯一選擇。圖中任一節點往下一層的實線分支，建構出所有可能的路徑；**第三層**節點往下的兩個虛線分支，則是分別代表**不換門或換門的結果**。實線分支線上的數值代表著均勻機率分配值：唯一實線分支就是全數值 1、有兩個分支就是全數值的一半為 $1/2$ 、有三個分支時則分別為 $1/3$ ；虛線分支線上的數值代表著相應路徑共同形成的可能性或**機率值**，也就是相應路徑上實線數值相乘積的結果，其中同一節點往下的兩個虛線分支機率值是相等的，只是第四層代表**不換門**的結果、而第五層則是**換了門**的結果。值得注意的是：每一層的任一節點均代表著一個完整體，以全

數值 1 來作標準化衡量值；其往下一層的實線分支之均勻分配值則是基於隨機地選擇，因而是可能延伸路徑分支數的均分值。圖 1 樹狀圖呈現較為詳細的超級獎品放置門 2 的分支；圖 2 中的樹狀圖則是呈現超級獎品放置其他兩個門 1、3 的分支之完整情形。

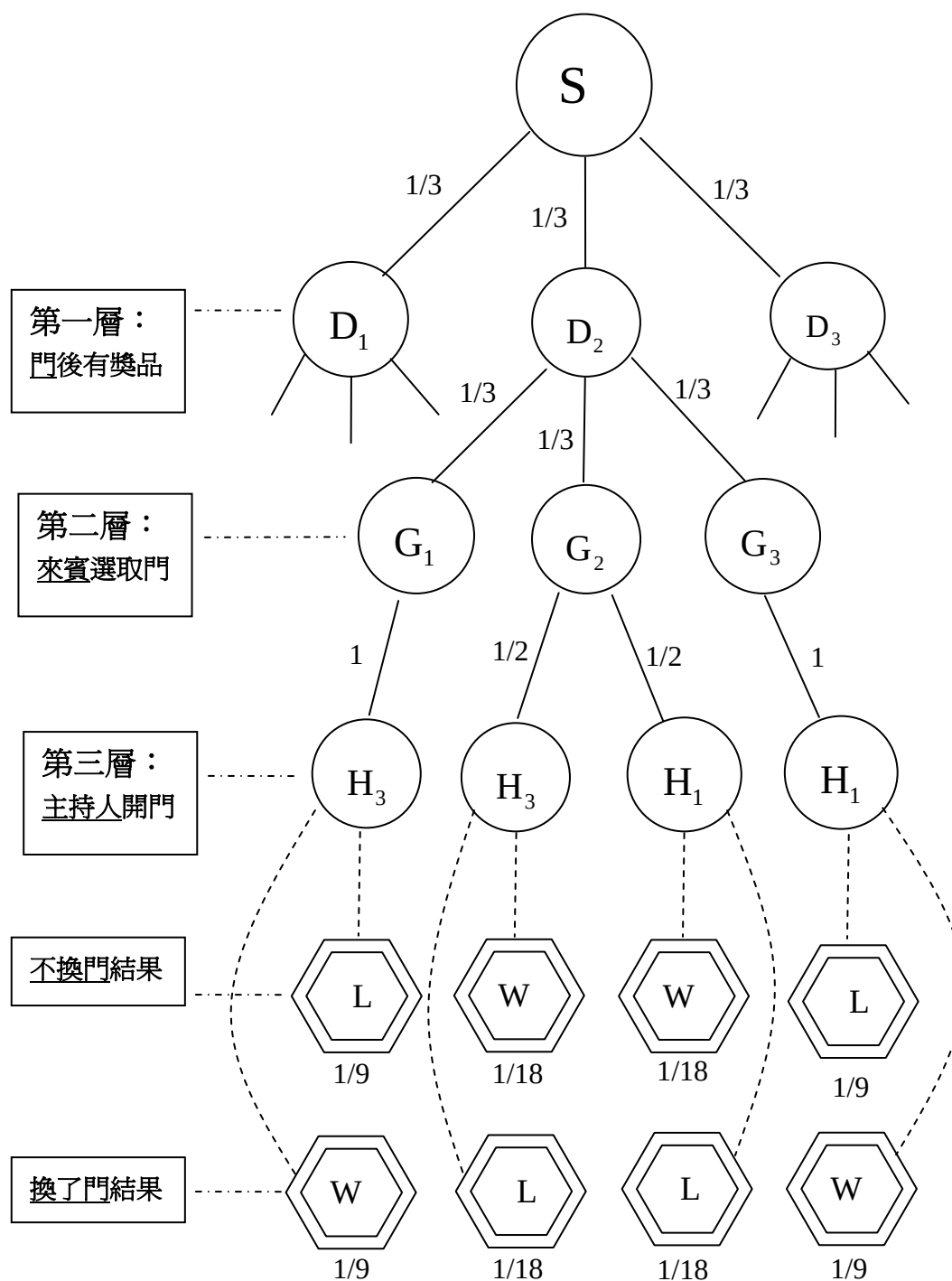


圖 1：超級獎品放置在門 2 的樹狀圖

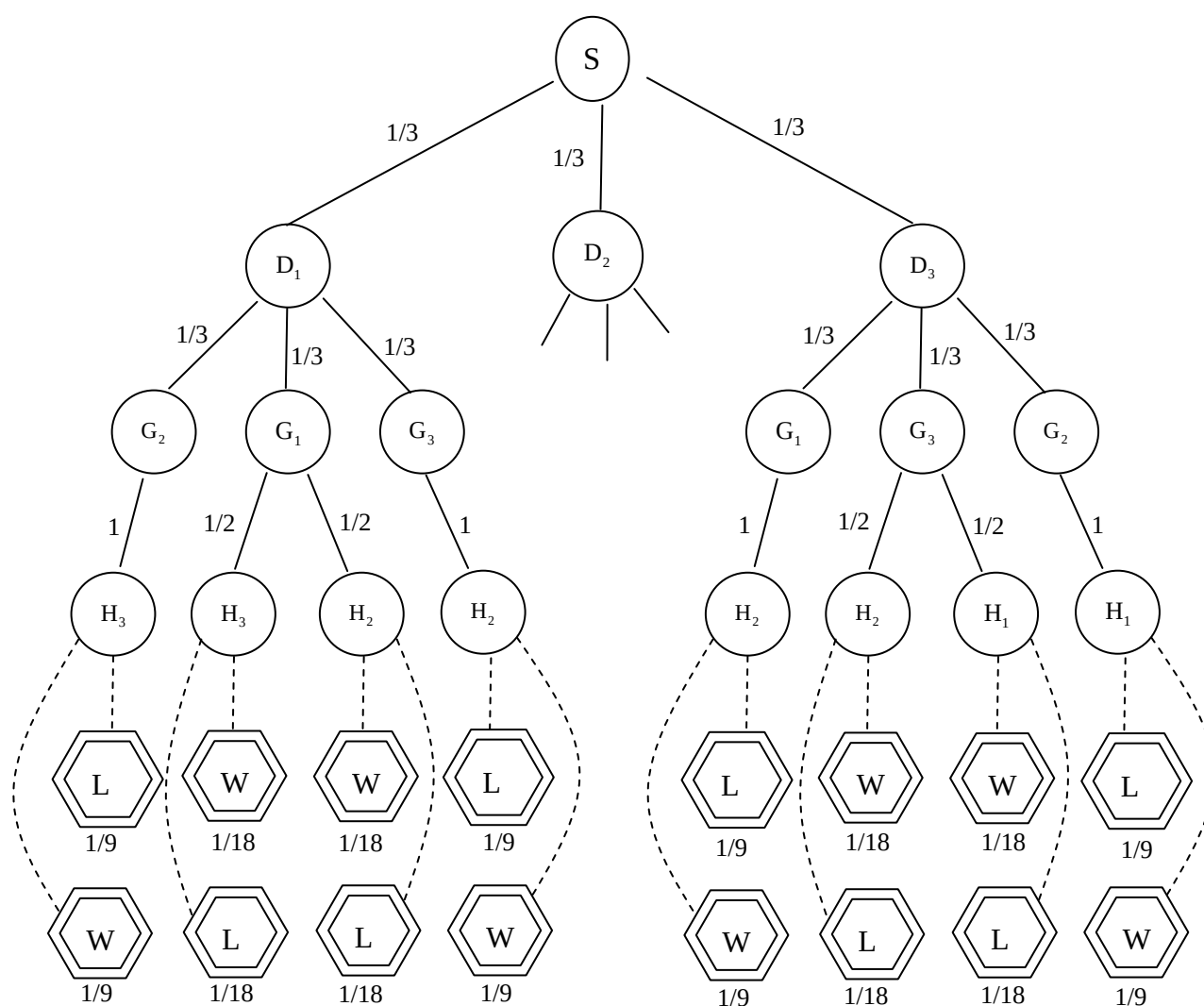


圖 2：超級獎品放置在門 1、門 3 的樹狀圖

從兩個樹狀圖當中，可以有效地聯結到附表二中所呈現出的具體操作之結果，並且可體會到亂中有『序』的狀態，進而瞭解『第 7 行主持人可開門位置』的規律和限制，只能二擇一（當參加者正好選中了獎品所放置的門號時；也就是附表二中第 6 行需要有亂數值時）、或是 當參加者選擇門號與獎品所放置門號不同時而要被迫接受唯一的第三個門號（也就是附表二中第 6 行不需要有亂數值的情況），這兒正是蘊含著形成理論推導的主要線索(Clue) 之一。 另一方面，樹狀圖提供了一種分化(Divide) 和征服(Conquer)的自然呈現方法，也是可作為較高複雜度問題之簡單化、系統化、組織化的

重要準則，蘊藏在其中的也存有理論推導的另一線索。

(二)、基礎機率理論解法：

樹狀圖帶給我們極佳的視覺感受，也提供了很好的聯結關係，然而在分支多的時候就會發生技窮狀態：無法完整的呈現在一張紙上、或鋪成一個完整畫面等問題。另一方面，樣本空間的線形而窮盡表示法可作為系統化之完整呈現，亦即將**樹狀圖**可能延伸路徑有系統的條列整理出來。因此，**圖 1 中的樹狀圖**可形成**獎品放置在門 2 的子樣本空間** S_2 為 $S_2 = \{(D_2, G_1, H_3, L, W), (D_2, G_2, H_3, W, L), (D_2, G_2, H_1, W, L), (D_2, G_3, H_1, L, W)\}$ ，其中每一樣本點的第 1 位置代表著**圖 1 中第一層的置放超級獎品門號**、第 2 位置代表著**圖 1 中第二層的來賓選取門號**、第 3 位置代表著**圖 1 中第三層的主持人開啟門號**、第 4 位置代表著**圖 1 中第四層的不換門結果**、第 5 位置代表著**圖 1 中第五層的換了門結果**，相近的討論方式可參考陳尚婷和陳尚瑜(2002, 頁 17-20)。同理，**圖 2 中的樹狀圖**可形成**獎品放置在門 1、門 3 的子樣本空間** S_1 、 S_3 分別可表為

$$S_1 = \{(D_1, G_2, H_3, L, W), (D_1, G_1, H_3, W, L), (D_1, G_1, H_2, W, L), (D_1, G_3, H_2, L, W)\},$$

$$S_3 = \{(D_3, G_1, H_2, L, W), (D_3, G_3, H_2, W, L), (D_3, G_3, H_1, W, L), (D_3, G_2, H_1, L, W)\}.$$

雖然少了極佳的視覺感受和聯結關係之呈現方式，但要推廣到 3 個門以上的情況，就可易如反掌地條列出完整的所有可能出象(outcome)。此隨機遊戲的整個樣本空間為

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3,$$

每一個子樣本空間 S_1 、 S_2 、 S_3 的機率值是均分的 $1/3$ (獎品是隨機地出現在三門之一)，是分別由 4 個樣本點的不均勻分配機率值 $1/9$ 、 $1/18$ 、 $1/18$ 、 $1/9$ 所加總起來，亦可以從**圖 1**、**圖 2** 中分別找到完整的對應值。依此可整理出我們所關心的事件：以 E_N 、 E_Y 來分別表示不換門(No)、換門(Yes) 的事件(Event)； $\Pr(E_N)$ 、 $\Pr(E_Y)$ 表示分別事件的機率。則 $E_N = \{(D_2, G_2, H_3, W, L), (D_2, G_2, H_1, W, L), (D_1, G_1, H_3, W, L), (D_1, G_1, H_2, W, L),$

$(D_3, G_3, H_2, W, L), (D_3, G_3, H_1, W, L)\}$ (第 4 位置不換門結果均為 **W**)、

$$E_Y = \{(D_2, G_1, H_3, L, W), (D_2, G_3, H_1, L, W), (D_1, G_2, H_3, L, W), (D_1, G_3, H_2, L, W),$$

$(D_3, G_1, H_2, L, W), (D_3, G_2, H_1, L, W)\}$ (第 5 位置換了門結果均為 **W**)。

因此， $\Pr(E_N) = 1/18 + 1/18 + 1/18 + 1/18 + 1/18 + 1/18 = 6/18 = 1/3$ 、

$$\Pr(E_Y) = 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 6/9 = 2/3。$$

至此，我們可體驗到樣本空間的**窮盡表示法**，並且可作為系統化的完整呈現和機率值之計算，但是在推廣到3個門以上時，複雜度將會快速升高。另一方面，**非窮盡表示法**的貝氏定理解法可**局部性**掌握問題全貌，值得我們進一步來探討和比較。

(三)、貝氏定理解法：

樹狀圖帶給我們極佳的視覺感受和很好的聯結關係；樣本空間的窮盡表示法則可作系統化之完整呈現，解決了部份的多元化或推廣性問題。然而想要進一步計算出我們所關心的事件(event) 發生之機率時，**樹狀圖法**和樣本空間窮盡法均是分別計算出換門或不換門的**W(Win)** 部份之機率值加總起來的 $2/3$ 、 $1/3$ 。貝氏定理解法可局部性地掌握問題全貌，試從圖1、圖2中仔細來端詳，主辦單位**隨機地**在三門之中的一個門後放著超級獎品，分別由 D_1, D_2, D_3 的路徑下來，因此， $\Pr(D_1) = \Pr(D_2) = \Pr(D_3) = 1/3$ ，而且我們可**局部的**在圖1中探討此問題，藉此就可代表問題全貌的結果。因此，圖1中是由 D_2 路徑下來，而參加者並不知道獎落何處的情況下，也就隨機地在三個門1、2、3當中擇一，而有條件機率值 $\Pr(G_1|D_2) = \Pr(G_2|D_2) = \Pr(G_3|D_2) = 1/3$ ；再往下一層的主持人就**不能完全自由而隨機**的選擇，只能二擇一、或是被迫接受其中之一，正是呼應了具體操作中附表二『第7行主持人可**開門位置**』的規律和限制，也就在這兒正蘊含著形成理論推導的**主要線索**。因此，若假設主持人打開的門是 H_1 而視為進一步**局部化**時，我們就可依參加者隨機選擇三門之一而有三種情形

$$\Pr(H_1|G_1;D_2) = 0、\Pr(H_1|G_2;D_2) = 1/2、\Pr(H_1|G_3;D_2) = 1。$$

也就是**局部化的**圖1中右半邊之兩條路徑上，可求出不換門而贏得大獎的機率是發生了參加者正好選中獎品所放置門號之事件的可能性，亦即 $\Pr(G_2|H_1;D_2)$ 或 $\Pr(G_3|H_1;D_3)$ ；**換門**而贏得大獎的機率則是發生了參加者沒有選中獎品所放置門號之事件的可能性，亦即 $\Pr(G_3|H_1;D_2)$ 或 $\Pr(G_2|H_1;D_3)$ 。其中**不換門**而贏得大獎的機率是

$$\begin{aligned}
 \Pr(E_N) &= \Pr(G_2|H_1; D_2) = \frac{\Pr(G_2, H_1 | D_2)}{\Pr(H_1 | D_2)} \\
 &= \frac{\Pr(H_1 | G_2; D_2) * \Pr(G_2 | D_2)}{\Pr(H_1 | G_1; D_2) * \Pr(G_1 | D_2) + \Pr(H_1 | G_2; D_2) * \Pr(G_2 | D_2) + \Pr(H_1 | G_3; D_2) * \Pr(G_3 | D_2)} \\
 &= \frac{(1/2) * (1/3)}{0 * (1/3) + (1/2) * (1/3) + 1 * (1/3)} = \frac{1}{3};
 \end{aligned}$$

$\Pr(E_N) = \Pr(G_3|H_1; D_3)$ 的計算法類似且結果一致。其中換了門而贏得大獎的機率是

$$\begin{aligned}
 \Pr(E_Y) &= \Pr(G_3|H_1; D_2) = \frac{\Pr(G_3, H_1 | D_2)}{\Pr(H_1 | D_2)} \\
 &= \frac{\Pr(H_1 | G_3; D_2) * \Pr(G_3 | D_2)}{\Pr(H_1 | G_1; D_2) * \Pr(G_1 | D_2) + \Pr(H_1 | G_2; D_2) * \Pr(G_2 | D_2) + \Pr(H_1 | G_3; D_2) * \Pr(G_3 | D_2)} \\
 &= \frac{1 * (1/3)}{0 * (1/3) + (1/2) * (1/3) + 1 * (1/3)} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

$\Pr(E_Y) = \Pr(G_2|H_1; D_3)$ 的計算法類似且結果一致。因此，貝氏定理解法只需要取其中之一就是完整的證明，Kinney (1997, page 25-28)有類似的證明方式可供參考，但是並不容易理解其中的重要線索、符號方式、導引技巧等面向。值得注意的是，當我們推廣到 6 個門時，貝氏解法只需要作小幅度修改以加倍方式呈現，樹狀圖就無法完整展現成一個簡單的視覺畫面，而樣本空間窮盡法則會從 12 個樣本點急速成長到 150 個。因此，可局部性地掌握問題全貌的貝氏定理解法明顯地較能推廣成一般性。

五、結論與討論

在兩年來的實際教學活動之研究觀察中，這些從事數學教育工作的 32 位國中、小學老師們，較有意願來深入而廣泛地瞭解遊戲背後所蘊含的「機率理論」和推導過程。因此，我們嘗試以自然的樹狀圖歸類表示法，來引領老師們找尋其間的科學思維、條理和理論線索，進而將精簡樹狀圖轉化成較為複雜的線形結構，以呼應出樣本空間和事件的表示方式，因而在最為基礎性的「機率理論」中找到立足點，最後引用了「貝氏定理」推導出理論結果來。值得注意的是，此研究的理論推導之主要線索可以從具體操作中來

體會和理解：整理在附表二『第 7 行主持人開門位置』的規律和限制，主持人不能完全自由而隨機的選擇，只能二擇一、抑或是被迫打開剩下來的唯一的門。這也是我們當初在設計此「隨機模擬」實驗的具體操作流程中所埋下的伏筆和線索，有些同學已注意到為何『第 6 行』亂數值的可有、可無？似可看出『第 6 行』與『第 8 行』、『第 6 行』與『第 9 行』之間存在著同步關連性！何以「貝氏定理」中的條件假設或設計思維如此？個人的研究觀察中顯示，在同學們經過具體操作的體驗之後，適當運用實驗流程和呈現結果來加以解釋，有助於學習者的理論思維之形成、推導和理解。此外，這些心得分享正呼應了陳仁義、魏志安和鄭信源 (2007) 所指出：『我們讓同學們透過一個簡單的亂數表，來具體操作這個「隨機模擬」實驗，以體會遊戲中所蘊含「機率概念」的奧妙之處，同學們在短時間內就有顯著的學習成效，並可呼應和適度驗證「數學語言」所呈現的理想狀態。在此狀態中，「機率概念」所以要解釋和延伸的，並非僅止於「一個人」在「當下」的情況，而是有多個人或多次「重複性」在「長期」的情境中孕育著、互動著和變遷著，穩定的條理化型態逐漸成形，科學思維才可適時引用進來，理想狀態於焉浮現。』

另一方面，經由同學們的分享學習有助於整體觀之建立，也可以將陳仁義、魏志安和鄭信源(2007) 的附表三 **R codes**(R Development Core Team, 2009) 稍加延伸和修改，即可以此電腦自動化方法產生不同初始位置的結果來，亦即可對照自己的結果、又可看到其他同學的結果，甚至嘗試更多初始位置來看結果，整體觀也可以這樣子建立起來。

六、誌謝

本文完成要感謝國科會計畫 NSC98-2511-S-343-001-M 的經費補助。此外，嘉大數教所兩屆修課同學們的心得報告和課堂討論正是本文的重要素材。

七、參考文獻

- [1] 陳仁義、魏志安和鄭信源 (2007), 一個隨機遊戲中的機率概念, *台灣數學教師(電子)期刊*, 第 12 期, 33-46。
- [2] 陳尚婷和陳尚瑜譯 (2002), *機率的樂趣*, 台北市: 弘智文化。
(Isaac, Richard, “The Pleasures of Probability”, 1995, New York: Springer.)
- [2] Friedman, D. (1998), “Monty Hall’s Three Doors: Construction and Deconstruction of a Choice Anomaly,” *The American Economic Review*, **88**, 933-946.
- [3] Gillman, L. (1992), “The Car and Goats,” *The American Mathematical Monthly*, **99**, 3-7.
- [4] Morgan, J.P., Chaganty, N.R., Dahiya, R.C., and Doviak, M.J. (1991), “Let’s Make a Deal: The Player’s Dilemma”, *The American Statistician*, **45**, 284-287.
- [5] Kinney, J.J. (1997), *Probability: An Introduction with Statistical Applications*, Wiley.
- [6] R Development Core Team (2009). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.

八、附錄

附表一 亂數表

亂數表中分成三組，個人起始值設定之後，後續值由上而下、由左而右：

	[, 0]	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]	[, 6]	[, 7]	[, 8]	[, 9]
[0,]	0.372	0.044	0.710	0.658	0.250	0.300	0.585	0.333	0.622	0.546
[1,]	0.880	0.707	0.732	0.932	0.455	0.590	0.820	0.224	0.412	0.039
[2,]	0.701	0.957	0.213	0.661	0.923	0.796	0.071	0.389	0.406	0.659
[3,]	0.423	0.321	0.198	0.163	0.523	0.913	0.207	0.814	0.020	0.925
[4,]	0.435	0.442	0.761	0.333	0.394	0.233	0.072	0.913	0.772	0.108
[5,]	0.079	0.434	0.680	0.734	0.453	0.784	0.680	0.519	0.691	0.588
[6,]	0.815	0.810	0.610	0.993	0.843	0.716	0.019	0.305	0.883	0.941
[7,]	0.234	0.937	0.567	0.843	0.821	0.280	0.047	0.225	0.673	0.959
[8,]	0.685	0.776	0.776	0.983	0.010	0.953	0.323	0.428	0.134	0.018
[9,]	0.656	0.915	0.715	0.183	0.240	0.836	0.386	0.233	0.069	0.062
[10,]	0.125	0.023	0.392	0.860	0.718	0.339	0.081	0.037	0.773	0.995
[11,]	0.147	0.040	0.566	0.889	0.871	0.982	0.880	0.510	0.334	0.613
[12,]	0.398	0.140	0.079	0.550	0.261	0.810	0.545	0.474	0.664	0.092
[13,]	0.651	0.368	0.246	0.299	0.559	0.480	0.477	0.936	0.470	0.678
[14,]	0.934	0.274	0.947	0.313	0.876	0.167	0.469	0.652	0.034	0.435
[15,]	0.150	0.459	0.619	0.956	0.101	0.228	0.555	0.771	0.480	0.881
[16,]	0.968	0.690	0.867	0.560	0.305	0.999	0.293	0.903	0.042	0.599
[17,]	0.681	0.983	0.502	0.743	0.911	0.988	0.765	0.821	0.940	0.672
[18,]	0.907	0.762	0.486	0.250	0.359	0.009	0.236	0.106	0.611	0.205
[19,]	0.215	0.016	0.328	0.270	0.914	0.418	0.691	0.900	0.208	0.461
[20,]	0.606	0.563	0.277	0.226	0.984	0.098	0.880	0.233	0.772	0.472
[21,]	0.409	0.823	0.535	0.491	0.014	0.643	0.320	0.534	0.954	0.040
[22,]	0.285	0.492	0.481	0.438	0.438	0.186	0.945	0.145	0.779	0.813
[23,]	0.220	0.317	0.264	0.522	0.203	0.653	0.277	0.409	0.837	0.435
[24,]	0.254	0.856	0.220	0.186	0.022	0.465	0.297	0.189	0.668	0.281
[25,]	0.220	0.490	0.225	0.821	0.382	0.627	0.952	0.778	0.107	0.230
[26,]	0.217	0.693	0.597	0.279	0.443	0.897	0.054	0.664	0.829	0.752
[27,]	0.034	0.646	0.963	0.361	0.970	0.492	0.932	0.601	0.352	0.088
[28,]	0.182	0.110	0.368	0.009	0.079	0.299	0.586	0.703	0.749	0.314
[29,]	0.387	0.988	0.681	0.889	0.319	0.462	0.405	0.926	0.327	0.111

Generating method by R:> set.seed(101)

```
> rnum <- round(1000*(runif(300)))/1000
```

```
> rnmtrx <- matrix(rnum, c(30,10), byrow=T)
```

附表二

實驗 次別	亂數值	獎品 位置	亂數值	參賽者 選取位置	亂數值	主持人 開門位置	不換門 而中獎	換門 而中獎
1	0.327	1	0.546	2	-----	3	L	W
2	0.039	1	0.659	2	-----	3	L	W
3	0.925	3	0.108	1	-----	2	L	W
4	0.588	2	0.941	3	-----	1	L	W
5	0.959	3	0.018	1	-----	2	L	W
6	0.062	1	0.995	3	-----	2	L	W
7	0.613	2	0.092	1	-----	3	L	W
8	0.678	3	0.435	2	-----	1	L	W
9	0.881	3	0.599	2	-----	1	L	W
10	0.672	3	0.205	1	-----	2	L	W
11	0.461	2	0.472	2	0.040	1	W	L
12	0.813	3	0.435	2	-----	1	L	W
13	0.281	1	0.230	1	0.752	3	W	L
14	0.088	1	0.314	1	0.111	2	W	L
15	0.372	2	0.880	3	-----	1	L	W
16	0.701	3	0.423	2	-----	1	L	W
17	0.435	2	0.079	1	-----	3	L	W
18	0.815	3	0.234	1	-----	2	L	W
19	0.685	3	0.656	2	-----	1	L	W
20	0.125	1	0.147	1	0.398	2	W	L
21	0.651	2	0.934	3	-----	1	L	W
22	0.150	1	0.968	3	-----	2	L	W
23	0.681	3	0.907	3	0.215	1	W	L
24	0.606	2	0.409	2	0.285	1	W	L
25	0.220	1	0.254	1	0.220	2	W	L
26	0.217	1	0.034	1	0.182	2	W	L
27	0.387	2	0.044	1	-----	3	L	W
28	0.707	3	0.957	3	0.321	1	W	L
29	0.442	2	0.434	2	0.810	3	W	L
30	0.937	3	0.776	3	0.915	2	W	L
31	0.023	1	0.040	1	0.140	2	W	L

32	0.368	2	0.274	1	-----	3	L	W
33	0.459	2	0.690	3	-----	1	L	W
34	0.983	3	0.762	3	0.016	1	W	L
35	0.563	2	0.823	3	-----	1	L	W
36	0.492	2	0.317	1	-----	3	L	W
37	0.856	3	0.490	2	-----	1	L	W
38	0.693	3	0.646	2	-----	1	L	W
39	0.110	1	0.988	3	-----	2	L	W
40	0.710	3	0.732	3	0.213	1	W	L
41	0.198	1	0.761	3	-----	2	L	W
42	0.680	3	0.610	2	-----	1	L	W
43	0.567	2	0.776	3	-----	1	L	W
44	0.715	3	0.392	2	-----	1	L	W
45	0.566	2	0.079	1	-----	3	L	W
46	0.246	1	0.947	3	-----	2	L	W
47	0.619	2	0.867	3	-----	1	L	W
48	0.502	2	0.486	2	0.328	1	W	L
49	0.277	1	0.535	2	-----	3	L	W
50	0.481	2	0.264	1	-----	3	L	W
51	0.220	1	0.225	1	0.597	3	W	L
52	0.963	3	0.368	2	-----	1	L	W
53	0.681	3	0.658	2	-----	1	L	W
54	0.932	3	0.661	2	-----	1	L	W
55	0.163	1	0.333	1	0.734	3	W	L
56	0.993	3	0.843	3	0.983	2	W	L
57	0.183	1	0.860	3	-----	2	L	W
58	0.889	3	0.550	2	-----	1	L	W
59	0.299	1	0.313	1	0.956	3	W	L
60	0.560	2	0.743	3	-----	1	L	W

最後統計一下分別中獎的實驗次數。

不換門中獎的實驗次數：共 19 次；
換門而中獎的實驗次數：共 41 次。

三至五歲幼兒基本加減法的發展： 「性別」&「社經地位」的差異開始了嗎？

賴孟龍、陳芸鍾

國立嘉義大學幼兒教育所

摘要

本研究的目的是探究「不同年齡」、「不同性別」，以及「不同社經背景」的學齡前幼兒在基本加減法原則的理解。針對 108 名三、四、五歲公、私立幼稚園中的幼兒進行臨床性晤談(利用遊戲的方式，一對一的訪談)，研究中發現，大部分的四歲幼兒已經可以理解「減法否定(e.g., $3 - 3 = 0$)」和「減法同一(e.g., $3 - 0 = 3$)」原則，而且部份的(三分之一)五歲幼兒則可以理解抽象且複雜的「加減法反逆原則(e.g., $4 + 3 - 3 = 4$)」。此外，因社經背景所產生的差異已經明顯的反應在學齡前幼兒的表現，中高社經幼兒在數量發展與理解遠優於低社經的幼兒，但是性別差異沒有影響。令人訝異的是，「加減法反逆原則」的習得與基礎的認數能力(number recognition)、「減法否定原則」、和「減法同一原則」的相關不顯著。未來的研究可深入探究何種數學能力(或是其他因素)會影響「加減法反逆原則」的習得。

關鍵字：基本加減法原則、社經背景差異、幼兒數學、加減法反逆原則。

一、前言

在學習數學基本運算過程中，我們總是依序教導孩子「加法」，接著是「減法」、「乘法」、「除法」等概念，而「加減法反逆」概念（e.g., $a + b - b = a$ ），亦即是加法與減法可以互相抵消，卻鮮少被提及，導致許許多多的孩子一直到學習的後期才發現原來「加法」與「減法」的關係是如此的密切（Siegler & Stern, 1998）。

過去的研究（e.g., Starkey, Klein, & Wakeley, 2004）發現學齡前幼兒已經具有許多數學概念（i.e., 非正式數學），例如：三歲的幼兒能在實驗的情境之下，以數數的方式完成簡單加減法問題；四歲幼兒則是能在心裡計算小數目的簡單加減法問題；大部分五歲幼兒可以理解基本簡單的減法問題，像是他們可以解決「四隻鴨子少了兩隻，剩下多少隻？（ $4 - 2 = 2$ ）」的問題。綜上所述，幼兒在上小學前，就已經能夠解決4以上的簡單加減法應用問題（Huttenlocher, Jordan, & Levine, 1994），同時研究人員也發現以具體方式表徵的數學概念是未來學習正式數學的基礎。

然而，幼兒的數學概念似乎不如我們想像的樂觀，因為發展或是其他因素的影響（e.g., 有限的工作記憶，Klein & Bisanz, 2000），年紀小的幼兒比較無法解決「加減法反逆」的問題，如：「原本有七個花片，後來放入四個，然後再拿走四個（ $7 + 4 - 4 = 7$ ），最後剩下的花片跟原本的花片比起來，花片是變多？變少？還是一樣多？」Baroody & Lai（2007）的研究發現，直到五歲的幼兒才能開始理解加減法反逆的數學概念（但是，Klein & Bisanz 認為四歲幼兒就開始，因為實驗方法的不同，以致於實驗結果有不小的差距）。

本研究的目的之一為了解「加減法反逆原則」是如何發展的，目的之二為探究影響加減法反逆原則的外在因素（例如：性別與家庭背景等等）。為了達到第一個研究目的，本研究將利用數學遊戲，來探究幼兒在加減法基本運算、口語認數與「加減法反逆原則」的表現，以期能了解「加減法反逆原則」如何發展（i.e., 需要什麼能力做基礎），以及幼兒何時可以理解「加減法反逆原則」概念。此外，為了達到第二個研究目的，本研究將探討「不同年齡層」的幼兒對於加減法反逆原則的理解程度，同

時更進一步探討「不同性別」與「社經地位」對於幼兒在加減法反逆原則的理解程度所造成的影響。

二、 文獻探討

(一)、 基本數學加減法的相關研究

在正式數學的基本數學加減法中，有三個重要的原理原則，分別為「減法否定原則」、「減法同一原則」，以及「加減法反逆原則」；減法否定原則 (Subtractive-Negation Principle, SNP)，是指集合的個數減去或刪除全部，即得結果為「0」個，若以符號表示則為 $(a - a = 0)$ ；減法同一原則 (Subtractive-Identity Principle, SIP)，指集合的個數減去或刪除 0 個，即得原本集合的個數，若以符號表示則為 $(a - 0 = a)$ ；加減法反逆原則 (Addition-Subtraction Inverse Principle, ASIP)，指集合的個數先加入某一個數，再減去相同的數，即得到原本集合的個數；或是，集合的個數先減去某一個數，再加入相同的數，即得到原本集合的個數，若以符號表示則為 $(a + b - b = a)$ 或 $(a - b + b = a)$ 。

台灣的數學課程安排，學童大約是在國小一、二年級時會學習基本的加減法運算。然而，令人感到好奇的是，學齡前幼兒有沒有基本加減法的“概念”？又他們何時可以學會或是理解非正式數學加減法呢？根據過去的研究發現 (Baroody & Lai, 2007)，學齡前幼兒對於加減法運算的理解並不高，但這卻是在學習正式數學前的基本要素與基礎 (Siegler & Stern, 1998)。學齡前幼兒究竟是在何時萌發對於基本數學的加減法原理原則的了解？又是需要具備哪些數學能力，才能進一步了解基本數學的加減法原理原則？Baroody、Lai、Li與Baroody (2009) 透過非正式的數學遊戲，發現幼兒大約在 4 歲左右已經能夠理解「減法否定原則」和「減法同一原則」；Klein與Bisanz (2000) 以及Rasmussen與Bisanz (2003) 也都曾利用非符號的方式，來測驗幼兒對加減法反逆原則概念的理解程度，發現許多 4 歲幼兒可以理解加減法反逆概念；而Sherman與Bisanz (2007) 甚至提出 3 歲幼兒已經可以理解這個概念。

由此可知，過去的研究焦點多在探究幼兒理解加減法反逆原則的年齡，卻鮮少探究幼兒需要先具備何種能力來幫助其理解加減法反逆原則。因此，本研究的第一個研究目的，即為加減法反逆原則、減法否定原則、減法同一原則以及口語認數能力的相關性與發展順序。

(二)、不同社經背景對於數學成就差異的相關影響

國外學者曾指出，不同家庭社經背景的學生會間接經由家庭中的價值觀、動機和學習行為等歷程，影響學生在學習成就上的表現（Biggs，1978）。國內學者也曾對此議題做出許多相關研究，吳元良（1997）曾探討不同的數學課程、性別、社經地位的國小學生在數學態度及成就上的比較，發現在控制學生的智力因素後，可以得出不同社經地位的學生在數學成就、選擇題、填充題、計算題及應用題等題型上，均有顯著的差異，亦即高社經地位的學生顯著高於中、低社經地位的學生，並且中社經地位的學生也顯著高於低社經地位的學生。同樣地，陳雅莉（1993）利用自編的數學成就測驗來評量不同社經背景的小六學生，亦發現高社經背景的兒童其數學成就測驗表現優於中社經地位者，而中社經地位的兒童數學成就測驗亦優於低社經地位者。除此之外，張善楠與黃毅志（1997）也曾研究影響學童學業成績之因素，於研究中發現台東縣五年級學童父母親的教育程度以及父親職業社經地位，都會對學生學業成就的高低造成顯著的正向影響。周新富（1999）亦從研究中發現，父母親的學歷是高中職以上，職業屬性以資產階級及經理階級為主，且其家庭的月收入在八萬元以上的中、高社經地位家庭，其家庭中的子女的學習成就會高於其他家庭背景的學生。由此可知，家庭的社經地位以及家長的教育程度都會影響學童的學習成就。

是以家庭的背景對學生的學習影響至為深遠，惟，過去在探究學童的學習成就與其家庭社經地位的相關研究中，學童的年齡層多為國中、小以上，較少研究提及學齡前幼兒的家庭社經地位是否會影響其學習的成效。因此，本研究的第二個研究目的，即為探討不同社經背景，是否會對於學齡前幼兒在數學加減法原理原則的理解產生學習成就差異。

(三)、在數學成就中性別差異的相關研究

國內、外學者在數學成就的性別差異研究中，大多數的研究指出男生的數理表現優於女生（Lummis & Stevenson, 1990；簡茂發，1995，1996，1999）。簡茂發等人曾進行持續四年的「國民教育階段學生基本學習成就評量研究」，其中針對數學能力及學習歷程進行性別差異的分析。結果發現，國小5年級的男生在機率項目的表現優於女生，國中2年級男生在幾何、代數和數學解題的表現優於女生。此外，李默英（1982）亦發現高中二年級的男生數學成就表現優於女生。國立台灣師範大學科學教育中心也曾在1992年針對全國十二所設有數理資優班的高中三年級學生，進行數學、化學與物理科的學力測驗，研究對象包括普通班及資優班學生，其研究結果發現，在數學測驗中，不管是對全體學生、普通班或是資優班而言，各校男生的成績皆優於女生。無獨有偶的，Hyde、Fennema 與 Lamonj（1990）的研究發現，在高中階段的男生數學能力測驗的成績遠高於女生。

然而，也有學者提出不同的性別研究結果。在TIMSS 2003的測驗中，我國四年級和八年級學生，以及參加國家的國際平均數上，男女生的數學整體表現均無性別差異或是女生的數學成就是優於男生（林碧珍、蔡文煥，2005；曹博盛，2005；Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004）。就我國而言，TIMSS 2003的數學分項主題上仍有些許的性別差異現象，其中，4年級女生在「資料呈現與分析」的表現優於男生，8年級的女生在「代數和幾何」的表現優於男生。在國際的分項表現上，雖然4和8年級的男生在「測量」的表現皆優於女生，但是，4年級女生在「資料呈現與分析」和「幾何」項目的表現卻優於男生，8年級女生在「代數」的表現也優於男生（林碧珍、蔡文煥；曹博盛；Mullis et al.）。此外，黃國清（2008）以國中七年級的學生為研究對象，藉由紙筆測驗來探討不同性別學生在數學學習成就上的差異，其研究發現女生的整體數學成就表現顯著高於男生，而且在「代數」及「數與量」的課程內容表現尤其明顯。

有趣的是，在一跨文化的研究中，發現性別之間的差異並不明顯。Stevenson、

Lee與Stigler (1986) 分別對台灣、日本及美國三個不同國家的五、七、十一歲兒童，進行數學成就測驗和認知測驗的研究，其研究結果發現三個不同年齡層的兒童彼此之間，在性別上是沒有差異的，即表示不管是哪一個年齡層中的男生與女生，他們數學成就的表現都是相同的。

綜上所述，過去的研究(林碧珍、蔡文煥, 2005; 曹博盛, 2005; Ma, 2004; Stevenson et al., 1986; Wedege, 2007) 較少探究不同性別的學齡前幼兒在數理表現的上的差異。其中，在性別差異研究中值得一提的是，Campbell (1991) 曾提出如果要探討性別差異的因素，不應只單單探究性別本身之間的差異，應配合種族、社經地位或課程的相關因素，才能更深入了解造成性別差異的因素。所以，本研究除了探討性別差異，同時更深入探究不同社經背景及年齡，作為了解性別差異的相關面向。因此，本研究亦探討在不同社經背景及年齡下，不同性別的學齡前幼兒對於數學加減法原理原則的理解是否會有顯著差異。

三、 研究方法

(一)、 研究對象

研究對象為三、四、五歲的學齡前幼兒，各36位 (共108位幼兒)，分別來自台灣南部一所公立及一所私立幼稚園，每個年齡層的男、女生人數均等。其中，三歲幼兒的平均年齡為3歲又6.3個月；四歲幼兒的平均年齡為4歲又5.5個月；五歲幼兒的平均年齡為5歲又5.7個月。在本研究中，公立園所的家長職業大多為半技術性或技術性工人，如自耕農、店員、水電工、技工等，多屬低社經地位的家庭；私立園所的家長職業則大多為專業人員或一般公務員，如中小學教師、企業負責人等，多屬中高社經地位的家庭。

(二)、 研究工具

本研究測驗項目，包括：口語認數測驗、減法否定原則與減法同一原則測驗，以及加減法反逆原則測驗。測驗形式改編自Baroody & Lai (2007) 的非語言加減法測驗 (nonverbal addition-subtraction task)。口語認數測驗 (verbal number recognition, VNR) 目的在了解幼兒的基本認數能力；減法否定原則和減法同一原則測驗以及加減法反逆原則測驗目的在瞭解幼兒的基本加減法能力與概念。研究材料有玩具模型、綠色代幣、測驗圖卡、黃色紙盒、藍色紙板、以及計分測驗紙。各測驗細節詳述如下。

1. 口語認數測驗：

口語認數測驗在探究幼兒是否能夠確實且清楚地辨別數量1至5；此測驗內含兩個子測驗，分別為「無情境的」及「有故事情境的」的測驗題目。

第一個子測驗是「這是多少？」的遊戲，是屬於「無情境的」的問題，包含1至5的集合。施測者會一一揭示每張圖卡，每張圖卡中有隨意散佈1至10個不等的圓點圖形，由「1」集合的問題開始。首先，施測者問幼兒：「這是1嗎？」，當幼兒回答後，第一張圖卡會被蓋起，接著施測者會翻開第二張圖卡，以此類推，每個集合下，施測者都會問一樣的問題。

五個集合的圖卡分別如下：在「這是1嗎？」的圖卡中，圓點圖形依序為9點、2點、7點、1點、3點、1點，共六張圖卡；在「這是2嗎？」的圖卡中，圓點圖形依序為2點、7點、1點、3點、4點、2點，共六張圖卡；在「這是3嗎？」的圖卡中，圓點圖形依序為3點、1點、5點、2點、7點、3點、4點，共七張圖卡；在「這是4嗎？」的圖卡中，圓點圖形依序為1點、5點、3點、4點、7點、6點、4點、2點，共八張圖卡；在「這是5嗎？」的圖卡中，圓點圖形依序為1點、7點、5點、6點、2點、3點、5點、8點，共八張圖卡。

第二個子測驗為「有故事情境的」的問題，例如：「這是1朵小花嗎？」，圖卡中的圖形分別為「小花」、「小女孩」、「葉子」、「魚」和「樹」，共五種不同的圖形，分別對應五個集合。施測過程與第一個子測驗大致一樣，差別僅在材料與施測語。

2. 減法否定原則及減法同一原則測驗：

測驗包含一般減法的測驗 ($a-b$)、減法否定原則測驗 ($a-a$) 和減法同一原則測驗 ($a-0$)，每種測驗各五題並以半隨機次序進行；半隨機是指同一類型測驗題連續出現不超過兩題以上，以防止受試者亂猜答案並猜對 (false positive)，減少誤測的可能性。本測驗使用「有故事情境的」的施測語，實驗材料為三種不同的玩具模型，有「鴨子」、「南瓜」、和「恐龍」，且在測驗過程中，指導語均未提及或說出任何數字。

在「有故事情境的」減法否定測驗中 ($a-a=0$)，舉例來說，施測者說：「有這麼多隻鴨子在水池玩，媽媽說要回家吃飯了，所以這麼多隻鴨子回家了。」再詢問受試者：「請問現在水池裡有幾隻鴨子？」詳如圖1. 所示。

插 入 圖 1.

3. 加減法反逆原則測驗：

本測驗包含六題練習題、六題對照題及八題加減法反逆題。練習題的目的是為了讓受試者了解本測驗；對照題 ($a+b-c$ 或 $a-b+c$) 其題目難易度與加減法反逆題相當，但是受試者在解答問題時無法立即運用加減法反逆原則來解題。在八題加減法反逆題中，分為兩類，一類為先加後減 ($a+b-b$) 的題目，另一類為先減後加 ($a-b+b$) 的題目。每次測驗開始前，施測者會給幼兒清楚地看見有5至7個不等的綠色代幣，並依據幼兒的發展差異放置不同數量的代幣。在先加後減 ($a+b-b$) 的反逆題目中，先讓幼兒清楚看見存在盒中的綠色代幣後，再用一紙盒子將綠色代幣全部覆蓋，接著，依據幼兒的發展從右邊放入2至4個不等的綠色代幣，並停留三秒讓幼兒看見這些代幣，再從左邊拿出2至4個的綠色代幣，並停留三秒讓幼兒看見這些代幣，最後，施測者詢問幼兒：「現在盒子裡的綠色代幣，跟剛剛一開始盒子裡的，是「一樣多」還是「不一樣多」？」而先減後加 ($a-b+b=a$) 的反逆題目，則如圖2. 所示。

插 入 圖 2.

(三)、施測流程

進行本研究測驗的場域是在受試者就讀的幼兒園所內不受干擾的教室，是獨立的空間，每次測驗均有兩位施測者，一位負責對研究對象（受試者）進行測驗，另一位負責紀錄研究對象在測驗中的表現及測驗成績，並且在正式施測前均先受過本研究之基本訓練，以了解本研究之主要目的。

每位幼兒（受試者）在每個測驗中均分別獨立施測。測驗流程依據研究主題順序對受試者進行研究測驗，依序為口語認數、減法否定原則與減法同一原則，以及加減法反逆原則等三大項目，全部實驗約需3至4回合完成，每回合進行15-20分鐘。在測驗過程中，幼兒如果有任何不想參與測驗的念頭，便會停止施測。此外，為了建立良好的研究關係，與幼兒見面的第一天，施測者會與受試者進行5分鐘左右的數學小遊戲，讓受試者能熟悉時間與環境，之後，四個測驗會依序在一個月內完成。

(四)、計分方式

每項測驗的計分方式有所不同，以下依序說明各項測驗之計分方式：

1. 口語認數測驗：

在此測驗中，分別測驗集合1至5，同時包含「有故事情境的」及「無情境的」兩類型的測驗題目。每一個小題，若幼兒能在正確數量的圖卡上回答「是」或是不正確數量的圖卡上回答「不是」，都能得到1分；若幼兒在測驗過程中不專心、回答太慢、錯過試題、或是計算圖卡上的數量，將視為失敗，無法得分。

在口語認數測驗能力的判定上，先將每一小題分別計分後，再加總兩類型題目的分數，最後除以各集合的總題數，即為幼兒在此集合的答對率。若幼兒在該集合的答對率高於90%，表示「對該數量的了解很清楚」；若低於90%，則表示「對該數量的了解不是很清楚」。口語認數能力的總體表現則為各集合的答題正確率之和除以總集合之答題率。

2. 減法否定原則及減法同一原則測驗：

在每一個減法否定、減法同一及一般減法測驗題目中，各題表現的分數是個別計分，如果幼兒答出正確數量將得一分；如果是在第二次機會中答對則得0.5分。

減法否定與減法同一原則測驗的能力表現判定方式相同。在減法否定原則的能力表現判定上，若幼兒在減法否定和一般測驗題目上均答對4題（含）以上，則評分為高度理解（reliable successful）；若是在減法否定和一般測驗題目上均答對3題，或是在減法否定測驗題目中只有答對3題，但一般減法測驗題目答對3題（含）以上，則評分為中度理解（marginally reliable）；其餘情況則視為對於減法否定原則的「低度理解」，以相同的方式來判定減法同一原則的能力表現。

3. 加減法反逆原則測驗：

在加減法反逆原則測驗中，分別將六題對照題及八題反逆題各別計分。在反逆題上，若幼兒能正確回答出「一樣」，則視為成功、答對，得1分；在對照題上，若幼兒能正確回答出「不一樣」或是「變多」、「變少」，亦視為答對，即得1分。但是，如果幼兒在施測過程中不專心，施測者會重新再施測一次，此時幼兒若答對，則只得0.5分，然而，不管在對照題或是測驗題，幼兒若回答錯誤，均不得分，即為0分。

在加減法反逆原則的能力判斷上，若幼兒在六題對照題中能至少答對5題，並在八題測驗題目中至少答對6題，將判定幼兒對於加減法反逆原則有高度理解；若幼兒在六題對照題中能至少答對4題，並在八題測驗題目中至少答對5題，將判定為中度理解（marginally reliable）；其餘情況則視為「低度理解」。

四、 研究結果

（一）、 學齡前幼兒對於加減法測驗的理解程度分析

1. 受試幼兒在減法否定原則（SNP）的表現

如表一所顯示，在測驗中約有94%（34/36）的五歲幼兒已經能夠達到「高度理解」減法否定原則，約有81%（29/36）的四歲幼兒已經能夠達到「高度理解」減法否定原則，但是只有25%（9/36）的三歲幼兒能夠達到「高度理解」減法否定原則。再以「不

同社經背景」來看，約有76% (41/54) 來自中社經家庭的幼兒已經能夠達到「高度理解」，但是低社經幼兒僅約有57% (31/54) 能夠達到對於減法否定原則的「高度理解」。

插入表一

卡方檢定的結果顯示，「不同年齡」及「不同社經背景」在減法否定原則的表現達到顯著差異(依序為： $\chi^2 = 47.472$, $p < 0.01$ ； $\chi^2 = 5.981$, $p < 0.05$)，但是「不同性別」的幼兒表現則未達顯著($\chi^2 = 3.704$, $p = 0.157$)。利用變異數分析檢定上述的主要效果，以減法否定原則的理解程度為依變項，進行 2 (性別：男生、女生) x 2 (不同社經背景：中社經、低社經) x 3 (年齡：3、4、5) 多因子變異數分析，發現「不同年齡」以及「不同社經背景」的學齡前幼兒在理解「減法否定」原則時，會有顯著的差異，依序為： $F[2,96] = 44.775$, $p < 0.01$ ； $F[1,96] = 11.025$, $ps < 0.01$ 。從Tukey HSD 事後多重比較得知，5歲幼兒和4歲幼兒的表現比3歲幼兒好 ($p < 0.01$)；並且中社經背景幼兒的理解程度優於低社經背景的幼兒 ($p = 0.001$)。在交互作用方面，「不同年齡」x「不同社經背景」與「不同性別」x「不同社經背景」的交互作用達到顯著(依序為： $F[2,96] = 3.675$, $p < 0.05$ ； $F[1,96] = 7.225$, $p < 0.01$)；細言之，中社經背景是三歲幼兒比低社經背景三歲幼兒表現顯著好 ($p < 0.05$)，以及中社經背景女生比低社經背景的女生表現顯著好 ($p < 0.01$)，如圖3. 所示。

插入圖 3.

2. 受試幼兒在減法同一原則 (SIP) 的表現

不同年齡、性別、與社經背景的幼兒在減法同一原則測驗的表現，如表二所示。約有97% (35/36) 的五歲幼兒已經能夠達到「高度理解」，約有81% (29/36) 的四歲幼兒已經能夠達到「高度理解」，但是三歲幼兒只有40% (15/36) 能夠對於減法同一原則達到「高度理解」。就「性別」而言，約有81% (44/54) 的男性幼兒能夠達到「中度理解」及「高度理解」，約有94% (51/54) 的女生幼兒能夠達到「中度理解」及「高度理解」。就「社經背景」而言，約有81% (44/54) 的低社經幼兒能夠達到「中度理

解」及「高度理解」，約有94% (51/54) 的中社經幼兒能夠達到「中度理解」及「高度理解」。

插入表二

卡方檢定的結果顯示「各年齡層」的幼兒在減法同一原則的表現均達顯著，但是「不同性別」以及「不同社經背景」的幼兒表現未達顯著，依序為： $\chi^2 = 34.587$, $p < 0.01$ ； $\chi^2 = 4.389$, $p = 0.11$ ； $\chi^2 = 4.389$, $p = 0.11$ 。利用變異數檢定上述的主要效果，以受測者在減法同一原則測驗的理解程度為依變項，進行2（性別：男生、女生）x 2（不同社經背景：中社經、低社經）x 3（年齡：3、4、5）多因子變異數分析，發現「不同年齡」、「不同性別」、以及「不同社經背景」的學齡前幼兒在理解「減法同一」原則的表現均達顯著（依序為： $F[2,96] = 30.595$, $p < 0.01$ ； $F[1,96] = 7.063$, $p < 0.01$ ； $F[1,96] = 7.063$, $p < 0.01$ ）。對不同年齡的學齡前幼兒利用 Tukey HSD 進行事後多重比較分析後，發現5歲和4歲幼兒比3歲幼兒的表現顯著好（ $ps < 0.01$ ）；對於「不同性別」和「不同社經背景」的學齡前幼兒進行分析後發現，女生幼兒的表現（ $Me = 1.74$ ）比男生幼兒的表現（ $Me = 1.48$ ）顯著好，中社經幼兒的表現（ $Me = 1.74$ ）比低社經幼兒的表現（ $Me = 1.48$ ）顯著好。在交互作用方面，「不同年齡」x「性別」的幼兒在理解「減法同一」原則的交互作用達顯著（ $F[2,96] = 5.658$, $p < 0.01$ ），發現男生幼兒中，5歲和4歲的幼兒表現都優於3歲（ $ps < 0.01$ ），但是，在女生幼兒中，只有5歲的幼兒表現優於3歲（ $p < 0.01$ ）；以及「不同年齡」x「不同社經背景」的幼兒在理解「減法同一」原則的交互作用達顯著（ $F[2,96] = 5.658$, $p < 0.01$ ），發現低社經背景中，5歲和4歲的幼兒表現都優於3歲（ $ps < 0.01$ ），但是，在中社經背景中，只有5歲的幼兒表現優於3歲（ $p < 0.01$ ），如圖4. 所示。

插入圖 4.

3. 受試幼兒在加減法反逆原則（ASIP）的表現

不同年齡、性別、與社經背景的幼兒在加減法反逆原則 (ASIP) 測驗的表現，如表三所示。約有55% (20/36) 的五歲幼兒已經能夠達到「中度理解」及「高度理解」；四歲幼兒僅約有10% (4/36) 能夠達到「中度理解」及「高度理解」；三歲幼兒則是無法理解加減法反逆原則。就「社經背景」而言，約有16% (9/36) 的低社經幼兒已經能夠達到「中度理解」及「高度理解」，而中社經幼兒則約有27% (12/36) 已經能夠達到「中度理解」及「高度理解」加減法反逆原則。

插入表三

卡方檢定的結果顯示，「不同年齡」以及「不同社經背景」的幼兒在加減法反逆原則測驗的表現達顯著 ($\chi^2 = 36.114$, $p < 0.01$; $\chi^2 = 9.171$, $p = 0.01$)，但是「不同性別」的幼兒未達顯著差異 ($\chi^2 = 0.876$, $p = 0.645$)。利用變異數檢定上述的主要效果，以受測者在加減法反逆原則測驗的理解程度為依變項，進行2 (性別：男生、女生) $\times$ 2 (不同社經背景：中社經、低社經) $\times$ 3 (年齡：3、4、5) 多因子變異數分析。發現「不同年齡」以及「不同社經背景」的學前幼兒在理解「加減法反逆原則」時達顯著 (依序為 $F[2, 96] = 25.719$, $p < 0.01$; $F[1, 96] = 7.585$,)。利用 Tukey HSD 進行事後多重比較分析後，發現5歲幼兒比4歲和3歲幼兒表現顯著好 ($p < 0.01$)；並且，中社經幼兒比低社經幼兒的表現顯著好 ($p < 0.01$)。在交互作用方面，「不同年齡」 $\times$ 「不同社經背景」的幼兒在理解「加減法反逆原則」時，其兩者表現的交互作用有顯著差異 ($F[2, 96] = 5.096$, $p < 0.01$)，發現同為5歲幼兒，高社經背景園所幼兒表現優於低社經背景園所幼兒，如圖5. 所示。

插入圖 5.

(二)、基本認數與加減法原理原則的發展情形

為了檢視「口語認數」對「減法否定」原則、「減法同一」原則、以及「加減法反逆」原則之影響和其發展的先後順序，本研究採用符號檢定 (Sign test) 與 McNemar 檢定。

利用符號檢定檢視108位學齡前幼兒的口語認數對於「減法否定原則」的影響，發

現口語認數1、2的能力測驗表現優於減法否定原則表現的人數分別為22人、19人，但是口語認數3的能力測驗表現優於減法否定原則表現的人數只有12人，並且口語認數4的能力測驗表現優於減法否定原則表現的人數只有4人，如表四所示，檢定值分別為： $Z = -2.835$ ， $p = 0.005$ (VNR = 1)； $p = 0.015$ (VNR = 2)； $p = 0.143$ (VNR = 3)； $Z = -2.835$ ， $p < 0.01$ (VNR = 4)，表示習得減法否定原則前，必須先學會口語認數1、2、與3。

利用符號檢定檢視108位學齡前幼兒的口語認數對於「減法同一原則」的影響，發現口語認數1、2、3的能力測驗表現優於減法同一原則表現的人數分別為16人、13人、10人，但是口語認數4的能力測驗表現優於減法同一原則表現的人數只有4人，如表四所示，檢定值分別為： $p = 0.093$ (VNR = 1)； $p = 0.263$ (VNR = 2)； $p = 1.00$ (VNR = 3)； $Z = -4.804$ ， $p < 0.01$ (VNR = 4)，表示習得減法同一原則前，必需先學會口語認數1與2，略早於前述的減法否定原則。

利用符號檢定檢視108位學齡前幼兒的口語認數對於「加減法反逆原則」的影響，發現口語認數1、2、3、4的能力測驗表現優於加減法反逆原則表現的人數分別為75人、71人、65人、38人，但是口語認數5的能力測驗表現優於加減法反逆原則表現的人數只有13人，如表四所示，檢定值分別為： $Z = -8.374$ ， $p < 0.01$ (VNR = 1)； $Z = -8.307$ ， $p < 0.01$ (VNR = 2)； $Z = -7.938$ ， $p < 0.01$ (VNR = 3)； $Z = -5.092$ ， $p < 0.01$ (VNR = 4)； $p = 0.263$ (VNR = 5)，表示口語認數1、2、3、4的學習為習得加減法反逆原則的基礎，並且在習得口語認數5的同時，部分幼兒已經有足夠的能力學習加減法反逆原則。

插入表四

利用符號檢定檢視108位學齡前幼兒「減法否定」原則、「減法同一」原則、與「加減法反逆」原則三種能力之間的發展情況，發現減法否定原則的測驗表現優於減法同一原則表現的人數為5人，減法同一原則的測驗表現優於減法否定原則表現的人數為12人，但是減法否定原則、減法同一原則測驗表現優於加減法反逆原則表現的人數分別為58人、65人，如表五、表六、表七所示，檢定值分別為： $p < 0.143$ ； $Z = -7.484$ ， $p < 0.01$ ； $Z = -7.938$ ， $p < 0.01$ ，表示減法否定原則與減法同一原則的習得難易度

相同，而加減法反逆原則卻是比前兩項原則更難。

接著利用 McNemar 檢定來驗證符號檢定的結果是否一致。研究結果發現 McNemar 檢定與符號檢定的結果一致，減法同一原則和減法否定原則的發展大約在同一時期，表示受試者在學會減法同一原則時，亦可同時學會減法否定原則。然而，「加減法反逆原則」在「減法否定原則」以及「減法同一原則」兩種能力之間的發展先後順序，發現加減法反逆原則和減法否定原則以及減法同一原則的發展順序情形是有所差異的，檢定值分別依序為： $\chi^2 = 56.017$ ， $p < 0.01$ ； $\chi^2 = 63.015$ ， $p < 0.01$ ，表示受試者會先理解減法否定原則和減法同一原則，再理解加減法反逆原則。

插 入 表 五

插 入 表 六

插 入 表 七

利用皮爾森相關係數來檢定「減法否定原則」、「減法同一原則」、「加減法反逆原則」與「口語認數能力」之間的相關性，發現，「口語認數能力」與「減法否定原則」以及「減法同一原則」有高度相關，但是「口語認數能力」、「減法否定原則」以及「減法同一原則」都與「加減法反逆原則」無相關，如表八。

插 入 表 八

五、 發現與討論

基於實驗結果，可以得出下列四點研究發現：

(一)、 學齡前幼兒已經開始具有非正式的基本加減法原則

本研究指出學齡前幼兒已經可以理解並建構基本數學原理與概念，也可以彈性運用這些原理在具體物的運算上；具體而言，約四分之一的三歲幼兒及大多數的四歲與五歲幼兒已經高度地理解「減法否定原則」，而更多的幼兒甚至對「減法同一原則」的理解程度更高；此外，約三分之一的五歲幼兒可以理解相當抽象而且複雜的「加減法反逆原則」，惟大部分的三歲與幼兒無法理解。對四歲幼兒而言，加減法反逆原則的理解是在他們可以學習的範圍之內，若能給予系統性的教學，即便是很短的時間，四歲的幼兒亦可以學習到複雜的加減法反逆原則(Lai, Baroody, Johnson, 2008)。本研究中三、四歲幼兒在「加減法反逆原則」的表現與 Bisanz 等人(Klein & Bisanz, 2000；Rasmussen & Bisanz, 2003；Sherman & Bisanz, 2007) 所提出三、四歲的幼兒可以理解「加減法反逆原則」的研究發現有很大的出入；而這個差異很有可能是研究方法不同所造成的(細節請參考 Baroody & Lai, 2007)。

以上的證據顯示，影響幼兒策略選擇與運用的重要因素是準備度(developmental readiness)或是成熟度 (Baroody, Tiilikainen, Tai, 2006)；在解決減法同一或是減法否定原則時，幼兒可以採取正確的策略，但是，若是在解決更複雜的減法反逆原則時，卻發現幼兒無法解決或是表現很不穩定(inconsistent)，由此可見，數學的理解是局部性的(local) 而非全面性(comprehensive)。

在實際的教學上，我們可以拿具體的教具教導三歲的小朋友非正式加減法概念，利用這些教具當作非正式數學與正式數學(以符號為主)的媒介，讓小朋友可以從具體物慢慢地連結至抽象符號，理解正式數學的意義，此歷程對小朋友以後學習正式數學時將有很大的幫助 (Baroody, Lai, Li, Baroody, 2009)。

此外，從本研究的發現可以得知，三歲階段的幼兒已經有基本的運算概念與原則，可見幼兒數學思考開始的時間更早，未來的研究可以探究這些基本運算概念如何在三歲前逐漸的形成。

(二)、 加減法反逆原則的習得是獨立於基礎的計算能力之外

過去許多研究(e.g., Baroody & Lai, 2007；Siegler & Stern, 1998) 提出學齡前幼兒

在學習「加減法反逆原則」時，需要以「減法否定原則」、「減法同一原則」、以及基本的口語認數經驗為基礎；然而，也有不少學者(Bryant, Christie, & Rendu, 1999; Rasmussen et al., 2003; Sherman & Bisanz, 2007) 的研究發現，幼兒加減法反逆原則的理解與其他的運算技巧與能力是沒有相關性的。本研究雖然得出「加減法反逆原則」的習得在「減法否定原則」與「減法同一原則」之後(如符號檢定與McNemar 檢定所示)，但是前者與後兩者的相關程度卻是相當低($r_s < .3$, 如表八所示)，所以，本研究支持後者的論述，亦即幼兒在「加減法反逆原則」的習得似乎與其他三項基本數學能力並不相關。那加減法反逆原則的習得又與何種技巧或是概念知識有關呢？未來的研究可以探究伴隨著或是引發(trigger)「加減法反逆原則」的因素為何。

(三)、社經背景對於學齡前幼兒的學習情況已經有十分明顯的影響

本研究中，社經背景高的幼兒表現多優於社經背景低的幼兒，與Starkey、Klein與Wakeley (2004) 研究不謀而合。Starkey, Klein, & Wakeley指出社經地位對於數學知識成就差異的影響從幼兒階段就開始了，因為低社經地位的幼兒從家庭中所得到的支持與協助，遠遠地少於中、高社經地位的幼兒。

再進一步探討為何高社經地位家庭子女的學習成就會高於低社經地位的家庭子女？原因可能有以下幾點：一、家長的教育期望：在高社經地位的家庭中，父母親本身的素質較高，因此對其子女會有較多、較高的要求與期望，以致於對於教育子女的想法、理念、或是相關資訊都會更加留意，對於子女的教育亦會投入更多的心血與心力，像是給予子女更多的學習機會，如多元的才藝課程、學習素材（圖書、繪本），或是休閒活動（電腦軟體、數學遊戲、玩具）與文化刺激（美術館、圖書館、博物館）等。如同，Alwin與Thornton (1984) 研究發現當家庭的社經地位越高，家長可以提供子女較好的社會及經驗條件，物質環境也較豐富，對於子女未來的教育經驗、學習成就以及職業的選擇均有重大的影響。馬信行 (1985) 亦發現成績好的學生，其家庭社經背景較高，家中父母對子女的學業關心及鼓勵的程度均較高。二、家長管教方式：家長除了給予子女較豐富的物質環境，同時也對子女的管教採取積極主動的態度，主

動了解子女的求學生活、多參與學校的親子活動等，並且給予更多的關心、關愛、以及課業上的鼓勵，像是經由親子共讀的過程中，與子女一同學習與成長。因此，高社經地位的家長對於子女的教育期望、教育資源、管教方式、與親子互動型態較低社經地位的家長趨向積極，所以更有助於子女在學習成就上的優勢。

反觀，低社經家庭背景的幼兒或子女，其父母親所能給予的社會或教育資源較少、接收到的文化刺激也較少，因此教育當局應該正視這樣的議題，並且協同學校、教師或是家長協助低社經家庭的子女，給予他們更多提早介入的教育機會(early intervention)，避免差距越來越大，也縮減因社經背景所導致的學習成果差異。

(四)、學齡前階段的幼兒在數學成就性別差異上並不明顯。

本研究中，在「減法否定原則」的理解上，不同社經背景的男、女幼兒有不同的理解程度。對於男生幼兒，不管是高或低社經背景，他們的理解程度均相同，但是對於女生幼兒，高社經背景的女生幼兒理解程度比低社經背景的女生幼兒好，導致此結果的原因可能是因為高社經地位的家長對於子女的教育期望、教育資源、管教方式、與親子互動型態較低社經地位的家長趨向積極，所以使得幼兒的學習與成長較低社經背景的幼兒擁有更多的優勢，而其付出在女生幼兒身上比男生幼兒擁有更好的成效。在「減法同一原則」的理解上，不同年齡的男、女幼兒有不同的理解程度。三歲年齡層中，女生的理解程度比男生好；四歲及五歲年齡層，則男、女生的理解程度相同，導致此結果可能是因為幼兒大約在四歲左右可以習得「減法同一原則」，而男、女生在此階段的學習是較無差異的，但是在三歲左右卻是女生優於男生，表示三歲男生對於數理的理解較慢於同年齡的女生。

整體而言，學齡前女生的數學學習成就不會比男生差，甚至可以比男生好，如同Feingold (1992) 反對男優於女的先天差異觀點，認為外在的環境及教育經驗才是造成男女能力差異的主要因素，所以如果給予女性充足的教育經驗，則女性能力與男性的能力是不分軒輊的。學者Ernest (2006) 研究發現，數學表現上的性別差異和教師期望之間有一定的相關，63%的教師覺得男生的數學能力優於女生，因此除了教師的

觀念會無意的透過言行傳遞給學生，教師也可能會無意識地給予男生多於女生的鼓勵與支持，如同Lummis與Stevenson（1990）研究指出不論是美國、台灣或日本，在數學學習的過程中，女生兒童接收到來自父母、學校教師及同儕間的鼓勵比男生兒童來得少。范文貴與李傳準（2008）也指出造成男、女生在數學成就的性別差異因素，可能是來自社會文化背景的影響、國家社經地位的影響、家長對於性別差異的觀念、教師或學校對於性別的潛在觀念等。

因此，如果從幼兒階段開始，家長與教師在數理學習上就不斷給予女生幼兒更多正面的鼓勵與支持，她們應該在數理的學習上會有更好的成就，未來的研究可以更深入的探究這個假設。

六、 參考文獻

中文部分

- 吳元良（1997）。不同數學課程、性別、社經地位的國小學生在數學態度及成就上比較之研究。*國民教育研究*，1，163-200。
- 李默英（1982）。性別、年級、數學學習態度、性別角色與數學成就之關係性別。未出版之碩士論文，國立政治大學教育研究所，台北。
- 周新富（1999）。國中生家庭背景、家庭文化資源、學校經驗與學習結果關係之研究。未出版之博士論文，國立高雄師範大學教育研究所，高雄。
- 林碧珍、蔡文煥（2005）。TIMSS 2003 臺灣國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。載於張秋男（主編），*國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003*（頁125-164）。台北：國立臺灣師範大學科學教育中心。
- 范文貴、李傳準（2008）。西方數學學習性別差異研究述評。*比較教育研究*，224，77-82。
- 馬信行（1985）。家庭文化背景與學業成績的關係。*政治大學學報*，51，139-165。
- 張善楠、黃毅志（1997）。原漢族別、社區與學童學業成績關聯性之因果機制。論文發表於少數族群國際學術研討會，台東。
- 張麗芬（2005）。兒童數能力的發展。*兒童與教育研究*，1，85-109。

- 曹博盛(2005)。TIMSS 2003 臺灣國中二年級學生的數學成就及其相關因素之探討。載於張秋男(主編), *國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003* (頁 55-94)。台北:國立臺灣師範大學科學教育中心。
- 陳雅莉(1993)。城鄉父母對兒童的管教態度與兒童性別、排行、數學學習成就及父親社經地位、母親是否就業之相關研究—以國小六年級兒童為例。*傳習*, 11, 1-28。
- 黃國清(2008)。數學學習成就之性別差異研究—以九年一貫課程七年級數學綱要為例。*中等教育*, 59(4), 40-56。
- 簡茂發、李虎雄、江永明、朱玲玲、李秀玉、吳美麗等人(1999)。教育部八十六、八十七年度國民教育階段學生基本成就學習評量研究研究報告。台北:國立臺灣師範大學科學教育中心。
- 簡茂發、李虎雄、陳昭地、林保平、曹博盛、王淑真等人(1995)。教育部八十四年度國民教育階段學生基本成就學習評量研究研究報告。台北:國立臺灣師範大學中等學校研習中心。
- 簡茂發、李虎雄、陳昭地、林保平、曹博盛、楊瑞智等人(1996)。教育部八十五年度國民教育階段學生基本成就學習評量研究研究報告。台北:國立臺灣師範大學中等學校研習中心。

英文部分

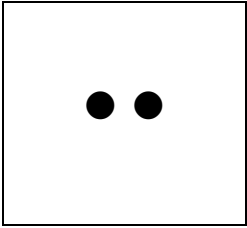
- Alwin, D. F., & Thornton, A. (1984). Family origins and the schooling process: Early versus late influence of parental characteristics. *American Sociological Review*, 49, 784-802.
- Baroody, A. J., & Lai, M.-L. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle: A Taiwanese sample. *Mathematics Thinking and Learning*, 9(2), 131-171.
- Baroody, A. J., Tiilikainen, S. H., & Tai, Y. (2006). The application and development of an addition goal sketch. *Cognition and Instruction*, 24, 123-170.
- Baroody, A. J., Lai, M., -L., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 41-60.
- Biggs, J. B. (1978). Individual and group differences in study processes. *British Journal of*

- Educational Psychology*, 48, 266-279.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction inversion, identify, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 194-212.
- Campbell, P. B. (1991). So what do we do with the poor, non-white female? Issues of gender, race, and social class in mathematics and equity. *Peabody Journal of Education*, 66, 95-112.
- Ernest, P. (2006). *Mathematics and gender: Doctoral course handbook*. Exeter: University of Exeter, School of Education.
- Feingold, A. (1992). Sex differences in Variability in Intellectual Abilities: A New Look at an Old Controversy. *Review of Educational Research*, 62(1), 61-84.
- Huttenlocher, J., Jordan, N. C., & Levine, S.C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General*, 123, 284-296.
- Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamonj, S. J.(1990). Gender differences in mathematics performance. *Psychological Bulletin*, 107, 299-324.
- Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54, 105-115.
- Lai, M.-L., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, 23(1), 216-235.
- Lummis, M., & Stevenson, H. W. (1990). Gender differences in beliefs and achievement: A cross-cultural study. *Developmental Psychology*, 26(2), 254-263.
- Mullis, I. V. S., Martin, K. D., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eight grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS International Study Center, Boston College.
- Rasmussen, C., Ho, E., & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 89-102.
- Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127, 377-397.
- Sherman, J., & Bisanz, J. (2007). Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development*, 8, 333-344.

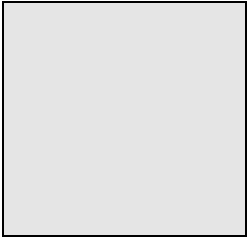
- Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A.(2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly, 19*, 99-120.
- Stevenson, H. W., Lee, S. -Y., & Stigler, J. W.(1986). Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children. *Science, 231*, 693-699.
- Wedge, T. (2007). Gender perspectives in mathematics education: Intentions of research in Denmark and Norway. *ZDM Mathematics Education, 39*, 251-260.

七、 附錄

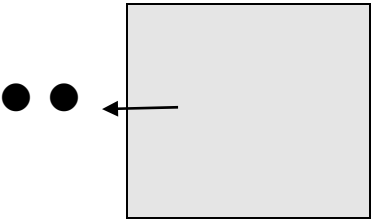
施測者在一個藍色紙板上，揭示 1 到 4 個綠色的代幣，並說：「這裡有這麼多個。」



3 至 5 秒後，將代幣推入黃色盒子裡。



在無情境的減法否定原則測驗中，施測者會從盒子中移出兩個代幣，揭示在紙板上 3 至 5 秒，並說：「現在，拿出來這麼多個。」，然後收起代幣。

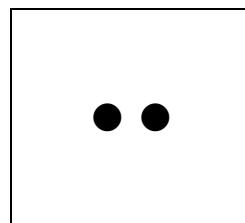


施測者問：「請問，現在盒子裡面有幾個？」



圖 1. 減法否定原則測驗流程

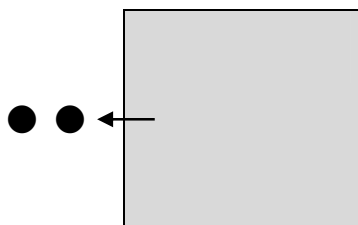
施測者在一個藍色紙板上揭示1到4個綠色的代幣，並說：「這裡有這麼多個。」



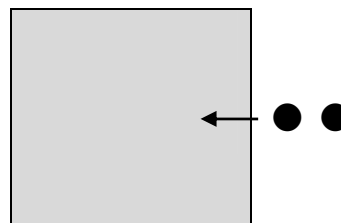
3 至 5 秒後，將代幣推入黃色盒子裡。



施測者會從盒子中移出兩個代幣，揭示在紙板上3至5秒，並說：「拿出來這麼多個。」，然後收起代幣。



施測者會先揭示兩個代幣在紙板上3至5秒，再移進盒子中，並說：「放進去這麼多個。」。



施測者問：「現在，盒子裡的，跟剛剛一開始盒子裡的，是「一樣多」還是「不一樣多」？」



圖 2. 加減法反逆原則測驗流程

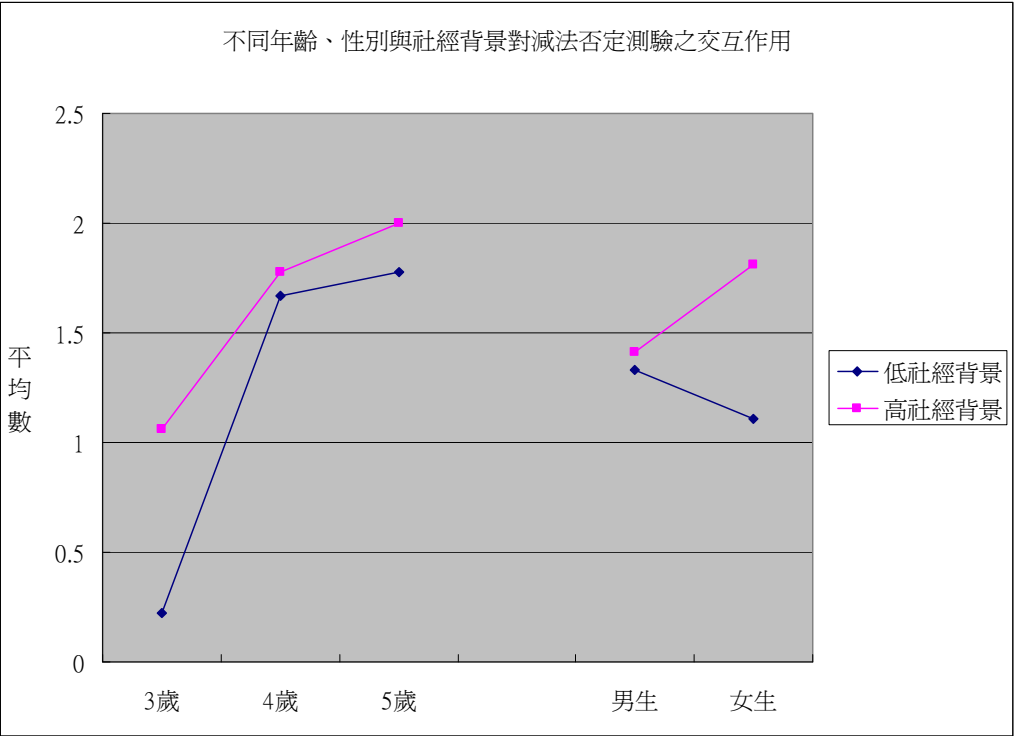


圖 3. 不同年齡、性別與社經背景對減法否定測驗之交互作用

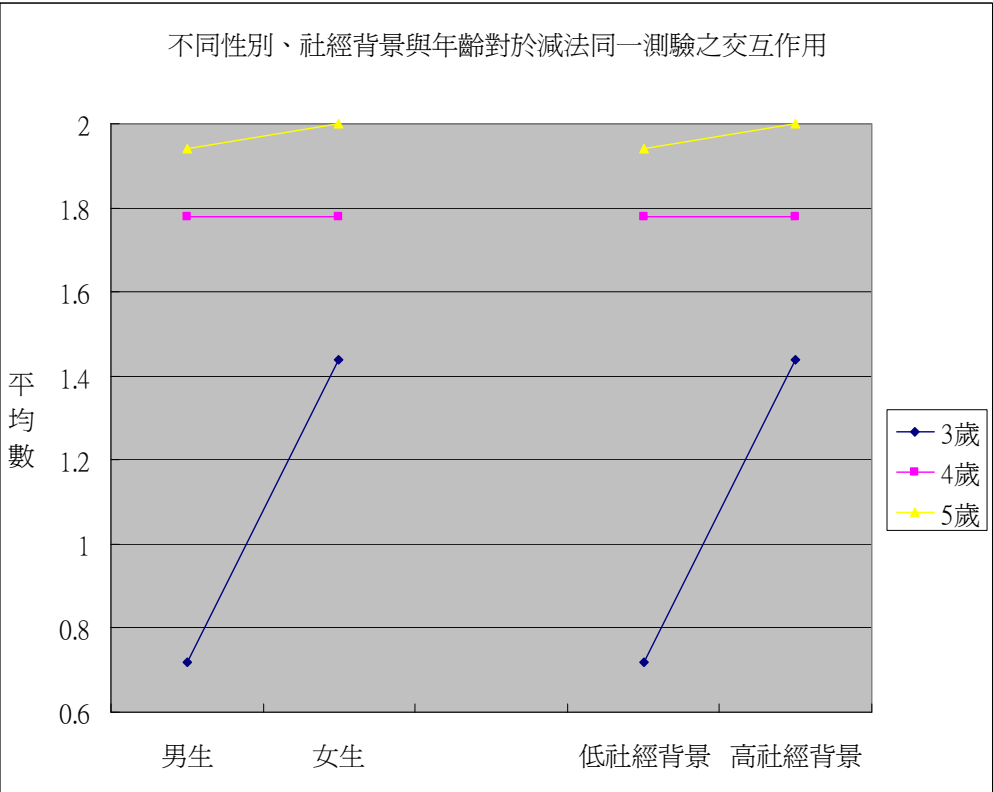


圖 4. 不同性別、社經背景與年齡對減法同一測驗之交互作用

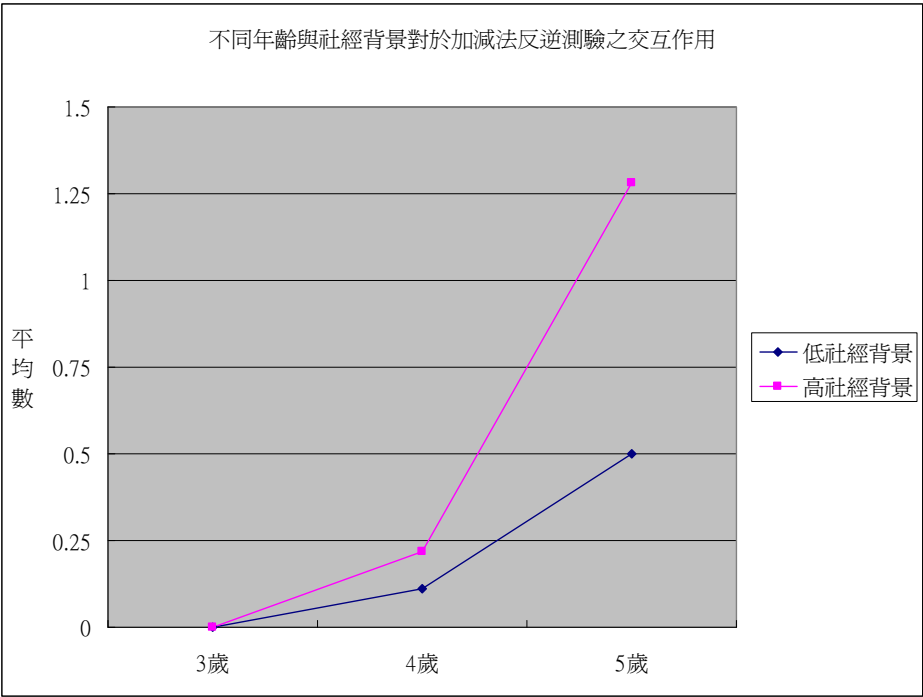


圖 5. 不同年齡與社經背景對加減法反逆測驗之交互作用

表一

幼兒對於減法否定原則的理解程度交叉表

年齡	性別	社經背景	減法否定原則的理解		
			高度理解	中度理解	低度理解
3	男	中	2	2	5
		低	1	0	8
	女	中	5	3	1
		低	1	0	8
4	男	中	7	0	2
		低	8	0	1
	女	中	9	0	
		低	5	4	
5	男	中	9		
		低	9		
	女	中	9		0
		低	7		2

表二

幼兒對於減法同一原則的理解程度交叉表

年齡	性別	社經背景	減法同一原則的理解		
			高度理解	中度理解	低度理解
3	男	中	3	4	2
		低	1	1	7
	女	中	7	2	0
		低	4	2	3
4	男	中	6	2	1
		低	9	0	0
	女	中	9	0	
		低	5	4	
5	男	中	9	0	
		低	8	1	
	女	中	9		
		低	9		

表三

幼兒對於加減法反逆原則的理解程度交叉表

年齡	性別	社經背景	加減法反逆原則的理解		
			高度理解	中度理解	低度理解
3	男	中			9
		低			9
	女	中			9
		低			9
4	男	中	2	0	7
		低	0	1	8
	女	中		0	9
		低		1	8
5	男	中	5	2	2
		低	1	3	5
	女	中	5	1	3
		低	1	2	6

表四

基本加減法原則與口語認數測驗之人數交叉表

		口 語 認 數									
		1		2		3		4		5	
		不理解	理解	不理解	理解	不理解	理解	不理解	理解	不理解	理解
減法否定											
不理解	14	22	17	19	24	12	32	4	34	2	
理解	6	66	6	66	5	67	28	44	54	18	
減法同一											
不理解	13	16	16	13	19	10	25	4	29	0	
理解	7	72	7	72	10	69	35	44	59	20	
加減法反逆											
不理解	19	75	23	71	29	65	56	38	81	13	
理解	1	13	0	14	0	14	4	10	7	7	

表五

減法否定原則與減法同一原則之人數交叉表

減法否定原則	減法同一原則	
	不理解	理解
不理解	24	12
理解	5	67

表六

減法否定原則與加減法反逆原則之人數交叉表

減法否定原則	加減法反逆原則	
	不理解	理解
不理解	36	0
理解	58	14

表七

減法同一原則與加減法反逆原則之人數交叉表

減法同一原則	加減法反逆原則	
	不理解	理解
不理解	29	0
理解	65	14

表八

基本加減法原理原則與口語認數能力之皮爾森相關性分析表

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.減法否定原則	1	.617(**)	.223(*)	.559(**)	.662(**)	.715(**)	.714(**)	.641(**)
2.減法同一原則		1	.217(*)	.532(**)	.574(**)	.602(**)	.554(**)	.548(**)
3.加減法反逆原則			1	.090	.150	.177	.225(*)	.303(**)
4.口語認數=1				1	.847(**)	.758(**)	.714(**)	.667(**)
5.口語認數=2					1	.831(**)	.837(**)	.723(**)
6.口語認數=3						1	.870(**)	.786(**)
7.口語認數=4							1	.846(**)
8.口語認數=5								1

** 在顯著水準為0.01時 (雙尾)，相關顯著。

* 在顯著水準為0.05時 (雙尾)，相關顯著。

活動報馬仔

一、 2010/04/21 (三)~2009/04/24(六)

NCTM 2010 Annual Meeting & Exposition

地點：San Diego, CA

參考網址：<http://www.nctm.org/conferences/default.aspx?id=52>

二、 2010/06/04(五)~2010/06/05(六)

第 2 屆科技與數學教育學術研討會

地點：國立台中教育大學(台中市西區民生路 140 號)

參考網址：<http://mathed.ntcu.edu.tw/TME2010/www/home.html>

三、 2010/06/19(六)

2010 數學暨資訊教育研討會

地點：國立台北教育大學至善樓國際會議廳

參考網址：<http://120.127.4.19/web/webforschool/index.html>

四、 2010/07/18(日)~2010/07/23(五)

PME34

**Conference Of The International Group For The Psychology
Of Mathematics Education**

地點：Federal University of Minas Gerais [UFMG],

Belo Horizonte, Brazil

參考網址：<http://pme34.lcc.ufmg.br/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

(1) 期刊論文，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

(2) 圖書單行本，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw