專家教師與新手教師在數學命題應用方面的差異性研究

于文華

山東師範大學數學科學學院

摘要

數學命題應用反映的是受試者 CPFS 結構中的程式性知識成分。實驗發現，專家教師與新手教師在命題應用方面成績存在顯著性差異。命題應用與問題解決教學中的自我監控能力顯著相關。對於在問題解決教學中具有高監控能力的教師，認知策略對命題應用有直接影響，而對於低監控能力的教師，認知策略對命題應用沒有直接影響。

關鍵字：專家教師與新手教師、命題應用、自我監控、認知策略

通訊作者：于文華 sdnuywh@126.com

壹、研究背景

現實的教學實踐中，我們會發現，很多優秀數學教師在講解一道數學問題時，會找出它的各種變式，融會貫通地進行教學，使學生的思維靈活性得到發展成為可能。實際上，這種找出各種變式的能力，在 Lawson & Chinnappan（2000）的研究中稱為“命題應用”能力。他們的研究旨在考察知識的連通性在解幾何題中的作用，其中是以三項作業的成績為依據把受試者分成高能力組和低能力組的，這三項作業依次是：（1）自由回憶：給定一個目標，讓受試者回憶與該目標有關的知識；（2）辨認推理：給出一個圖形以及圖形滿足的條件，讓受試者去推測與圖形有關的若干結論；（3）命題應用：給出某條定理，要求受試者自編該定理應用的題目。其中的第三條即為考察命題應用能力的作業。

那麼，這種命題應用能力，在專家教師與新手教師之間存在差異嗎？與教師的認知結構是否存在一定的相關性？與教師問題解決教學中自我監控能力是否存在一定的相關性？這正是本研究所關心的問題。

基於資訊——加工研究範式，很多研究者使用專家——新手的對比來考察教師的認知結構及其對教學的影響， Berliner, Carter, Leinhardt & Borko 等人取得了一系列有意義的結果（Berliner, 1988; Borko, 1986; Carter, Cushing, Sabers, Stein & Berliner, 1988; Leinhardt & Greeno, 1986; Leinhardt & Smith, 1985），概述如下：（1）較之新手教師，專家教師認知結構中具有更多的教學知識、學科內容知識和教學法內容知識；其認知結構的組織具有精細性、聯繫性、易提取性的特點，結果，他們在計畫與教學互動過程中能更有效地處理資訊。（2）專家教師能將現存教學圖式中的有關資訊進行組合以適應具體教學目標的要求，而新手教師很難做到這一點，因為他們在教學法內容知識方面的圖式貯存的信息量十分有限。（3）新手教師的認知結構格外具局限性，在利用認知結構時，

他們不得不改造、精細他們可利用的圖式。(4)專家教師認知結構中包含具有代表學科意義、具很好解釋性的例子，而新手教師不得不把它作為備課中的一部分，且經常是無效的。(5)專家教師良好的認知結構，降低了他們在教學中的認知負荷。此類研究以數學學科為依託，從一般意義上考察了教師的認知結構的差異性，及對教學的影響。

喻平等（2003）結合數學學科的特徵，提出了一種特別適用於數學學科的認知結構——數學知識表徵的 CPFS 結構理論。所謂個體的 CPFS 結構，是指個體在頭腦中形成的概念域（concept field）、概念系（concept system）、命題域（proposition field）與命題系（proposition system）的圖式。概念域是某一概念等價定義的圖式，反映了從不同側面對同一概念的描述，揭示了概念之間的等置抽象關係；概念系刻畫了一組數學概念之間由數學抽象關係組成的知識網路在頭腦中的貯存方式。同樣，命題域是一組等價命題的圖式，命題系是一個半等價命題網路的圖式，兩者精確地描述了數學命題及其關係在頭腦中的組織形式。因而 CPFS 結構的涵義是：(1)個體頭腦中內化的數學知識網路。各知識點（概念、命題）在這個網路中處於一定的位置，知識點之間或具有等值抽象關係、或強抽象關係、或弱抽象關係。(2)正是由於網路中知識點之間具有某種抽象關係，而這些抽象關係本身就蘊涵著思維方法，因而網路中各知識點之間的連結包含著數學方法，即"連線集"為一個方法系統。(3)數學學習中特有的認知結構，是個體頭腦中內化的、合乎數學邏輯特徵的知識結構。按照奧蘇貝爾的刻畫認知結構的優良程度的標準——"清晰性、穩定性、概括性、包容性"，喻平等（2003）認為對於數學認知結構而言，這種刻畫是比較模糊的，而用 CPFS 結構則能比較準確地描述數學認知結構的特殊性。

Anderson（1980）等人提出將知識分為兩大類，一類為陳述性知識，一類為程式性知識。陳述性知識是關於事實的知識，是人所知道的有關事物狀況的知識。例如"三角

形內角和等於180°”、“直角三角形斜邊的平方等於兩直角的平方和”等，都是陳述性知識。而程式性知識則是關於人怎樣做事的知識，即由完成一件事所規定的程式、步驟及策略等組成的知識。簡言之，陳述性知識是關於“是什麼”的知識，程式性知識是關於“怎麼辦”的知識。按此分法，程式性知識本質上表現為一種技能，因而程式性知識又分為兩個亞類：一類是通過練習，其運用能達到相對自動化，很少或不需要受意識控制的知識；另一類是受意識控制的，其運用難以達到自動化程度的知識。加涅把前者稱為智慧技能，後者稱為認知策略。於是，知識可以如下分類：

$$\text{知識}\begin{cases}\text{陳述性知識}\\ \text{程式性知識}\begin{cases}\text{智慧技能}\\ \text{認知策略}\end{cases}\end{cases}$$

研究（喻平，2004）發現，程式性知識較陳述性知識對遠遷移的產生和影響較大，而數學命題應用檢測的正是CPFS結構中的程式性知識成分。那麼，命題應用與CPFS結構中的陳述性知識以及認知策略又有何關係呢？

自我監控是元認知的一種成分，它是指個體為了達到預定的目標，將自身正在進行的實踐活動過程作為物件，不斷地對其進行自覺地計畫、監察、檢查、評價、回饋、控制和調節的過程。近些年來，心理學家對自我監控與學習的關係作了大量的研究（董奇等，1996），包括自我監控的結構、自我監控與思維品質的關係、閱讀理解中的自我監控、記憶活動中的自我監控、寫作中的自我監控等等。本研究關心的是中學數學教師在指導問題解決教學中的自我監控能力，考察它與數學命題應用可能的相關性。

基於此，本文旨在考察數學命題應用的專家——新手差異性、與陳述性知識、認知策略的相關性以及與教師問題解決教學中自我監控能力的相關性。

貳、研究方法

2.1 受試者

選取某省屬師範大學數學科學學院2006級、2007級教育碩士共30人，以及從數學與應用數學專業本科生畢業班的三個班128人中隨機抽取30人作為受試者。其中30名教育碩士均為中學數學一線教師且工作5年以上，相對于本科學生來講，視為專家教師。而後者已經學過數學教育學及其它相關學科，且都只經歷過教學實習，但未參加工作過，視為新手教師。

2.2 工具

2.2.1 命題應用與陳述性知識測試問卷

借鑒於Lawson & Chinnappan（2000）的研究中以三項作業自由回憶、辨認推理、命題應用的成績為依據把受試者分成高能力組和低能力組，喻平等（2003）以類似的三項作業：自由回憶、辨認推理、命題應用來考察學生有關“兩線段長度相等”的命題域（proposition field）與命題系（proposition system）的形成情況，並依據其成績將其分成高CPFS結構組與低CPFS結構組。

本研究中，命題應用的測試借鑒於上述研究，用兩類均要求“結論為證明一條直線是一個圓的切線”的問題進行測試。

自由回憶作業是從量的方面檢測受試者是否形成相對完善的關於“證明直線是圓的切線”的命題域和命題系，而辨認推理則是從質的方面檢測受試者是否形成相對完善的關於“證明直線是圓的切線”的命題域和命題系，二者主要檢測受試者形成的CPFS結構中的陳述性知識成分。

自由回憶作業：欲證一條直線是一個圓的切線，可利用哪些方法？請你儘量多地找出這些方法·（計分方式：給出一種方法得1分）

辨認推理作業：由下面的圖形及條件，你能推出哪些結論？（計分方式：給出一個結論得1分）

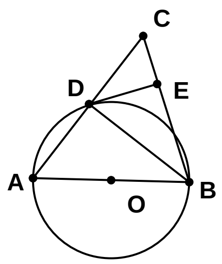


图1

如圖 1，AB 是⊙O的直徑，⊙O過 AC 的中點 D，$DE \perp BC$，垂足為 E。

（1）由這些條件，你能推出哪些結論？

（2）若 $\angle ABC$ 為直角，其他條件不變，除上述結論外，你還能推出哪些別的正確結論?

要求：不再標注其他字母，找結論的過程中所連輔助線不能出現在結論中，不寫推理過程。

命題應用作業：就以下問題的要求盡可能多地自編題目。（計分方式：每個問題：沒有編出題目得0分；編擬出題目，但所編題目有錯誤，得1分；每編出一道正確題目，得2分；每編出一道正確新穎的題目得4分。）

第一類問題：要求滿足兩個條件：（i）題目的結論必須是證明一條直線是一個圓的切線；（ii）題目的解答要體現直角三角形斜邊上的中線長等於斜邊的一半。

第二類問題：要求滿足兩個條件：（i）題目的結論必須是證明一條直線是一個圓的切線；（ii）題目的解答要體現等腰三角形性質的應用。

2.2.2 中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷

章建躍（2003）採用驗證性因素分析法建立了與一個中學生數學學科自我監控能力的最佳擬合的含有五個一階因數的二階因素模型，該模型具有很高的結構效度；並編寫《中學生數學學科自我監控能力問卷》，該量表由47個專案組成，分為五個維度，即計畫、調節、檢驗、管理、評價，每個題目採用Likert五點記分法。問卷的總體同質性信度指數是0.8871，五個因數的同質性信度指數分別是0.6646、0.7405、0.7853、0.7800、

0.6814。

在本研究中，從上述問卷的47個問題中選出38個與問題解決有關的問題，將其從學生解題的角度轉換為教師指導學生問題解決教學的角度，例如將原來的第二題：“在具體解答之前，我會對問題的答案進行猜想。”改為“在具體引導學生解決問題之前，我會引導學生對問題的答案進行猜想。”修訂後編制《中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷》，該問卷結構由計畫、調節、檢驗、管理、評價五要素組成。在專家的指導意見下進行修改，最後確定出測查專案40個，總體同質信度0.82。問卷計分採用Likert五點記分法。

2.2.3 利用“抽屜原理”進行命題應用問卷

為了考察認知策略在受試者命題應用過程中的作用，而又排除陳述性知識因素的干擾，則要使專家教師組與新手教師組在命題應用時 CPFS 結構中的有關的陳述性知識大致處於同一水準，於是選擇受試者均不太熟悉的“抽屜原理”（抽屜原理：如果把 m 個元素分成 n 個集合（m>n），則存在一個集合，其中至少有兩個元素。）作為研究內容，以 3 個測試題目來考察受試者的命題應用，這 3 道抽屜原理應用題目分別為 1 道代數領域內題目、1 道幾何領域內題目和 1 道開放題目。

問卷分為前測與後測兩部分，前測時，首先給受試者講解抽屜原理，然後給他們講解兩個例題，但並不指出更不強調利用抽屜原理解決問題時的認知策略，緊接著給出問卷測試。後測時，首先通過四個問題的講解與反思，指導受試者確實形成利用抽屜原理解決問題的主要策略：關鍵是合理分組，即構造適合題目條件的抽屜，主要涉及兩個要素：①每個抽屜滿足的條件（分組準則）②抽屜個數。在保證每個受試者獲得認知策略的基礎上，再一次給出問卷測試。

因此，在本研究中存在這樣的基本假設：在利用“抽屜原理”進行命題應用時，專

家組與新手組的陳述性知識大致相當；在本問卷的前測與後測時，受試者關於利用“抽屜原理”進行命題應用的認知策略是不同的，即前測時，受試者不具有相關的認知策略，而後測時已具有相關的認知策略。

利用“抽屜原理”進行命題應用的三道測試題目如下：

代數領域問題： 考慮自然數1，2，3，4，5，6，7，8，9的兩兩互質問題，利用抽屜原理，自編一題，並寫出證明過程。

幾何領域問題： 將一個圓盤（包括圓周）六等分，把整個圓分成六個中心角為60°的扇形。考慮在圓盤上放入幾個點，自編一題。

開放問題：利用抽屜原理，自選題目，盡可能多地編題。

（計分方式：每個問題：沒有編出題目得0分；編擬出題目，但所編題目有錯誤，得1分；每編出一道正確題目，得2分；每編出一道正確新穎的題目得4分。）

2.3 過程

對兩組受試者分別進行以下實驗：

第一天：(1)將三份作業自由回憶、辨認推理、命題應用作業分為3張試卷，先後發給受試者，做完一張試卷，收回併發下一張試卷。自由回憶作業5分鐘、辨認推理作業5分鐘、命題應用作業20分鐘。(2)發《中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷》，30分鐘後收回。

第二天：(1)首先給受試者講解抽屜原理，然後給他們講解兩個例題：

例 1 從前 25 個自然數中任取 7 個數，證明：取出的數中必有兩個數，它們相互的比值在[2/3，3/2]內。

例 2 在任意給出的 100 個整數中，都可以找出若干個數來（可以是一個數），它們的和可被 100 整除。

(2)其次，發利用“抽屜原理”進行命題應用問卷，30 分鐘後收回。

(3)然後，通過4個問題指導受試者探求利用抽屜原理解題與命題應用的策略。

問題1　製造抽屜時，首要的第一步就是要考慮構造的抽屜應滿足什麼條件。兩個例子中每個抽屜各滿足什麼條件？

問題 2　例 1 中為什麼是任取 7 個數，取 8 個會怎樣？6 個呢？一般情況取 $n(n>7$ 或 $n<7)$呢？

問題 3　例 2 中為什麼是“它們的和可被 100 整除”，改成 99 命題成立嗎？101 呢？一般情況取 $n(n>100$ 或 $n<100)$呢？

問題 4　構造的抽屜個數應滿足什麼關係？

（4）最後，再發利用“抽屜原理”進行命題應用問卷，30分鐘後收回。

（5）對受試者進行訪談。

參、研究結果與討論

3.1 專家教師與新手教師四項作業的差異

表1給出了專家教師組與新手教師組在命題應用與陳述性知識測試問卷和中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷中的四項作業任務自由回憶、辨認推理、命題應用、自我監控得分的平均分，並對每項任務的得分作了t檢驗。

表1　專家教師組與新手教師組4項作業的成績比較

	自由回憶	辨認推理	自我監控	命題應用
專家教師組	3.97	15.60	135.8	12.07
新手教師組	4.90	15.37	115.7	8.07
P	0.048	0.646	0.003	0.000

3.1.1 專家教師與新手教師命題應用的差異

從表1中可以看出，專家教師組與新手教師組在命題應用上的差異極顯著，其顯著性達到0.01水準。這和我們預期的結果以及教學實踐中經驗發現的結果具有一致性。

命題應用作業的分析發現，首先，專家教師在命題應用的新穎性上好于新手教師。8名專家教師（占總受試者的26.7%）各寫出一道很有新穎性的題目，而只有2名新手教師（占總受試者的6.7%）各寫出一道新穎性的題目。其次，專家教師在命題應用的廣泛性上好于新手教師。有4名專家教師（經訪談知皆為高中數學教師）寫出的題目是以向量問題的形式出現的。而新手教師中沒有以向量問題的形式或其他數學形式出現的題目。這實際上意味著，專家教師較新手教師有著更為靈活與廣泛的命題應用能力。

3.1.2 專家教師與新手教師問題解決教學中的自我監控能力的差異

從表1中可以看出，專家教師組與新手教師組在問題解決教學中的自我監控能力差異極顯著，其顯著性達到0.01水準。

對問卷回答的具體分析可知，對問卷專案“在教學證明幾何題時，我會先按題意儘量準確地畫出圖形，感覺一下結論的正確性。”“如果感到一種教學方法學生難以理解時，我會嘗試換一種方法來教學它。”“如果引導學生解決問題發生困難，我就引導學生考慮這個問題的特例或最簡單的情況。”“在引導學生解完數學題後，我一般會引導學生採用另一種方法來檢驗答案的準確性。”“在引導學生證明數學題時，我會引導學生先考慮一下自己的理由是否充分，再根據自己的感覺做出選擇的決定。”，回答為“A總是這樣 B經常這樣 C有時這樣”的專家教師的人數有24~29人（占總受試者的80%~96.7%），而同樣回答的新手教師有14~26人（占總受試者的46.7%~86.7%）。對問卷反向項目“訂正數學作業就是再解一遍題目。”的回答，2名專家教師（占總受試者的6.7%）的回答為“A總是這樣”，而同樣回答的新手教師有18人（占總受試者的

30%）。

這意味著，專家教師在問題解決教學時對自我計畫、自我調節、自我檢驗、自我管理、自我評價方面表現出更強的意識與能力。

3.1.3 專家教師與新手教師關於辨認推理的差異

辨認推理,是從質的方面檢測受試者是否形成相對完善的關於“證明直線是圓的切線”的命題域和命題系，主要檢測受試者形成的CPFS結構中的陳述性知識成分。對於辨認推理作業，由於題目比較簡單，因而給受試者的時間較短，藉以比較兩組受試者能否快速給出結論。從表1中可見，專家教師組與新手教師組在辨認推理作業中的成績不存在顯著差異。

從作業具體分析來看,專家教師組與新手教師組大多數受試者都能很好地辨認出各種關係與結論,訪談得知,專家教師組特別是其中的初中教師由於在平時教學中經常遇到此類題目，普遍認為此項作業很簡單，因而速度、準確率、全面率都很高（均分成績達15.60分）。新手教師由於平時的數學學習功底以及實習階段的訓練，在速度、準確率、全面率方面也有相當不錯的成績（均分成績達15.37分），與專家教師組成績十分接近，且不存在顯著性差異。

這說明，對於受試者形成的CPFS結構中關於“證明直線是圓的切線”的陳述性知識成分的質的方面，專家教師較新手教師並不存在明顯優勢，而且品質都較為良好。

3.1.4 專家教師與新手教師自由回憶的反向差異

自由回憶是從量的方面檢測受試者是否形成相對完善的關於“證明直線是圓的切線”的命題域和命題系，主要檢測受試者形成的CPFS結構中的陳述性知識成分。從表1中可以看出，專家教師組與新手教師組在自由回憶方面存在顯著差異，顯著性達到0.05水準。

然而，這種差異，卻是一種反向差異，即新手教師組自由回憶的平均分數明顯高於專家教師組，這很出乎我們的意料，而且在專家教師組內部存在較大差距，標準差為1.8。經過訪談得知，專家教師中的初中教師在其教學中已形成“連半徑，證垂直；作垂線，證半徑”的思維慣式，對他們來說，好像只有這兩種方法。而專家教師組中的高中教師及新手教師中的部分老師，他們想到的很多，“圓的切線的定義：經過半徑的外端並且垂直於這條半徑的直線是圓的切線”“證明圓心到這條直線的距離恰好等於圓的半徑，那麼這條直線是圓的切線”“求出給定直線與圓的方程，證明二者只有一個交點”“證明給定直線的斜率與某條半徑所在直線的斜率乘積為-1，且二者的交點在圓上”“作出圓的切線，用同一法證明它與給定直線斜率同、過同一點”等等。

這說明，對於受試者形成的CPFS結構中關於“證明直線是圓的切線”的陳述性知識成分的量的方面，專家教師較新手教師並不存在明顯優勢，甚至會由於長時間教學中形成的某種“思維慣式”等阻礙其量的積累。

3.2 命題應用與陳述性知識、自我監控能力的相關性

專家教師比新手教師有著顯著優越的命題應用的成績，那麼這種更好的命題應用的成績與受試者形成的CPFS結構中的陳述性知識成分、問題解決教學中自我監控能力是否相關？我們將專家教師組與新手教師組合為一組，做了表2。

表2　4項作業之間的相關係數

	辨認推理	自我監控	命題應用
自由回憶	0.254	-0.153	-0.205
P	0.05*	0.243	0.117
辨認推理		0.127	0.019
P		0.334	0.887
自我監控			0.425**
P			0.001

3.2.1 命題應用與自我監控能力的相關性

表2說明，命題應用與問題解決教學中的自我監控能力呈中度相關性，相關係數的顯著性達到0.01水準。這意味著教師在問題解決教學時的自我監控能力對其命題應用有一定的影響。

數學命題應用即為給出某條定理或條件，要求受試者自編該定理應用的題目，按照Anderson（1980）的知識分類理論，命題應用檢測的是受試者CPFS結構中的程式性知識成分。程式性知識是以“產生式（production）”這種動態形式來表徵的，所謂產生式，就是一條“如果……那麼……”規則，即一個產生式是對某一或某些特定的條件滿足時才發生某種行為所編的程式。把第一個產生式“如果……那麼……”中的“那麼”作為第二個產生式“如果……那麼……”中的“如果”，則形成一個重疊產生式，一系列重疊產生式組成一個產生式系統。解決數學問題，其心理表徵就是一個產生式系統。由條件推出一個子目標，再將這個子目標作為條件去推出第二個子目標，以此類推，最後達到問題的總目標。

如果說問題解決是幾個產生式“如果……那麼……”的疊加形成的產生式系統，那麼命題應用卻是已知“那麼”要求找到“如果”的若干情形的逆過程。可見，這個逆過程更需要對產生式系統中連接產生式的連線的方法論的體悟，即對“如果”與“那麼”之間的關係與若干產生式之間關係的深層理解，我們稱之為關係表徵。而且，不僅如此，這個逆過程還需要對產生式之間關係的緣由的深刻體悟，我們稱之為觀念表徵。可見，命題應用較之程式性問題解決是一個逆過程，涉及關係表徵與觀念表徵兩方面。而關係表徵與觀念表徵，則都是伴隨著數學活動過程的體驗性知識，是一種內隱的、動態的知識，隱性地附著於數學活動過程，而又發生發展於數學活動之中，這就需要學習主體不斷地對自身的數學認知過程本身進行計畫、監察、檢查、評價、回饋、控制和調節等才

能感知、體悟與內化，而這些恰恰是自我監控的內容。

簡言之，命題應用涉及關係表徵與觀念表徵，而關係表徵與觀念表徵恰恰需要自我監控的參與。因而，命題應用與自我監控有著一定的相關性，自我監控的水準會在一定程度上影響著命題應用的能力與水準。

3.2.2 命題應用與陳述性知識的相關性

自由回憶與辨認推理呈顯著相關性，相關係數的顯著性達到0.05水準，而命題應用與自由回憶、辨認推理的相關性並不顯著。事實上，自由回憶與辨認推理都是檢測受試者形成的CPFS結構中的陳述性知識成分，二者聯繫更為緊密。而命題應用主要檢測受試者形成的CPFS結構中的程式性知識成分，因而與前兩項作業的相關性弱一些。這也驗證了喻平（2003）的結論。

3.3 命題應用與認知策略的相關性

為了使專家教師組與新手教師組在命題應用時CPFS結構中的有關的陳述性知識大致處於同一水準，選擇受試者均不太熟悉的“抽屜原理”內容，考察利用“抽屜原理”進行命題應用問卷的成績。依據專家教師組與新手教師組在中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷的成績，將專家教師組與新手教師組分別分為專家高控組、專家低控組與新手高控組、新手低控組。

具體分組情況如下：對專家教師組進行分組。專家教師組中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷的測試平均分為135.8分，標準差為18.5分，以均分為基礎，上下浮動18.5分，取近似值，得到：154分（含154分）以上的受試者為專家高控組，117分（含117分）以下的受試者為專家低控組。高控組與低控組的人數分別為7人、5人。

同樣，對新手教師進行分組。新手教師組中學數學教師問題解決教學自我監控能力問卷的測試平均分為115.7分，標準差為29.5分，以均分為基礎，上下浮動29.5分，取近

似值，得到：145分(含145分)以上的受試者為新手高控組，86分(含86分)以下的受試者為新手低控組。高控組與低控組的人數分別為5人、4人。

我們認為,受試者在第一次做利用“抽屜原理”進行命題應用問卷時利用抽屜原理命題應用的相關認知策略是欠缺的,而在第二次做此問卷時擁有較為充分的相關認知策略，這是我們此部分研究的一個基本前提假設。

表3給出了四組受試者在討論講解相關策略前後利用“抽屜原理”進行命題應用問卷成績的平均分，並作了配對比較。

表3　四組受試者利用“抽屜原理”進行命題應用問卷成績比較

	前測	後測	P
專家高控教師組	5.42	12.42	0.000
專家低控教師組	3.00	3.6	0.07
新手高控教師組	4.00	9.8	0.000
新手低控教師組	2.75	3.00	0.391

表3表明，專家高控組與新手高控組在獲得利用抽屜原理解題或命題應用的策略前後成績均存在極顯著差異，顯著性達到0.01水準。而相對來說，具有較低監控能力的教師(包括新手教師與專家教師)獲得有關命題應用的認知策略之前後命題應用成績不存在顯著差異。

即是說具有高問題解決教學監控能力的教師獲得有關命題應用的策略之後,具有更好的關係表徵與觀念表徵,即不僅明白利用抽屜原理解題與命題應用時分組組數與每組元素具有怎樣的關係，而且體驗感悟到二者間的關係，從而其命題應用能力顯著提高。

這意味著,對於在問題解決教學中具有高監控能力的教師,認知策略對命題應用有直接影響，而對於低監控能力的教師，認知策略對命題應用沒有直接影響。

肆、研究結論與意涵

綜上，本研究得到以下結論：（1）專家教師與新手教師在命題應用上存在顯著差異；（2）命題應用與問題解決教學自我監控能力相關性顯著；（3）對於在問題解決教學中具有高監控能力的教師，認知策略對命題應用有直接影響，而對於低監控能力的教師，認知策略對命題應用沒有直接影響。

命題應用檢測的是受試者CPFS結構中的程式性知識成分，是已知“那麼”要求找到“如果”的若干情形的複雜過程，涉及關係表徵與觀念表徵。本研究發現專家——新手的差異性，找到影響命題應用的若干因素，以期對今後的命題應用的研究提供可能之借鑒。

伍、參考文獻

喻平、單墫（2003）。數學學習心理的 CPFS 結構理論。*數學教育學報，1*，12-16。

喻平(2004)。數學問題解決中個體的 CPFS 結構對遷移的影響. 數學教育學報，4，13-16。

章建躍（2003）。中學生數學學科自我監控能力——結構、發展及影響因素。上海：華東師範大學出版社。

董奇、周勇、陳紅兵（1996）。自我監控與智力。杭州：浙江人民出版社。

Anderson, J. R.(1980). Cognitive Psychology and it’s Implications. New York:Freeman.

Berliner, D. C.(1986). In research of the expert pedagogue. Educational researcher, 15(7), 5-13.

Berliner, D. C. (1987). Ways of thinking about students and classrooms by more and less experienced teachers. In J.Calderhead(Ed.) Exploring teachers’ thinking(pp.60-83). London:Cassell Educational Limited.

Berliner, D. C. (1988). The development of expertise in pedagogy. Paper presented at the annual meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education. New

Orleans.

Borko, H. (1985). Student teachers’ planning and evaluation of reading lessons. In J.A.Niles & R.Lalik (Eds) Issues in literacy: A research persective (Thirty-forth yearbook of the National Reading Conference, pp.263-71). New York, NY: the National Reading Conference, Inc.

Borko, H. (1986). Clinical teacher education: the induction years. In J.V.Hoffman & S.A.edwars(Eds), Reality and reform in Clinical teacher education(pp.45-63). New York, NY:Random House.

Borko, H., Bellamy, M. L., Sander, L.,& Sanford, J.(1989). Experienced teachers’ and student teachers’ planning and instruction. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Borko, H., Brown, C. A., Underhill, R. G., Eisenhart, M., Jones, D.,& Agard, P. C.(1990). Learning to teach mathematics (Year 2 Progress Report submitted to the National Science Foundation). Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Borko, H., Lalik, R,& Tomchin, E.(1987). Student teachers’ understanding of successful teaching. Teaching and Teacher Education,3,77-90.

Borko, H.,& Livingston, C.(1989). Cognition and Improvisation: Differences in mathematics instruction by expert and novice teachers. American Educational Research Journal,26,473-498.

Borko, H., Livingston, C., Mccaleb, J.,& Mauro, L.(1988). Student teachers’ planning and post-lesson reflections: Patterns and implications for teacher preparation. In J.Calderhead(Ed.), Teachers’ professional learning(pp.65-83). London: Falmer Press.

Borko, H.,& Shavelson, R. J.(1990). Teachers’ decision making. In B.Jones& L.Idols(Eds.), Dimensions of thinking and cognitive instruction(pp.311-346). Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum.

Carter, K., Cushing, K., Sabers, D. Stein, P.,& Berliner, D.(1988). Expert-novice differences in perceiving and processing visual classroom stimuli. Journal of Teacher Education, 39(3),25-31.

Carter, K., Sabers, D., Cushing, K., Pinnegar, s.,& Berliner, D.(1987). Processing and using information about students: A study of export, novice, and postulant teachers. Teaching and Teacher Education,3,147-157.

Leinhardt G.(1986). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Leinhardt G.,& Greeno, J, G.(1986). The cognitive skill of teaching. Journal of Educational Psychology,78,75-95.

Leinhardt G.,& Smith, d.(1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. Journal of Educational Psychology,77,247-271.

Lawson M J, Chinnappan & M.Knowledge(2000). Connectedness in Geometry Problem Solving. Journal for Research in Mathematics Education, 31,26-43.

Robinson, N., Even, R.& Tirosh, D(1992). Connectedness in teaching algebra: A novice-expert contrast. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), Proceedings of the 16th PME International Conference, 2, 258-263.

Robinson, N., Even, R. & Tirosh, D(1994). How teachers deal with their students' conceptions of algebraic expressions as incomplete. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th PME International Conference, 4, 129-136.

六年級學童在解未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時之解題類型研究

陳維民 [1]、王國華 [2]

[1] 台中縣清水國小教師、[2] 國立彰化師範大學教授

摘要

本研究旨在探討國小六年級學童在解未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時之解題類型，以做為課程設計與教學的參考。研究對象為台中縣某一所大型規模的國小六年級共 352 位學童，研究工具以文字應用題測驗為主，內含「未知數出現在方程式最左側的乘除混合問題」、「未知數出現在方程式最左側的加乘混合問題」和「未知數出現在中間的減除混合問題」等三種類型題目。研究所收集的資料，包括量化的資料及質性資料，量化資料以描述性統計處理，質性資料則予於編碼、分類、比較解題痕跡，並從解題痕跡中歸納學童的解題類型。根據分析結果，發現六年級學童在未知數這三種類型的題目的解題表現，以未知數出現在左邊中間的減除混合問題，學生的通過率最低（約 49%），其他兩類問題則都有達到 70%左右。另外，本研究也發現，學童成功解較難的「未知數出現在中間的減除混合問題」時，有 4 種算術解題類型和 2 種代數解題類型。最後，在本研究中也提出未知數課程與教學上的建議。

關鍵字詞：未知數概念、代數思考、解題類型、算式填充題

通訊作者：陳維民 cwm@cses.tcc.edu.tw

壹、緒論

Usiskin (2004) 指出代數是數學學門中一個重要的領域，在功能上代數能展現宇宙中的次序，在兒童的學習成就上，代數則是邁入高等數學的一個門檻（gatekeeper），我國教育部（2000）為了順應世界的潮流，培養國小學童觀察數量關係以及展現數量關係數學結構之能力，在所提出的《九年一貫課程暫行綱要草案》中，將代數主題向下延伸至小學。

ICME-5 於 1984 年在澳洲的阿德萊德（adelaide）舉行，會議中的探討主題原本是小學代數（algebra in elementary school），但受到研究典範及觀點的影響，Nicolas Herscovics 提議將主題改成代數思考（algebraic thinking），此次會議的影響力不斷的發酵，致使後續研究強調學童的代數思考，甚至是早期代數思考（early algebraic thinking），許多學者相繼指出代數課程可以提前到小學二、三年級（Davis, 1985），Mason（1996）則認為一般化（generalization）的課程可以進入小學，Carraher, Schliemann, Brizuela and Earnest（2006）將「＋3」這個運算看成是一種函數功能，相關的課程總稱之為早期代數（early algebra）。然而，Filloy 與 Rojano (1984) 則指出算術與代數之間存在著斷層 (didactic cut)，Filloy 等認為學童在面對未知數僅出現一次的問題情境中，可以透過逆運算 (inverse operations) 進行解題，但面臨未知數出現在方程式的兩側時，如 ax＋b＝cx＋d (其中 a、b、c 和 d 為已知數) ，學童在解題上出現困難。另外，呂玉琴（1992）針對國小四、五和六年級的兒童進行未知數試題的測驗，研究顯示除了試題類型會影響兒童的成就之外，未知數的位置、運算符號的位置等因素也都會影響兒童的成就。

由上，雖然將代數主題向下延伸至小學可以提供國小學童早日接觸代數課程的機會，但學童在面對未知數僅出現一次的問題情境時，所展現的解題類型仍有待進一步探討。

據上所述，本研究的主要目的為：

一、探討六年級學童在面對未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置的問題

時，學童的整體表現。

二、探討六年級學童在面對成功答對率最低的問題時，學童的解題類型。

貳、文獻探討

一、未知數的本質

「定性」是指確定實體的種類本質，「定量」則是確定程度上的本質。一個實體在程度上的考量，又可以區分為定量與變量，所謂的定量是指在一個區間的時空範疇內，並在可容忍的誤差範圍內，不會變動的程度本質，若在此一區間時空範疇內，曾經超出可容忍的誤差範圍則稱之為變量。性質的例子如蘋果、香蕉，是指實體的種類本質，並不牽扯到定量的問題；定量的例子如一盒巧克力的顆數，此一實體在固定的時空範疇內，其程度的本質不會變動；變量的例子如水庫的蓄水量，其程度的本質會依時間而有所變動。（甯平獻，私人通訊，2010，1月8日）。

所謂量的「數值化」，是取一個單位量或等分割的子量，利用重複累積的方法來複製或逼近被界定量，以確定被界定量的數值。數值化的結果對應一個指標，此一指標就是數；一個定量，若單位量選取不同，數值化的結果指標就會不同，例如12枝鉛筆跟半打鉛筆所指的鉛筆的單位合成的量是相同，但數值不同。一個定量，在未經數值化前，量是不會變的，但數值卻未知，稱之此定量的數值為未知數。（甯平獻，私人通訊，2010，1月8日）。

二、未知數的問題類型

一般而言，線性組合（linear combination）是一個線性代數中的概念，代表一些抽象的向量各自乘上一個純量後再相加。令 S 為一向量空間 V（附於體 F）的子集合，如果存在有限多個向量（v1,v2,...,vk）屬於 S，和對應的純量（a1,a2,...,ak）屬於 F，使得 v = a1v1+a2v2+...+akvk，則稱 v 是 S 的線性組合。而所謂的未知數

線性組合 (linear combination of unknowns) 用在本研究是指以未知數 x，已知數 a、b，所形成的 a・x＋b・1 的形式，簡記成 ax＋b，可以用來表示「一個未定數值的定量被重複或等分割成 a 倍，並與另一確定數值為 b 的定量，兩者合成後的量」的數值，以 LC (x) 表示。由上，未知數的問題類型可以看成是未知數線性組合間與等號的組合問題，而未知數僅出現一次的問題中量與量之間的操作模式如圖 1 所示。。此類問題的特點是以一個未知數作為出發點產生一個未知數線性組合（LC (x)），接著再以此一未知數線性組合為出發點產生另一個未知數線性組合，最後，未知數線性組合的數值等於一個定數 (constant) 。

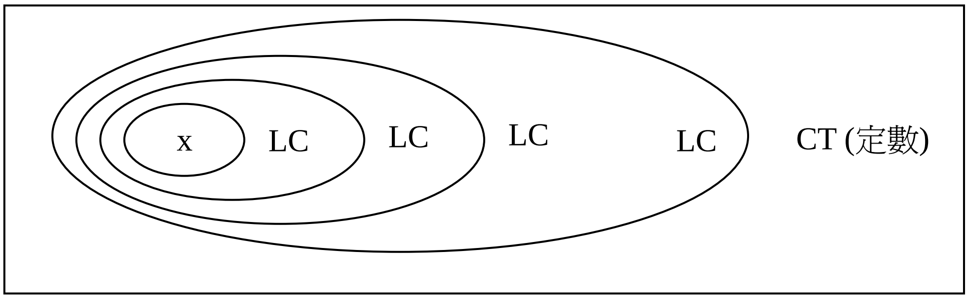


圖 1 未知數僅出現一次的操作模式

三、未知數的解題類型

有關學童未知數的解題策略，Kieran (1992) 將學童解未知數的解題策略歸納成以下七項： (1) 使用數字事實 (2) 數數技巧 (3) 覆蓋 (4) 復原 (5) 嘗試錯誤 (6) 移項法則 (7) 等量公理。Herscovics 和 Linchevski (1994) 進一步深入研究學童面對不同問題類型時的解題策略，Herscovics 等人針對七年級的學童，進行 50 題的一元一次方程式測驗，測驗的問題包括六個類型：方程式中包含加和減、方程式中包含乘和除、方程式中包含合併常數項、方程式中包含加和乘運算、未知數出現在方程式同側中兩次、未知數出現在方程式的兩側，其中學童解決未知數僅出現在方程式同側中一次的問題的主要解題策略有三個，分別是逆運算 (Inverse operation) 、減法及除法互補 (Complementary subtrahend or factor) 、合

併常數項 (Grouping of numerical terms) 後逆運算。在國內，雖然呂玉琴（1992）曾則針對六大類型的問題，探討影響國小四、五和六年級學童學習成就的試題因素，研究結果顯示除了試題類型會影響學童的成就之外，未知數的位置、運算符號的位置、解是否為整數和數的大小等因素也都會影響學童的成就，然而，進一步探討學童面對未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置的問題時，學童的可能解題類型，是項的研究則是少見。

參、研究設計與方法

一、研究樣本與實施

本研究樣本取自台中縣海線一所大型學校，六年級有十一個班級，參與測驗的學童人數為 352 人。在 94 年 5 月底配合學校自行舉辦的數學能力檢測，在試卷中加入本研究的試題，檢測採團體測驗，同一時間在自己的班級教室內作答，由班導師監考。

二、研究工具

本研究的研究工具參考 Herscovics 和 Linchevski (1994) 的研究中，有關未知數僅出現在方程式中一次的問題，以及考量呂玉琴（1992）所提的未知數的位置此一變因做為問題架構，包括三個類型，分別為「未知數出現在方程式最左側的乘除混合問題」，例如 $x\div7\times3=12$，「未知數出現在方程式最左側的加乘混合問題」，例如$(x+7)\times7=203$ 和「未知數出現在方程式中間的減除混合問題」，例如 $25-(x\div3)=17$，依照此架構設計相對應的文字題。

然而針對相同的文字題，依照組織算式填充題的方式不同，所列出來的算式填充題可能相異（甯自強，1993a），所以組織方式要明確，算式填充題才會一致。在本研究中，問題類型的命名是依照未知數出現在算式填充題的位置來命名，而算式填充題的組織方式則是依照量的操作活動的時間順序來表徵。研究施測的試

題在研發過程中，調整過不同的問題情境，並且避免隱含的關係式，研發後的試題經由數學教育專家、數學專家與現職六年級教師的檢視，最後修改如下：

1.未知數出現在方程式最左側的乘除混合問題

拿一些珠子放到紅布下，將紅布下的珠子平均分給 7 個人，其中的 3 個人再將其珠子全放到藍布下，則現在藍布下有 12 顆珠子。問原先放了幾顆珠子到紅布下？

2.未知數出現在方程式最左側的加乘混合問題

把每罐珠子打開後再塞入 7 顆珠子，小君拿 7 罐放到紅布下，則紅布下將有 203 顆珠子。問每罐珠子原有幾顆？

3.未知數出現在方程式中間的減除混合問題

先拿 25 顆珠子到紅布下。接著小君放了一些珠子到藍布下，並將藍布下的珠子平均分給三個人，則紅布下的珠子比其中的每一個人都多 17 顆珠子。問小君放了幾顆珠子到藍布下？

三、資料分析

本研究包括量化資料與質性資料。在量化分析上，針對每位學童在試題上的成功或失敗的表現，答案相同者為成功，答案不符者為失敗，不進一步考量計算的過程，接著針對每一題求出答對人數與總人數的比值做為成功通過率，以說明學童在解未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時，學童的整體表現。

從量化資料的成功通過率中，選取通過率最低的一題進行質性資料分析，以 352 位學生筆試的解題痕跡為分析的原始資料，透過編碼及歸類逐漸形成分類標準，形成後的分類標準有四項：答案是否正確、算術或代數解題、是否先列算式填充題、算式填充題的形式。再透過類型間的比較與解題痕跡的例證化逐漸歸納形成主題，最後根據所有結果以獲一致的結論。

肆、研究結果

本節首先說明未知數出現在不同位置的通過率比較情形，其次選擇通過率偏低的問題，也就是「未知數出現在方程式中間的減除混合問題」，深入探討其解題類型。

一、未知數出現在不同位置的通過率比較

有關學童在未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時的通過率，如表 1 所示。

表 1 統計結果顯示學童在「未知數出現在方程式最左側的乘除混合問題」的通過率為 70%，在「未知數出現在方程式最左側的加乘混合問題」的通過率為 68%，在「未知數出現在方程式中間的減除混合問題」的通過率為 49%。從統計結果可以看出，國小六年級學童面對未知數出現在方程式最左側的問題時的解題表現，明顯優於未知數出現在方程式中間的問題，此研究結果與呂玉琴（1992）所提的未知數的位置會影響兒童的成就一致；另外從統計結果亦可看出學童在面對除乘混合問題和加乘混合問題的表現大致相同，顯示運算符號的組合並不影響解題表現。

表 1　未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時的通過率

	問題類型	算式填充題	通過率
一	未知數出現在方程式最左側的乘除混合問題	x÷7×3＝12	70%
二	未知數出現在方程式最左側的加乘混合問題	（x＋7）×7＝203	68%
三	未知數出現在方程式中間的減除混合問題	25－（x÷3）＝17	49%

比較題 1，「x÷7×3＝12」和題 3，「25－（x÷3）＝17」兩題算式填充題，至

少包含兩個不同。其一，是列成算式填充題時的不同，題 1 在未知數出現後以滾雪球的方式，透過活動的操作得到另一個數，題 3 在未知數，也就是 x 出現後，必須再考量未知數的線性組合，也就是 x÷3，之後學童在面對兩個未知數的情況下，必須從中選擇一個未知數進行列式。其二，是在解題歷程所遭受到的阻礙，逆運算是國小學童解未知數時所常用的解題策略（Kieran,1992; Herscovics & Linchevski,1994），題 1 學童可以透過逆運算解題，題 3 被逆運算的是未知數 x÷3，所以無法進行，此時學童必須改以部分全體運思，將 25－（x÷3）＝17 同化成 x÷3＝25－17，才能繼續後續的解題，所以學童在面對未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置的問題時，具有不同的成功通過率。

二、未知數出現在方程式中間的減除混合問題之解題類型

學童面對算式填充題記作 25－（x÷3）＝17 的問題時，成功解題人數為 172 人，整體通過率為 49%，其中以算術方法解題人數為 127 人，占成功解題人數的 73.8%，以代數方法解題人數為 45 人，占成功解題人數的 26.2%，其中算術方法解題的解題類型包括四類、代數方法解題包括兩類，茲詳細說明如下：

（一）算術方法解題

所謂的「算術方法解題」是指透過列式施展一些活動而朝向解答的獲得，在解題過程中並不彰顯量之間的關係，而是實施關係，學童具體的解題行為是透過已知數的運算，逐步確定未知數，最後求出問題情境中被期望求出的未知數，在本研究中算術方法解題有四種解題類型，如下：

<u>A1 直接透過已知數的運算求解</u>

A1 之解題痕跡如圖 1 所示，有 82 個學童（百分比 23.3%）採用此種解題類型。此類型的特色為學童直接採用二階段的計算實施關係，首先以 25-17=8 確定

一個人的顆數，再透過 8×3=24 此一關係的實施確定一罐的顆數。在解題過程中，學童並未使用 x，可能的原因有二，其一，學童並未學習以 x 進行解題，其二，在考量問題情境仍在可以直接實施的情況下，對 x 的使用並無需求。

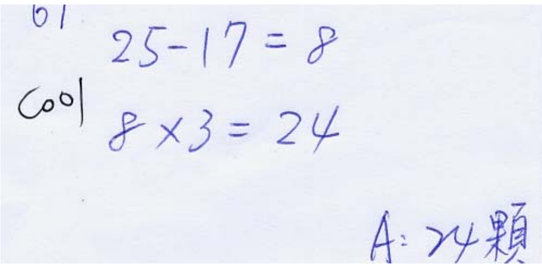


圖 1　A1 之解題痕跡

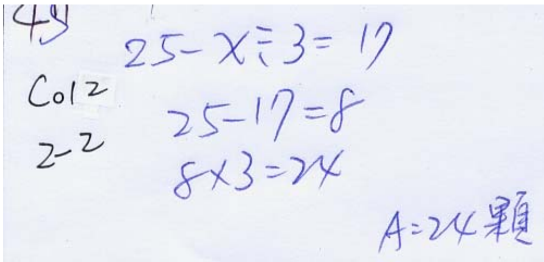


圖 2　A2 之解題痕跡

A2 先列算式填充題為 25-x÷3=17 後透過已知數的運算求解

A2 之解題痕跡如圖 2 所示，有 21 個學童（百分比 6.0%）採用此種解題類型。學童先以 25-x÷3=17 列式表徵問題情境，隨即透過 25-17=8 此一關係的實施確定一個人的顆數，再透過 8×3=24 此一關係的實施確定一罐的顆數。值得一提的是雖然學童一剛開始以 x 列式，但隨即以算術的計算實施了關係，直達答案。

A3 先列算式填充題為x÷3+17=25 後透過已知數的運算求解

A3 之解題痕跡如圖 3 所示，有 18 個學童（百分比 5.1%）採用此種解題類型。學童先以 x÷3+17=25 列式表徵問題情境，隨即透過 25-17=8 此一關係的實施確定一個人的顆數，再透過 8×3=24 此一關係的實施確定一罐的顆數。值得一提的是雖然學童一剛開始以 x 列式，但隨即以算術的計算實施了關係，直達答案。

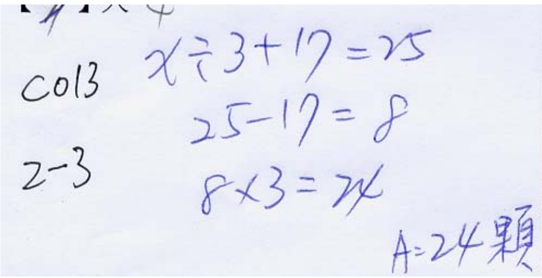


圖 3　A3 之解題痕跡

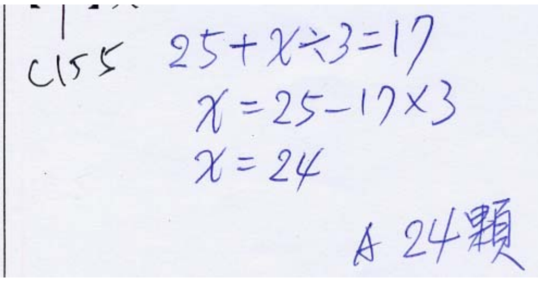


圖 4　A4 之解題痕跡

A4 算式填充題錯誤，但透過已知數的運算過程調整成功

A4 之解題痕跡如圖 4 所示，有 6 個學童（百分比 1.7%）採用此種解題類型。學童先以 25+x÷3=17 列式表徵問題情境，但隨即調整關係成為 x=25-17×3，從第三式 x=24 可以看出第二式中學童的意圖是 x=(25-17)×3，從中亦可看出學童並不熟悉算式填充題的使用。

由上，以算術進行解題的學童有 127 人（百分比 36.1%），A1~A4 的相同點在於能透過逆運算或部份全體運思逐步逆溯活動，以兩步驟的計算實施關係，最後獲得答案。A1 和 A2~A4 的不同點在於 A1 直接透過已知數的計算求出答案，但 A2~A4 則先以算式填充題記錄問題情境後，再進行解題。A4 和 A2~A3 的不同點在於，A2~A3 的算式填充題為等價關係，符合數學期望的標準，而 A4 中的算式填充題則為學童學習過程中不成熟的產品。A2 和 A3 的不同點在於學童組織算式填充題的焦點之不同，A2 的算式填充題是依照量的操作活動的時間順序進行表徵，而 A3 的算式填充題則是透過部份全體運思後的產物，另外 A3 以 x÷3+17=25 列式後，可以透過逆運算進行逆溯，但 A2 以 25-x÷3=17 列式後，因為被逆運算的物件是未知數，所以無法藉由逆運算進行逆溯，最終還是得藉由部份全體運思。

（二）代數方法解題

所謂的「代數方法解題」是指發現與表示量的關係，並藉由等量公理的運作，把一個等價關係變到另一個等價的關係，所以代數方法解題的判準有二，其一是發現與表示量的關係，其二是藉由等量公理的運作，逐步轉換及簡化關係，最後簡化成最簡關係，在本研究中代數方法解題有兩種解題類型，如下：

B1 先列算式填充題為 25-x÷3=17 後透過關係轉換求解

B1 之解題痕跡如圖 5 所示，有 37 個學童（百分比 10.5%）採用此種解題類

型。學童先以 $25-x\div3=17$ 列式表徵問題情境，從第二式 $x\div3=25-17=8$ 中可以看出，學童透過部分全體運思把 A-B=C 的關係轉換成 B=A-C，因而 $25-x\div3=17$ 的關係轉換成 $x\div3=25-7$，透過進一步的關係轉換成為最簡關係 $x=24$。值得一提的是學童不僅能將 x 視為一個待求的未知數，更能將 $x\div3$ 也視為一個待求的未知數；另外，從關係 $25-x\div3=17$ 到關係 $x\div3=8$ 再到關係 $x=24$ 是一連串的關係轉換，是透過關係的轉換逐步簡化關係而求出答案。

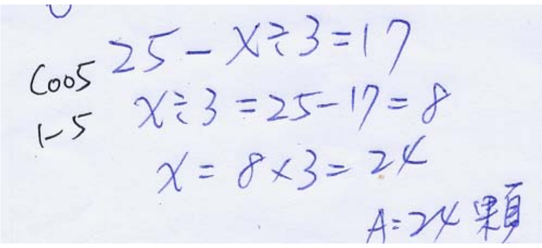


圖 5　B1 之解題痕跡

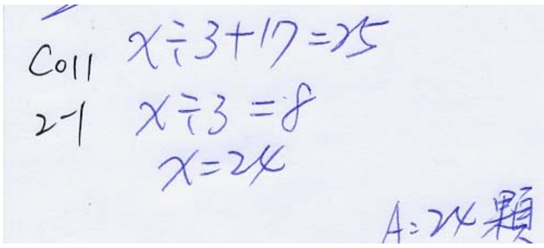


圖 6　B2 之解題痕跡

B2 先列算式填充題為 $x\div3+17=25$ 後透過關係轉換求解

B2 之解題痕跡如圖 6 所示，有 8 個學童（百分比 2.3%）採用此種解題類型。在 B1 中學童以 $25-x\div3=17$ 列式表徵問題情境，是以量的操作活動的時間順序描述問題情境，然而學童的注意力或是組織題意關係的方式未必是依照時間順序的，學童可以在解讀題意後直接轉換題意，以 $x\div3+17=25$ 作為問題情境的表徵。從第二式 $x\div3=8$ 中可以看出，學童透過部分全體運思把 A+B=C 的關係轉換成 A=C-B，因而 $x\div3+17=25$ 的關係轉換成 $x\div3=8$，透過進一步的關係轉換成為最簡關係 $x=24$。值得一提的是學童不僅能將 x 視為一個待求的未知數，更能將 $x\div3$ 也視為一個待求的未知數；另外，從關係 $x\div3+17=25$ 到關係 $x\div3=8$ 再到關係 $x=24$ 是一連串的關係轉換，是透過關係的轉換逐步簡化關係而求出答案。

由上，以代數進行解題的學童有 45 人（百分比 12.8%），B1 和 B2 的相同點在於兩者都先藉由算式填充題來表徵關係，並透過關係的轉化來簡化關係，最後求出最簡等價式，也就是，$x=24$。B1 和 B2 的不同點在於學童組織算式填充題的焦點之不同，B1 的算式填充題是依照量的操作活動的時間順序進行表徵，而

B2 的算式填充題則是透過部份全體運思後的產物。

伍、結論與建議

本研究旨在探討國小六年級學童在解未知數僅出現一次且在方程式同側不同位置時之解題類型，以做為課程設計與教學的參考。根據研究結果，提出下列結論與建議。

一、結論

（一）未知數出現在方程式中的不同位置時，除了列成算式填充題時的模式不同，在解題歷程所遭受到的阻礙也不同，所以未知數出現在方程式中的不同位置會影響問題的難度；但乘除的運算組合與加乘的運算組合兩個問題類型之間並無顯著差異。

（二）算術的解題類型包含四種

A1 直接透過已知數的運算求解

A2 先列算式填充題為 25-x÷3=17 後透過已知數的運算求解

A3 先列算式填充題為 x÷3+17=25 後透過已知數的運算求解

A4 算式填充題錯誤，但透過已知數的運算過程調整成功

（三）代數的解題類型包含兩種

B1 先列算式填充題為 25-x÷3=17 後透過關係轉換求解

B2 先列算式填充題為 x÷3+17=25 後透過關係轉換求解

二、建議

（一）在課程安排上

從結論中可以看出未知數出現在方程式中的不同位置時，會影響問題的難度，所以在課程安排上，未知數出現在方程式中間的問題若能安排在後續的課程中才出現，較能符合學生的學習現況。而在教學上，當學童無法對一個未知數進

行逆運算時，則必須適時的檢察學童的部份全體概念。

（二）在教學上

在課室討論情境的教學中，學童透過師生的交流活動促使學童掌握活動類型的要素及組織，而教學內容的重點範圍在於學習者的可能建構區（甯自強，1993b），本研究搜集的 4 種算術解題類型和 2 種代數解題類型則是國小六年級學童面對未知數僅出現在方程式同側一次的問題時的解題表現，這些解題類型符合學習者的可能建構區，而在課室討論情境的教學中，老師的職責在於給予任務促使學童掌握活動類型的要素及組織。

針對算式填充題的意義來說，老師可以促使學童比對 A2 和 A3 算式填充題的不同以及與比較兩者的相異，透過歸納兩者的相同與不同，提升學童對算式填充題意義的了解；另外針對 A4 的列式，盡可能讓學童解釋該式子的意義，再藉由反例或例子的比對逐漸形成算式填充題的共識。

針對等號的意義來說，老師可以促使學童比對 B1 或 B2 中，第一式和第二式的不同以及與比較兩者的相異，透過歸納第一、二式的相同與不同，提升學童對等價式意義的了解。

綜合上述，本研究所蒐集的學童解題類型提供課程及教學上的建議。在課程安排上，未知數出現在方程式中間的問題若能安排在後續的課程中才出現，較能符合學生的學習現況，當學童無法對一個未知數進行逆運算時，則必須適時的檢察學童的部份全體概念。在教學上，本研究所蒐集的學童解題類型符合學習者的可能建構區，在課室討論情境的教學中，透過比對算式的相同與比較算式的不同，促使學童掌握算式填充題或等號的要素及組織，以提升學童對算式填充題或等號意義的了解。

陸、致謝

感謝甯平獻教授的指導，使研究得以順利完成。承蒙審查委員提出寶貴見解與指正，對本文裨益良多，謹致謝忱。

柒、參考文獻

呂玉琴（1992）。*國小高年級與國中學生對開放語句之解題策略*。我國學生數學概念發展研究計畫總結報告之八。NSC 77-0111-S152-01A。

甯自強（1993a）。數的運算概念啟蒙~『算式填充題』的引入~。*教師之友*，34(1)，35－39。

甯自強（1993b）：「建構式教學法」的教學觀 ~由根本建構主義的觀點來看~。*國教學報*，**7**，1~16 頁。

教育部（2000）。*國民教育九年一貫課程暫行綱要*：數學學習領域。台北：教育部。

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Davis, R.B.(1985).ICME-5 report: algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 195-208.

Filloy, E., & Rojano, T. (1984). From an arithmetical thought to an algebraic thought. In J. Moser (Ed.), *Proceedings of PME-NA VI*, Madison, Wisconsin, 51-56.

Herscovics, N., & Linchevski, L.(1994).A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Kieran, C.(1992).The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.390-419). New York: Macmillan Pub.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Usiskin, Z. (2004). *A significant amount of algebra.* Retrieved June 15, 2009, from Mathematisch Instituut Universiteit Leiden Web site: http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel05/jun2004/pdf/usiskin.pdf

台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較

尤欣涵 [1]、楊德清 [2]

國立嘉義大學數學教育研究所 [1]、國立嘉義大學數學教育研究所 [2]

gwen0_0@yahoo.com.tw[1]、dcyang@mail.ncyu.edu.tw[2]

摘要

本研究欲探究我國教研院教材與美國 MiC 教材在機率課程設計上之情境設計與佈題方式、解題策略的發展方式以及連貫性與延伸性有何差異。研究發現：

一、在「情境設計與佈題方式」上，美國 MiC 教材以同一故事情境連貫單元，佈題多為開放性問題且由淺至深；台灣教研院教材同一單元內情境獨立，佈題多為封閉性問題且為一組組例題與練習題之形式。

二、在「解題策略的發展方式」上，美國 MiC 教材鼓勵學生多元解題，並指示教師可適時從中給予提示，其解題策略的發展方式為：佈下情境→學生由情境獲得概念→再佈題→學生自行發展解題策略；台灣教研院教材多為教師示範例題，學生模擬其解題策略解隨堂練習，其解題策略的發展方式為：佈下問題→教科書示範解題說明→再佈題→學生解題。

三、在「連貫性與延伸性」上，美國 MiC 教材由先前的單元導入機率教學，並於單元後延伸先前的問題提供學生進一步思考；台灣教研院教材僅在九年級下學期最後一個單元呈現機率教學，單元最後並無延伸性題型。

關鍵字：課程比較、機率教材。

通訊作者：楊德清　dcyang@mail.ncyu.edu.tw

壹、研究動機與問題

教科書在教學中扮演著決定性的重要角色（Floden, 2002），舉凡教師進行教學，亦或學生進行學習，教科書都與其緊密相關（Tarr、Chavez、Reys & Reys, 2006）。而 Schmidt 等人（2001）的研究發現，課程與學習成就之間具正向關係。換句話說，教科書、課程與學生學習成效緊密關聯，不同的教科書將影響選用此教材的課室之課程內容，而課程內容的異同又可關連到學生不同的學習成就表現。因此，Törnroos（2004）便進一步主張，進行教材分析對於提升學生學習數學有很大的助益。而在眾多教科書單元中，機率是與生活緊密關聯的學習內容之一，且機率的研究也提供教師們有機會向學生提出一些啟發性的思考及理解性的問題（王建都譯，1991）。另一方面，國內許多關注在此的研究（蔡欣潔、葉啟村，2006；陳欣民、劉祥通，2002a；陳欣民、劉祥通，2002b），也都試著找出學童對於機率方面先備知識的不足，藉此進行補救或是進行概念間的連結，以期讓學童發展出一套正確且穩固的機率背景。因此，學生學習機率的表現對其先備知識不僅有相當程度的影響，而其學習機率的表現又可關聯至教師教學中所使用的教科書內容，這三者間呈現出密不可分的關係。

此外，我國數學教育改革，從 64 年國編版課程、82 年版課程至九年一貫課程，一直備受美國影響，顯然美國與我國在數學課程演化上具有高度相關性（吳德邦，1985）。且 PISA 在 2003 的國際數學評量中，亦強調學生於真實情境中解決數學問題的能力（Organisation for Economic Co-operation and Development, [OECD], 2004），而美國「情境數學」（Mathematics in Context, [MiC]）教科書的設計理念，正順應了國際數學教育對於真實情境的重視。另一方面，台灣教研院教材由國家教育研究院籌備處以「九年一貫數學領域課程綱要」的基本理念和所規定的教學內容為依據編寫而成，其編輯理念亦強調利用日常生活情境教導學生數學基本概念（國家教育研究院籌備處，2010）。因此，兩版本教科書在其編輯背景部份，是有相當程度的雷同。然而，教材的規劃、組織、編排、概念、及是

否與真實生活經驗相連結，皆是影響學生學習的關鍵。因此，本研究欲針對我國教研院教材與美國 MiC 教材探討：

一、兩教材在機率課程設計上之情境設計與佈題方式為何？

二、兩教材在機率課程設計上之解題策略的發展方式為何？

三、兩教材在機率課程設計上之連貫性與延伸性為何？

貳、文獻探討

一、台灣與美國機率課程之安排

台灣之課程綱要近期歷經 89 年、92 年至 97 年(預計 100 年實施)版本，內容中關於機率課程之綱要亦有很大部份的變動，而美國部分則依美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]）於 2000 年所出版之學校數學原則與標準（Principles and Standards for School Mathematics）一書，內容上針對學生機率概念的學習亦區分為若干階段並針對各階段的機率學習目標加以闡述。因此，以下表 1 統一呈現兩國之機率課程綱要：

表 1

台灣與美國之國中小學機率課程綱要比較表

課綱版本	學習階段	綱要內容
台灣 89 年版	6-7 年級	能運用生活經驗來瞭解機會。（D-3-3）
	8-9 年級	能進行簡單的實驗，以瞭解機率、抽樣的初步概念。（D-4-3） 能嘗試使用電腦軟體進行實驗，以瞭解機率、抽樣的意義。（D-4-4）

續後頁

接前頁

台灣 92 年版	九年級	9-d-09 能以具體情境介紹機率的概念。(D-4-04) 9-d-10 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念。(D-4-04)
台灣 97 年版	九年級	9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。(D-4-04)
美國 2000 年版	3～5	以事件發生的可能性來進行描述，並使用「必然」、「有可能」及「不可能」來討論可能性的程度。 預測簡單實驗結果的可能性，並且檢驗預測。 瞭解事件的可能性可被用 0-1 的數值來測量表示。
	6～8	瞭解並使用適當的字彙來描述互補與互斥的事件。 使用比例及基本的機率認知來猜測並驗證實驗和模擬的結果。 使用有組織的清單、樹狀圖及面積圖等方法來計算簡單混合事件的機率。
	9～12	瞭解樣本空間和機率分布的概念，並能在樣本事件中建構樣本空間及分布。 利用模擬的方式來建購經驗式的機率分布。 計算並詮釋一樣本事件中隨機變數的期望值 瞭解條件機率和獨立事件的概念。 瞭解如何計算一混合事件的機率。

從表 1 中可看出，兩國對於機率的課程綱要無論在起始階段（年級）或是具體內容上各有差異，尤其對於台灣而言，隨著每次課程綱要的修訂，關於機率的綱要條數可說是逐次遞減，尤其在 97 課綱中，條數更是縮減成只剩一條「能在

具體情境中認識機率的概念。」而對比美國，自小學三年級開始就規劃相關的機率學習內容，無論就教學目標介入時間或是介入深淺上，都似乎比台灣教材來的早且深，然而，在相關的教材內容上是否也有相似的情況呢？就值得研究進行更深入的分析與探討，以檢視兩國機率教材的實際差異程度為何。

二、國內外與機率相關之研究

機率一詞，似乎可追朔自人類文明之始就有了，而在西方，與機率同義的字 stochastic （隨機的），就是源自古希臘文，指一個人能預測未來。而隨著機率的發展與演用，其也成為許多學科的理論基礎，而應用範圍更是擴及科學、工程、醫學及工業等（黃文璋，1999）。亦因其重要性，相關研究如 Piaget 與 Inhelder（1975）便針對學童的機率發展提出以年齡（七歲及十一歲）來分為三階段，並提出各階段學童的表現內容。而 Jones、Langrall、Thornton 與 Mogill（1997）則是提出以思考層次來區分為四階段，並加述各階段的思考表現內容。且許多研究（蔡欣潔、葉啟村，2006；陳欣民、劉祥通，2002a；陳欣民、劉祥通，2002b）也紛紛投入探討學生在機率上的成就表現，以及可能的迷思概念為何，並針對機率教學提出若干建議。其中，劉秋木（1996）便提出國小四年級後可逐步進行機率教學。蔡文煥（1998）也指出 Green（1986, 1987）研究所提出的建議如：比值概念對於機率的概念理解上是相當重要的、學生對於機率的語言使用及觀念了解上是模糊的、唯有透過學校廣泛且有系統的進行教學才能減少學生迷思概念與錯誤的思考等。陳欣民、劉祥通（2002b）亦曾指出，課程設計若能以學童的機率迷思概念作出發，藉此引導學童修正自身的迷思，而教師又能於教學中適時察覺並破除學童的機率迷思，如此將能使學童之機率概念發展得事半功倍之效。因此，由上述文獻可看出機率的課程安排影響著學生對於機率概念的學習，而本研究之兩套教材在此方面的差異性又為何，便有待研究進行更深入的分析探討。

參、研究方法

一、研究法與分析內容

依據相關教材比較文獻（林美如，2007；徐偉民、徐于婷，2009；陳仁輝、楊德清，2010；陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛，2005；Zhu & Fan, 2006）可發現，進行教材之分析比較時，研究多採內容分析法（王文科、王智弘，2007），並以教材內容之佈題作為分析單位，而在探討的範圍上，多以教學目標、佈題之特性（如情境問題與非情境問題）、知識類型（如程序性知識問題與概念性知識問題）、解題策略發展模式等為主。另一方面，游自達等人（2007）所進行的跨國性教科書的比較研究，亦將教材的內容分析概分為教科書在課程設計上的理念取向、教科書符合能力指標的程度、教科書內容的縱向連貫性與橫向配合等。因此，本研究目的欲針對台灣教研院教材與美國 MiC 教材在機率部份的教材設計作一比較，故採內容分析法，並以「題」作為本研究之分析單位，同時，將機率教材內容部份概分為「情境設計與佈題方式」、「解題策略的發展方式」以及「連貫性與延伸性」等三部份，以呈現兩國教材之差異性比較。

二、研究對象

本研究以立意取樣的方式，選取台灣教研院教材與美國 MiC 教材為研究對象，進行教材內容的分析比較。以下，針對台灣教研院教材與美國 MiC 教材的課程發展背景及內容作一說明。

（一）美國 MiC 教材（Mathematics in Context）

美國 MiC 教材是由美國國家科學發展協會（National Science Foundation）為改進美國學校數學課程所發展之教科書。教材由荷蘭烏特勒支大學之 Freudenthal Institute 研究機構與美國威斯康辛大學之麥迪遜校區教育學院之教育研究中心以及一群美國大學、中等學校教師共同合作，秉持著以學生為本和真實數學（Realistic Mathematics）融入數學課程之理念所研發的教材。本研究之美國 MiC

教材選取的單元為「Ways to Go」之「Section D：Chance Trees」，其內容包含 Traffic Data 與 Traffic Data（Continued）兩個活動。

（二）台灣教研院教材

本研究所選之台灣教研院教材是以「九年一貫數學領域課程綱要」的基本理念和所規定的教學內容為依據編寫而成。其編輯理念為提供學生豐富的數學知識，利用日常生活情境教導學生數學基本概念，汲取日常生活中的經驗引導學習進入數學的世界，重視學生的學習經驗，並根據已具有的經驗來設計教材內容的活動與學習素材。本研究之台灣教研院教材選取的單元為九年級下的「機率與統計」之「機率」小節。

肆、教材內容分析比較結果

針對我國教研院教材與美國 MiC 教材在機率內容方面，以下將分為一、情境設計與佈題方式；二、解題策略的發展方式；三、連貫性與延伸性等三部份進行比較探討。

一、情境設計與佈題方式

(一)美國 MiC 教材以同一故事情境連貫單元，佈題多為開放性問題且由淺至深。

美國 MiC 教材在單元的設計上，多選取貼近學生生活經驗的故事情境，並從各個情境中發展出許多開放性問題讓學生進行思考與討論，同一單元內，美國 MiC 教材以同一故事組織架構課程內容，並考慮學生的學習情形由淺至深進行佈題，其佈題的範圍也廣泛涉及學校生活、政府預算、旅遊規劃等等。

以下，呈現美國 MiC 教材之情境設計與佈題方式：

說明：

有一群學生正在 Hale Junction 蒐集交通流量的資料。

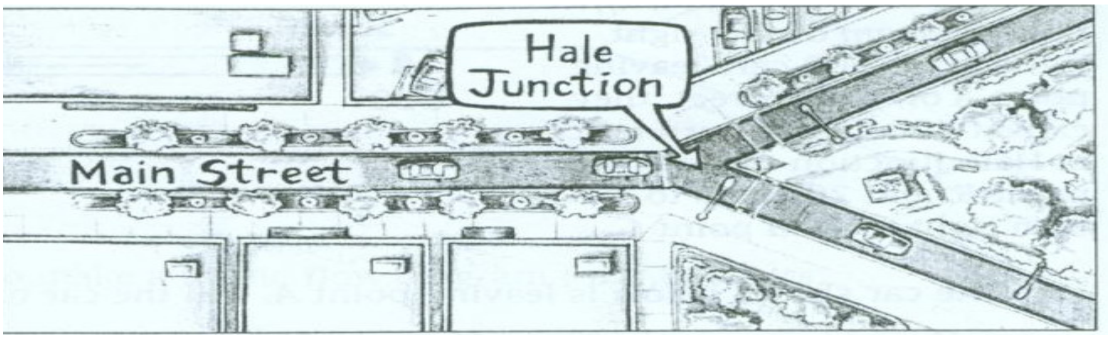


圖 1.　情境數學教材例題 01

●*情境一：*

在某一個星期一早晨，學生前往位在 Hale Junction 的市區公園並且計算車輛開往那裡後向左轉及向右轉的數目。計算的時間從上午九點至上午十點，他們計算出 421 輛車會向左轉以及 215 輛車會向右轉。

佈題：

1. a.為何向左轉的車輛數目比上向右轉的車輛數目的比值會是重要的？

b.找出一個比值來描述學生所調查出的交通流量情形。

●*情境二：*

在星期二和星期三，這群學生又蒐集了更多交通流量的資料。結果總結如下表：

	Number of Cars Turning	
	Left	Right
Tuesday	402	196
Wednesday	410	217

圖 2.　情境數學教材例題 02

佈題：

2. 關於這群學生的調查結果你注意到什麼？

●*情境三：*

這群學生花了整整五星期蒐集交通流量的資料(在相同地點與每日的相同時間)。他們總共計數的車輛是 3157 輛。

佈題：

3. a.你認為這些車輛中會向左轉的車有幾輛？向右轉的又有幾輛？

b.你怎麼確定出 a.部分的答案？

4. a.你認為 Hale Junction 在傍晚五點時的交通流量會是如何？

b.星期天從上午九點至上午十點的交通流量又會如何？

Note. From *Mathematics in Context-Way to Go* (P. 41) by Holt, Rinehart, & Winston, 2003. Chicago: Britannica.

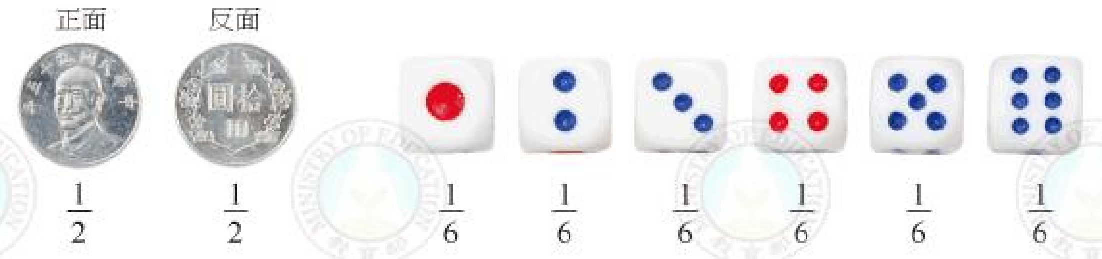
美國 MiC 教材以街道上的交通流量做為情境主題，有鑒於機率為一比值之形式，教材先讓學生說明向左轉以及向右轉車輛數的比值有何重要，再讓學生找出向左轉以及向右轉車輛數的比值，而此部分教材也允許學生使用估算的技巧算出比值，並不強調直接的紙筆計算。接續的情境，教材利用表格的方式呈現訊息，並試著讓學生說明藉由圖表所觀察到的資訊。最後，教材再次給予數據讓學生進行分析，並要求學生表達其分析的過程與想法，而開放性問題如佈題 4 所呈現的，也讓學生能夠進一步思考數據的可推廣性與延伸性，教師也可由學生的回答來檢視其合理性與可能性。

(二)台灣教研院教材同一單元內情境獨立，佈題多為封閉性問題且為一組組例題與練習題之形式。

台灣教研院教材在單元內的情境大多不相關聯，各小題間皆為獨自的情境問題。在佈題上為一組組例題與練習題之形式，題目多為封閉性問題，答案唯一且難以讓學生進行多元思考。

以下，呈現台灣教研院教材之情境設計與佈題方式：

我們怎麼用數字來表示機會呢？以最簡單的銅板為例，我們常說銅板出現正面和反面的機率各一半一半，這是因為正面和反面各佔所有可能情況的一半（圖 1-13(a)），因此我們說出現正面的機率是 $\frac{1}{2}$，出現反面的機率是 $\frac{1}{2}$。



(a) (b)

圖 1-13

又例如擲骰子時，結果共有 1、2、3、4、5、6 六種情形，出現 1 點的情形，佔所有可能情況的 $\frac{1}{6}$（圖 1-13(b)），所以出現 1 點的機率是 $\frac{1}{6}$，同樣的，出現 2 點的機率也是 $\frac{1}{6}$。又例如，由於偶數點佔了所有情況的 $\frac{3}{6}$，因此擲骰子時，擲出偶數點的機率是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，也就是說有一半的可能性會擲出偶數點。

圖 3. 情境數學教材例題 03

註：採自*國家教育研究院籌備處國中數學課本第六冊*（頁 44），國家教育研究院籌備處，2010。台北：國家教育研究院籌備處。

http://203.71.239.23/naerResource/study/440/98-18A-1.htm

台灣教研院教材在情境設計上並不相互關聯，如圖所示，在剛開始教材使用投擲硬幣的情境呈現機率，而後便接著用擲骰子的情境再次說明，兩情境間並沒有相互關聯。

例 1 Example

1. 擲一個骰子，會出現 1 點或 2 點的機率是多少？
2. 擲一個骰子，會出現奇數點的機率是多少？

解題說明

1. 如前所述，擲一個骰子，出現的點數有 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 等 6 個結果，而出現 1 點或 2 點的事件有 2 種可能，所以

   出現 1 點或 2 點的機率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$，

2. 擲一個骰子，會出現奇數點的事件有 3 種可能，即出現 1 點、 3 點或 5 點。因此

   出現奇數點的機率 $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

隨 · 堂 · 練 · 習

擲一個骰子，出現點數是 3 的倍數的機率是多少？出現點數不是 3 的倍數的機率是多少？

圖 4. 情境數學教材例題 04

註：採自*國家教育研究院籌備處國中數學課本第六冊*（頁 45），國家教育研究院籌備處，2010。台北：國家教育研究院籌備處。

http://203.71.239.23/naerResource/study/440/98-18A-1.htm

台灣教研院教材在佈題上，多為封閉性的問題，答案唯一且為題組式的佈題方式，隨堂練習大多由例題的相同概念發展而來，同樣的題組下大多為同一概念題目的延伸題型。

二、解題策略的發展方式

(一)美國 MiC 教材鼓勵學生多元解題，並指示教師可適時從中給予提示。

美國 MiC 教材不直接給予學生解題策略，進一步的，教材鼓勵學生自行發展解題策略，學生可藉由觀察、估算、操作物件等方式進行解題。同樣的，在教

師手冊中，也詳細說明學生可能在教材上會產生的疑問與迷思，並進一步提供教師可給予學生釐清概念的提示，而非提供教師直接教授概念的方法。

以下，呈現美國 MiC 教材之解題策略的發展方式：

說明：

你也可以製作一個圖表來說明交通流量的情形。

●情境四：

這群學生利用他們每天所蒐集來的交通流量資料繪製了一個交通流量圖。如果有 600 輛車從主要街道的 A 點出發，他們預期有 400 輛車會在 Hale Junction 向左轉後駛向 B 點，200 輛車會在 Hale Junction 向右轉後駛向 C 點。

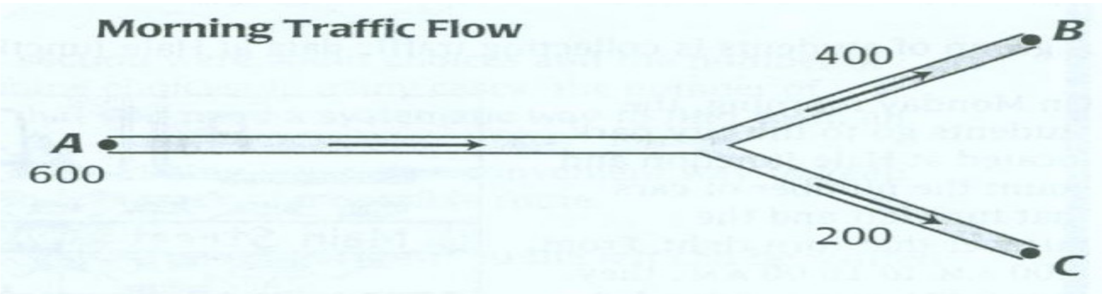


圖 5. 情境數學教材例題 05

佈題：

5. 圖中的車輛正駛離 A 點。這輛車將會駛向 B 點還是 C 點？請解釋。

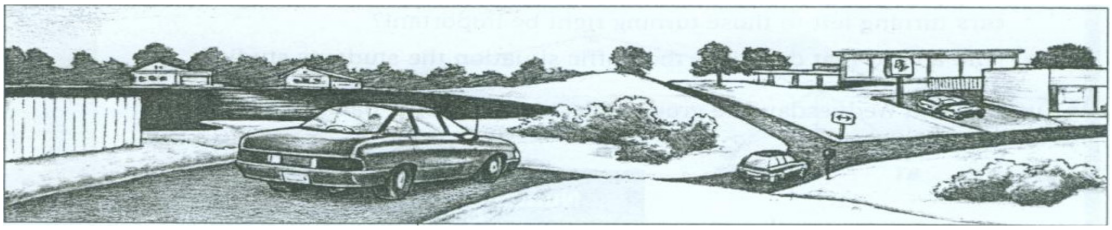


圖 6. 情境數學教材例題 06

說明：

除了在交通流量圖上寫下所有向左轉及向右轉的車輛數目之外，你也可以只寫下比率來表示。這樣的圖就叫做機會樹狀圖。

Note. From *Mathematics in Context-Way to Go* (P. 42) by Holt, Rinehart, & Winston, 2003. Chicago: Britannica.

●情境五：

這裡有一個機會樹狀圖代表著另一個叉口的交通流量。這個機會樹狀圖告訴你所有車輛的$\frac{2}{9}$將會駛向 B 點，而且所有車輛的$\frac{7}{9}$將會駛向 C 點。

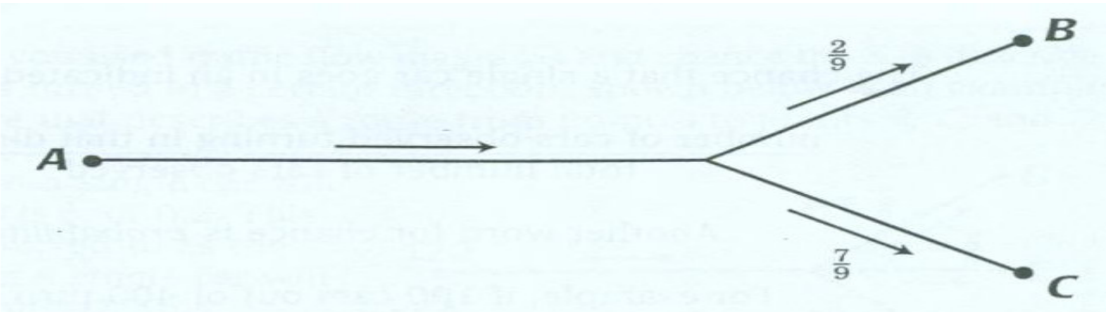


圖 7. 情境數學教材例題 07

佈題：

6. 利用上述的機會樹狀圖來製作一個有 1800 輛車的交通流量圖。

說明：

交通流量圖與機會樹狀圖可以被結合為一個樹狀圖如圖所示。這樣的圖表也可被稱做是一個機會樹狀圖。圖中所示的就是一個有 450 輛車的完整機會樹狀圖。

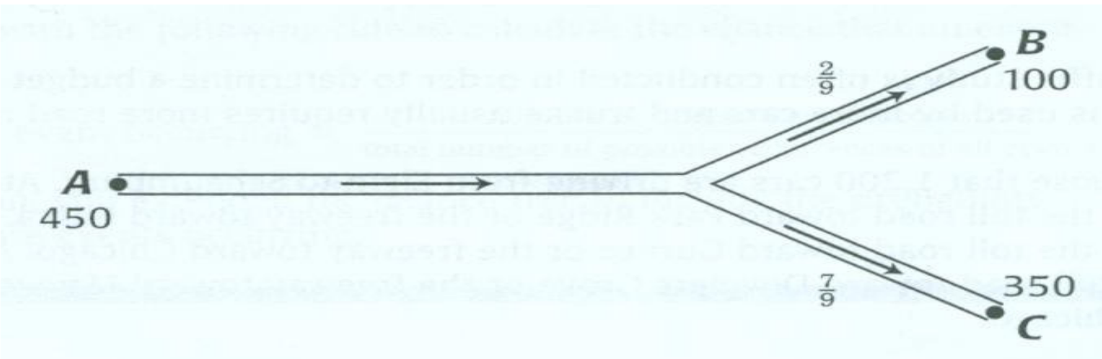


圖 8. 情境數學教材例題 08

佈題：

7. 以下這些機會樹狀圖並不完整。請你完成以下每個機會樹狀圖。

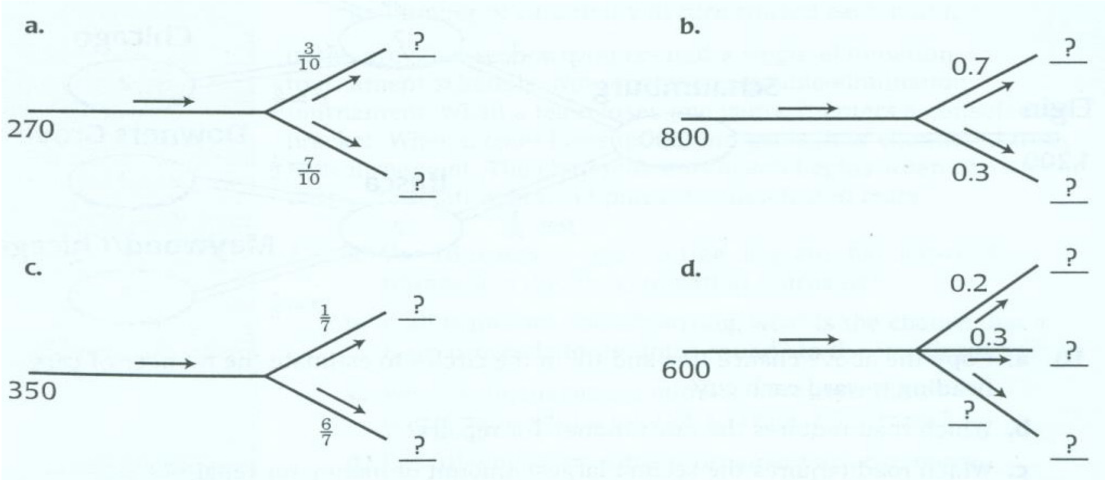


圖 9. 情境數學教材例題 09

Note. From *Mathematics in Context-Way to Go* (P. 43) by Holt, Rinehart, & Winston, 2003. Chicago: Britannica.

在情境四當中，教材介紹了交通流量圖（如圖 5），在圖 6 中，教材讓學生判斷車輛將會駛向 B 點還是 C 點，然而，此部份便是學生易產生迷思概念之處，因為此題並無法確定車輛會直接駛向 B 點還是 C 點，但可以說，車輛駛向 B 點的機會比上駛向 C 點的機會比為 2：1。而像這樣的問題，可以提供學生對於機率概念的認識與釐清，但在台灣教研院教材中，卻是幾乎沒有的。另一方面，教材在建立學生的機率概念上，也讓教師能給予學生適度的提示和提問，例如提問：投擲一枚硬幣 50 次，若前 40 次皆為正面，你能預估第 41 次投擲的情形嗎？類似的問題可以讓學生對其概念與想法進行進一步的思考，而教師也可由學生的回答來了解其概念架構是否正確。而後，教材介紹了機會樹狀圖（如圖 7～9），在不給予學生解題策略下，教材提供四個小題讓學生自行發展解題策略，學生除了可由總車輛數與各機率值分別算出各路徑的車輛數，也可先算出其中一路徑的車輛數後，再用總車輛數減去此一路經車輛數而算出另一路徑之車輛數。由此看

出，教材在培養學生解題能力上，較偏向不主動提供解題策略的方式，反倒鼓勵學生自行發展其解題之策略。

(二)台灣教研院教材多為教師示範例題，學生模擬其解題策略解隨堂練習。

台灣教研院教材題型涉及擲骰子、取球、抽牌、丟銅板等等，題型多樣性較高，但其佈題多為例題加上隨堂練習的題組方式，教師大多示範例題，而後學生便模擬其解題策略解隨堂練習題。

以下，呈現台灣教研院教材之解題策略的發展方式：

圖 10 中，台灣教研院教材在佈下問題後，便呈現「解題說明」來提供學生此問題的解題策略，最後，再提供類似例題之「隨堂練習」問題給學生作為練習，此部份，即和美國 MiC 教材有很大的不同，台灣教研院教材直接於例題中呈現解題策略，倘若教師亦依照課本的解題策略進行教學，如此，學生從問題直接跳至答案，這當中便省略了讓學生可以進行思考的歷程，且其解題策略並非學生之自發性，反倒是由教師直接灌輸而得，如此一來，在隨堂練習的表現上，便容易呈現與例題相似甚至相同的解題策略，這部份是值得國內教材反思之處。

例 3 Example

一副撲克牌有 52 張，均勻洗牌後抽出一張，求該牌為 A 的機率。

解題說明

由於一副撲克牌有 4 種花色，因此一副撲克牌共有 4 張 A ，所以抽出一張 A 的情形共有 4 種可能，即、、、4 種。因此

$$P=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

其中 P 表示所抽的牌是 A 的機率。

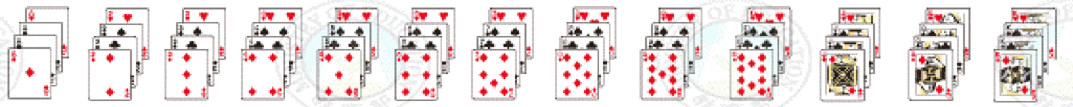


圖 1-14

我們注意到例 3 還有另外一種做法。由於撲克牌有 4 種花色，而且每一種點數這 4 種花色各有一張，若將同點數不同花色的牌疊成一疊（圖 1-14），想成我們只看點數，不看花色，由於每一疊的張數都一樣，則抽出一張牌時，是 13 種點數中任一種點數的機會都一樣，有 13 種可能，所以抽到 A 的機率是

$$P=\frac{1}{13}$$

隨·堂·練·習

一副撲克牌有 52 張，均勻洗牌後抽出一張牌，分別求出該牌是 3 點、4 點或 5 點的機率。

圖 10. 情境數學教材例題 10

註：採自*國家教育研究院籌備處國中數學課本第六冊*（頁 48），國家教育研究院籌備處，2010。台北：國家教育研究院籌備處。

http://203.71.239.23/naerResource/study/440/98-18A-1.htm

三、連貫性與延伸性

(一)美國 MiC 教材由先前的單元導入機率教學，並於單元後延伸先前的問題提供學生進一步思考。

美國 MiC 教材在每本單元教材內皆有一定的關連性，在研究者所選擇的「Ways to Go」此本單元教材內，共計有四個小單元，教學時數為 16 天，而機率部份為第四個小單元「Chance Trees」，教學時數為其中 2 天。教材在前三個小單元用了路徑的情境貫穿教學，在第四個小單元中，教材同樣由之前的路徑問題導入教學，使學生能在熟悉的情境當中學習新的概念，並且，在單元後，提供學生先前問題的延伸題型，讓學生可以進一步進行思考，不僅豐富了教材的廣度，也增加了教材的深度。

以下，呈現美國 MiC 機率教材之連貫性與延伸性：

說明：

在上一個單元裡，你製作了一個單淘汰賽的賽程表。現在，考慮一個雙淘汰的賽程。當一個隊伍輸了一場比賽後，此隊伍進入敗部復活區。當此隊伍又輸了一場比賽，則將被淘汰。冠軍將由從未輸過比賽的隊伍與敗部復活區的冠軍進行比賽後產生。

佈題：

8. a.利用 16 個隊伍來製作一個樹狀圖表示雙淘汰賽中的各個回合賽程。

b.如果所有隊伍實力相當，那麼一個隊伍進入第三回合賽程的機會為何？進入第四回合賽程的機會為何？

c.16 個隊伍進行雙淘汰賽最多會有幾個回合的賽程？32 個隊伍呢？

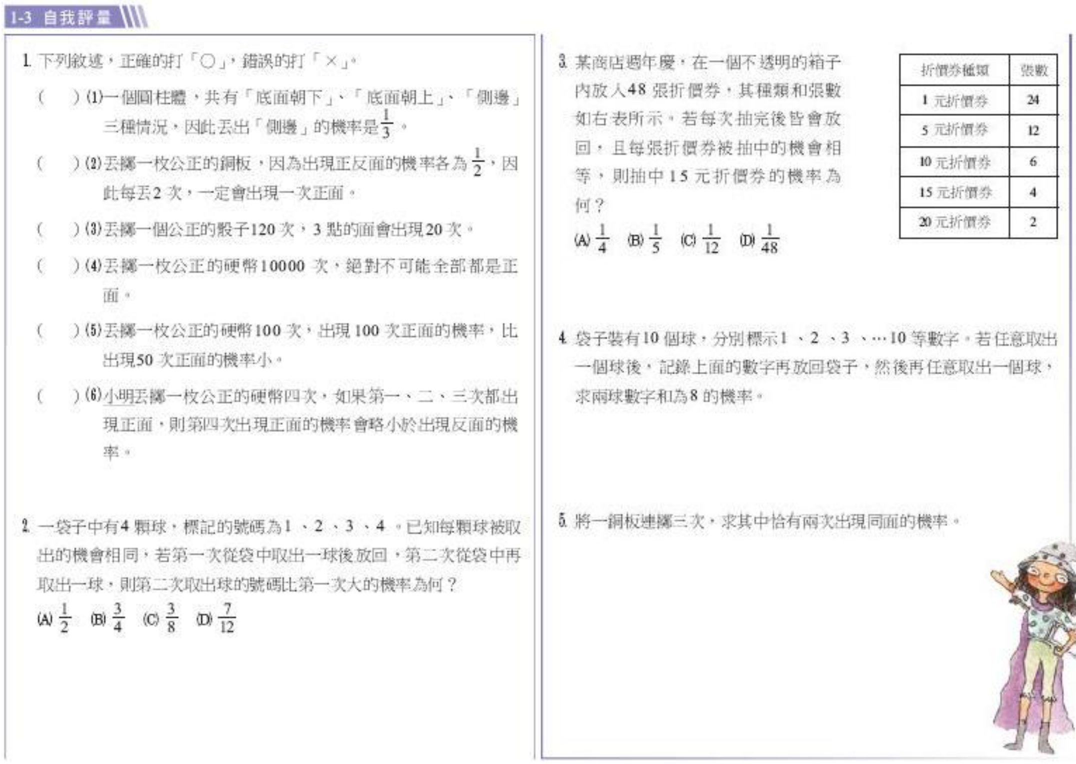
d.描述其他可能的賽程表安排。

美國 MiC 教材在單元的最後提供學生能更進一步思考的題型，此問題促使學生能透過機會樹狀圖求出單一事件可能發生的機率，也可促進學生組織、思考並使用較有效率的解題策略來解決問題，甚至更加符合美國 MiC 教材的設計原則－情境真實生活化。

(二)台灣教研院教材僅在九年級下學期最後一個單元呈現機率教學，單元最後並無延伸性題型。

台灣教研院教材在研究者所選擇的「機率與統計」此單元內，共計有三個小節，單元的教學時數為 18 節，而機率部分為第三小節：「機率」，佔其中 6 節。另一方面，台灣教研院教材僅在九年級下學期最後一個單元呈現機率教學，學生在此之前並未被教授任何機率相關概念，單元最後的評量題目也僅針對單元內容提供學生類似的題目進行練習，並未做進一步的延伸思考或給予討論式的題目。

以下，呈現台灣教研院教材之連貫性與延伸性：



1-3 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。
   - (　) (1)一個圓柱體，共有「底面朝下」、「底面朝上」、「側邊」三種情況，因此丟出「側邊」的機率是$\frac{1}{3}$。
   - (　) (2)丟擲一枚公正的銅板，因為出現正反面的機率各為$\frac{1}{2}$，因此每丟2 次，一定會出現一次正面。
   - (　) (3)丟擲一個公正的骰子120 次，3 點的面會出現20 次。
   - (　) (4)丟擲一枚公正的硬幣10000 次，絕對不可能全部都是正面。
   - (　) (5)丟擲一枚公正的硬幣100 次，出現 100 次正面的機率，比出現50 次正面的機率小。
   - (　) (6)小明丟擲一枚公正的硬幣四次，如果第一、二、三次都出現正面，則第四次出現正面的機率會略小於出現反面的機率。

2. 一袋子中有4 顆球，標記的號碼為1 、2 、3 、4 。已知每顆球被取出的機會相同，若第一次從袋中取出一球後放回，第二次從袋中再取出一球，則第二次取出球的號碼比第一次大的機率為何？
   (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{7}{12}$

3. 某商店週年慶，在一個不透明的箱子內放入48 張折價券，其種類和張數如右表所示。若每次抽完後皆會放回，且每張折價券被抽中的機會相等，則抽中15 元折價券的機率為何？
   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{48}$

折價券種類	張數
1 元折價券	24
5 元折價券	12
10 元折價券	6
15 元折價券	4
20 元折價券	2

4. 袋子裝有10 個球，分別標示1 、2 、3 、…10 等數字。若任意取出一個球後，記錄上面的數字再放回袋子，然後再任意取出一個球，求兩球數字和為8 的機率。

5. 將一銅板連擲三次，求其中恰有兩次出現同面的機率。

圖 11.　情境數學教材例題 11

註：採自*國家教育研究院籌備處國中數學課本第六冊*（頁 59-60），國家教育研究院籌備處，2010。台北：國家教育研究院籌備處。

http://203.71.239.23/naerResource/study/440/98-18A-1.htm

台灣教研院教材在單元最後所提供的題目多為單元內題組的類似題，學生很難從題目中進行延伸性思考，其問題也大多僅與此單元相互關聯，並未就之前的

單元進行延伸性佈題。

伍、結論與建議

教科書的開放已是全球教育的發展趨勢，不同教科書的選用不僅影響教師在課室中的教學，也同時帶給學生不同的學習方式與果效（林碧珍、蔡文煥，2005；Floden, 2002）。探究我國教研院教材與美國 MiC 教材在機率課程的設計後，發現在「情境設計與佈題方式」上，美國 MiC 教材以同一故事情境連貫單元，佈題多為開放性問題且由淺至深；台灣教研院教材同一單元內情境獨立，佈題多為封閉性問題且為一組組例題與練習題之形式。在「解題策略的發展方式」上，美國 MiC 教材鼓勵學生多元解題，並指示教師可適時從中給予提示，其解題策略的發展方式為：佈下情境→學生由情境獲得概念→再佈題→學生自行發展解題策略；台灣教研院教材多為教師示範例題，學生模擬其解題策略解隨堂練習，其解題策略的發展方式為：佈下問題→教科書示範解題說明→再佈題→學生解題。而在「連貫性與延伸性」上，美國 MiC 教材由先前的單元導入機率教學，並於單元後延伸先前的問題提供學生進一步思考；台灣教研院教材僅在九年級下學期最後一個單元呈現機率教學，單元最後並無延伸性題型。

研究者也發現，美國 MiC 教材於五年級已建立學生關於機率的先備知識，並於七年級導入機率的正式概念。相較於此，國內機率課程一直以來都被安排的較晚，在 92 年所公佈的數學學習領域課程綱要裡，機率的相關分年細目僅剩下「9-d-09 能以具體情境介紹機率的概念（D-4-04）」與「9-d-10 能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念（D-4-04）」兩項（教育部，2003），甚至，在 97 課綱中，僅剩下「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念（D-4-04）」此一項關於機率之分年細目（教育部，2008），顯見，課程綱要僅安排在第四階段的九年級數學課程最後進行機率的相關教學，此點是和美國 MiC 教材極為不同的。目前，雖無研究可證實對於機率不同安排的兩教材何者較好，但可想而知，

國內學生在九年級升學壓力與課程時間的緊壓下，關於機率概念的學習若「前無經驗、後無延續」，那麼學生在此方面的概念知識是將產生影響的。因此，亦有學者認為關於機率的教學其實可依據學生年齡的不同於國小階段進行不同層度的發展（蔡欣潔、葉啟村，2006；劉秋木，1996），這點是值得關注的議題。

因此，研究者針對上述探究結果，提出幾點建議如下以供參考：

一、情境設計與佈題宜多元化

引入生活化的教學活動能幫助學生有效學習，這同時也仰賴教材是否能考慮到學生生活的真實情境與教材的佈題方式。台灣教研院教材易流於為情境而情境的設計模式，其內容大多不合乎學生的成長環境或經驗背景，使得學生在教材的學習上容易產生困難或不易類化理解。佈題上，台灣教研院教材題組式的佈題方式窄化了學生的思考模式，也減少了教師與學生互動討論的機會，而題組間獨立的結果，教材的概念呈現便難以系統化的由淺入深。因此，在未來教材的編輯上，可朝向以真實生活情境來貫穿課程的架構，並善用佈題方式將概念由淺至深的呈現，以增進學生的學習效果。

二、解題策略的發展宜多樣化

從本研究中發現，美國 MiC 教材重視學生自行發展解題策略，也鼓勵學生發展多樣化的解題方式，而教材中難易不同的情境佈題，同時也啟發了學生不同層面的思考與解題模式，然而，台灣教研院教材在佈題中同時呈現解題歷程的方式，使學生易流於單一策略的解題模式，影響所及，學生在問題的思考、表達、討論、推理甚至轉化等等能力便易產生影響，也難以在問題情境外發展多樣化的解題方式。此外，關於機率的概念表徵方式眾多，舉凡比值、比例、小數、分數等等形式都可進行表徵，因此，教材應多加強調讓學生以多樣化形式進行概念的表徵與問題的解決，教師在教學上也應多鼓勵學生進行思考與善用各種方式來解

題，並避免直接講述式或者告知解題策略的教學模式，才能有效提升學生多樣化的問題解決能力。

三、教材宜兼具連貫性與延伸性

從本研究中發現，美國 MiC 教材藉由相同的情境導入新單元，讓學生在熟悉的情境下進行新概念的學習，而在單元後，也適時提供與之前所學相關聯的延伸性題型讓學生進行進一步的思考，教材相互連結的結果，學生不僅能建立新的認知基模，也能擴展其認知結構。反觀於此，九年一貫課程雖強調科目之間的外部連結與科目內的內部連結（教育部，2003；教育部，2008），台灣教研院教材在學習內容的安排上仍以題組式且每組情境不連貫的方式進行呈現，顯見，學生對於機率概念的學生將難由教材之規劃中進行連貫與延伸。因此，研究者建議在未來教材的編輯上，應多強調教材新舊知識間的承接與延續，並藉由適當的佈題，使學生不僅能喚起舊有的學習經驗成為先備知識，也能將新觀念加以融入而進行更深層的問題思考。

四、機率課程宜提前進行教學

NCTM（2000）指出機率是與其它數學領域做聯結的一項重要主題，特別是在數和幾何方面，藉由機率的概念可以具有收集、描述及解釋資料的基礎，且我國九年一貫數學課程領域中，也將機率視為五大主題之一（教育部，2003；教育部，2008）。然而，國內除了 92 年的課程將小學六年級關於機會的教學全部刪除外，97 年的課程更將原本僅有的兩條關於機率之分年細目刪至剩下一條，顯見，學生第一次學習機率相關內容將延至九年級，且學習內容還容易受到升學課程緊壓的影響。但 NCTM 在其課程標準中即指出：幼稚園到國小四年級的數學課程應該含有機率的經驗，以使學生有機會探究機率的概念；且國小五年級至八年級的數學課程，應讓學生從真實的生活情境中探索機率概念（NCTM，2000）。因

此，研究者建議台灣的機率課程可以提前進行教學，不但能有較充裕的時間奠定學生學習機率的基礎，也能配合學生的認知結構和經驗背景於不同的學習階段進行機率的概念教學。

陸、參考文獻

王文科、王智弘（2007）。*教育研究法*。台北：五南。

王建都(譯)（1991）。學校數學課程與評鑑準則之施行:機率部份。*中縣文教*，12-16。

林美如（2007）。*中國、香港、台灣國小數學教科書幾何教材之內容分析*。未出版之碩士論文，國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東。

林碧珍、蔡文煥（2005）。TIMSS 2003 台灣國小四年級學生數學成就及其相關因素之探討。*科學教育月刊，285*，2-38。

徐偉民、徐于婷（2009）。國小數學教科書代數教材之內容分析：台灣與香港之比較。*教育實踐與研究，22*（2），67-94。

國家教育研究院籌備處（2010）。*國家教育研究院籌備處國中數學課本第六冊*。台北：國家教育研究院籌備處。

教育部（2003）。92 年*國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域*。台北：教育部。

教育部（2008）。97 年*國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域*。台北：教育部。

陳仁輝、楊德清（2010）。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。*科學教育學刊，18*（1），43-61。

陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛（2005）。*中小學數學科課程綱要評估與發展研究*。台北：教育部。

陳欣民、劉祥通（2002a）。一位五年級學童機率概念之個案研究。*國民教育研究*

學報，*8*，133-158。

陳欣民、劉祥通（2002b）。從兒童迷思概念之文獻分析談機率單元的教學與課程。*科學教育研究與發展季刊*，*26*，40-51。

游自達等人（2007）。*九年一貫課程之教科書總評鑑：設計理念、能力指標與統整性總結報告－數學領域教科書評鑑報告*。台北：中華民國課程與教學學會。

黃文璋（1999）。*數學欣賞－第十六章機率與生活*。華泰文化事業股份有限公司，台北。

劉秋木（1996）。*國小數學科教學研究*。台北：五南。

蔡文煥（1998）。國小統計教材機率初步概念之設計理念與實際。*國小新課程概說（高年級）*，257-266。台北：教師研習會。

蔡欣潔、葉啟村（2006）。國小高年級學童機率概念與其學習前數學概念之關聯研究。*國立臺南大學教育研究學報*，*40*（1），51-73。

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. In A. C. Porter & A. Gamoran(Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement (pp. 231-266)*. Washington: National Academy Press.

Green, D. R. (1986). Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. In R. Davidson & J. Swift (Eds.). *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp.287-291). University of Victoria, B. C., Canada.

Green, D. R. (1987). Probability concepts: Putting research into practice. T*eaching Statistics*, *9*(1), 8-14.

Holt, Rinehart, & Winston. (2003). *Mathematics in Context-Way to Go*. Chicago: Britannica.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langgrall, C. W., & Mogill, A. T. (1997). A Framework for assessing and nuturing Young Children’s Think in Probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101-125.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris, France: Organisation for Economic Co-operation and Development.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. London: Routledge & Kegan Paul.

Schmidt, W. H., Mcknight, C. C., & Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Tarr, J. E., Chavez, O, Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the Written to the Enacted Curricula: The Intermediary Role of Middle School Mathematics Teachers in Shaping Students' Opportunity to Learn. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 191-201.

Törnroos, J. (2004). *Mathematics Textbooks, Opportunity to Learn and Achievement. ICME-10M*, Discussion Group 14 Copenhagen, Denmark.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 609-626.