

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第23期

台灣數學教育學會

2010年09月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2010 年 09 月 出版 NO.23 2010

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 23 期

2010 年 09 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 23 期

2010 年 09 月

數學建模活動對促進小學生數學素養之探討—以五年 級量測腳印活動的設計與實施為例.....	1
陳冠州、秦爾聰	
活動報馬仔	22

ISSN 1815-6355

數學建模活動對促進小學生數學素養之探討

— 以五年級量測腳印活動的設計與實施為例

陳冠州^{1、2}、秦爾聰³

¹ 桃園縣立建國國民小學、² 國立台北教育大學數學資訊教育學系

³ 國立彰化師範大學科學教育研究所

摘要

本文主要在透過國小五年級數學建模活動的設計與實施，評估實施過程與結果對學生數學素養之影響。為了強化學生的數學素養，研究將採取建模觀點並根據建模活動六個原則來設計學習活動，期望透過數學建模活動改善學生數學解題和理解的問題。本文中所謂建模活動是以引模活動為基礎，引導學生經由四個階段，即：文章閱讀、準備問題、陳述問題和策略分享等過程，從而建構他們解決問題的策略或方法。活動實施之後，研究者發現小組成員都能專注於文章閱讀上，且能很快地進行討論，最後並提出解決方案和同儕一起分享。這樣的結果是不同於講述型的數學課室，在建模活動中學生有高度的參與度並能展現出數學建模的歷程。不僅可達成九年一貫數學領域相關的能力指標，對於數學素養所強調的五股數學能力(Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001)，也有均衡的發展，同時促進其問題解決的能力。

關鍵詞：數學建模活動、數學素養

壹、前言

一般而言，講述型教學仍是現今數學課室經常採用的方式。根據我國參與「學生基礎素養國際研究計劃」(如 PISA,2006)的結果顯示，這樣的教學方式雖可能增益學生算術方面的熟練與技能，然而，似乎無助於提升數學解題和問題理解等素養，取而代之的是，必須加強於閱讀理解、統整能力和模式探索與建構等面向(周玉秀,2006)。關於數學素養的議題，許多學者咸認為：「面對未來數學教育，重要的是如何達到讓學生具備創造力、發明以及問題解決能力的目標必須被強調。」(NCTM,2000; Nathan,2001; Tan,2002)從這樣的趨勢來看，培養學生創造力與問題解決能力等數學素養，儼然已是數學教育未來的努力方向。數學建模活動(mathematical modeling activity)即是一個強調激發學生創造力與問題解決能力的活動，透過這樣的活動，學生們可以發展出適用於隱藏在生活中的數學概念和其他一些可以進一步被應用的基礎概念。在建模活動中，學生被要求以數學的觀點來解釋並解決一個實際生活中所發生的複雜情境(Lesh & Doerr,2003; Lesh & Zawojewski, 2007)，最後學生必須形成一套關於數學的描述、數學的程序或數學的方法和工具，然後在現實生活中運用這個方法來解決問題。對本活動而言，數學建模的過程涉及到一群學生共同產生一個描述、形成程序或方法，這取代了平常上數學課時師生互動間只用一些字眼(例如：懂不懂?懂;會不會?會)或一些數字(僅僅表示答案或結果)來做為問題回應的狀況。所以，在建模活動中學生解決問題的方式可以明確地顯示出他們是如何構想，並且提出合適於特定數學情境下的解題方法或策略。

教育部(2003)所強調生活化、實用化、趣味化以及結構化的數學課程，數學建模活動正可符應並落實這些原則。在生活化方面，真正數學生活化的意義在於數學的模式是由學生在真實的生活情境中經由描述、探索、實作、臆測、解題以及共享所建立的解題方案(Lesh & Doerr,2003)。在建立數學模式之前，首先，學生要對情境所顯示的訊息產生意義(sense-making)，這類意義包含數學結構裡的數、量、形是由學生在生活情境中主動量測或察覺的，而不是教材裡已知的解題條件或是教學中被動給與的數據。在建模活動中其生活情境是能引發學生動機、促進參與並使其採取行動，進而增益思考與解題的能力。在實用化方面，對於學生所建構的模式不僅僅是數學概念和技能的獲得，最重要的是能將這些數學模式

應用於生活之中，並且解決生活中實際的問題。數學建模活動發展於真實的生活裡，所建構的數學模式不僅還原問題的真實面貌，同時這樣的模式能提供一套解題的工具或策略來解決生活中關於數學的問題。在趣味化方面，數學建模活動源自於學生實際的生活情境，此生活情境的問題能貼近學生的生活所需與最感興趣的議題。因此，就興趣的層面而言，數學建模活動普遍能引發學生好奇新，促使學生充分參與數學模式的建立。就需求的層面而言，數學建模活動則是學生將來面對真實生活時，解決問題的能力與思考模式。在結構化方面，數學建模活動所展現的是活動結構化、認知結構化與數學結構化等。在活動結構化方面，數學建模活動所促成的是一連串的引模活動（model-eliciting activity, MEA）、探模活動（model-exploring activity）與修模活動（model-revising activity），這樣具有結構化的建模活動過程，除了可促進學生在概念具象化（embodiment）、表徵符號化（symbolism）和思考形式化（formalism）的認知結構發展，更有益於學生數學邏輯的推理能力和特定主題概念的建構與發展，對於整體數學結構的建立與理解其幫助可說是相當大。

貳、建模活動的設計

一、設計原則

數學建模活動的目的在能誘發學生思考（thought-revealing），主要的作法是先以引模活動來啟動學生參與解決問題的動機。所謂引模活動（model-eliciting activity [MEA]）是一種具開放性（open-end）、與真實世界連結（real-world）並以委託者需求為導向（client-driven）的問題。為了能提升學生高階思考的技巧，建模活動強調能不斷引發結果的過程，重視每個結果所引發的次級結果（second product），也就是主張「歷程即是結果」。

研究者根據 Lesh 和 Doerr (2003)與 Diefes-Dux, Moore, Zawojewski, Imbrie 和 Follman(2004) 等人的觀點，整理出有關建模活動設計的六個原則如下：

模式建構原則 (Model-Construction)	確定活動中要求學生對重要的數學情境提出描述、解釋、解題程序、及合理的預測。
真實原則 (Reality)	確定活動必須規劃於真實的情境之中，並能促進學生從數學能力和一般知識的不同層面來解釋活動的意義。
自我評量原則	確定活動中的設計足以讓學生決定解決方案何時需要被改

(Self-Assessment)	良、精緻化、或進行更進一步的延伸。
模式文件化原則 (Model-Documentation)	確定活動能引發學生以適當的文件格式呈現如何思考問題的情境脈絡。
建構分享能力及再使用性原則 (Construct Share-Ability and Re-Usability)	確定活動能引導學生產出一個可和別人分享而且可以針對不同狀況進行修正的解題策略。
有效原型原則 (Effective Prototype)	確定模式的產出將是儘可能簡單並保持數學上的重要性。

表一、設計建模活動的六項原則

二、實施流程

數學建模活動的實施流程應該包含四個子活動：閱讀文章、預備問題、陳述問題、分享解決方案，茲分別說明如下：

【閱讀文章】

閱讀文章即是引發學生參與解題的引模活動。首先透過提供適當的閱讀資料的將問題情境介紹給學生，並由學生察覺關於解題的相關訊息。當讀完文章或資料後，學生需要回答一系列與文章內容有關的問題，透過提問與回答的過程，希望學生能對問題背景的來龍去脈更加熟悉，為解題作準備。

【預備活動】

依循閱讀資料所提供有關問題情境的脈絡，預備活動需考量該活動之具體教學目標與學生的先備知識，以幫助學生建構出可以作為解決本教學活動所預設之問題(陳述問題)的預備經驗。

【陳述問題】

在陳述問題的活動裡，首先將學生以每組 5~6 人進行分組，也可以在閱讀文章的活動前就分組；鼓勵 (最好不要要求或者分配)學生選擇小組中扮演的角色，像是時間控制員、需要物品的搜集員、文書員...等等；另外需提醒學生們應該共享分擔解決問題的工作。

分組完成後，教師將陳述問題呈現給學生。當學生嘗試解決問題時，教師的角色應該是一個促進者和觀察者，需避免提出會引導學生想到某一個特定解決方案的問題或是說明。當然在這段期間，教師也應該嘗試去理解為何學生會這樣解決問題，以便能在他們的

說明解決方案的時候提出對解答的疑問。

【分享解決方案】

當各組解題告一段落後，教師讓小組將他們的解決方案呈現在班上同學面前。基本上，每組說明的時間大概有 3-5 分鐘。基於時間考量或讓分享活動更具效率，報告時可能需要限制組數，相同解題方案的組別僅選取一組，並讓不同解題方案小組上台說明，或者是只讓一些具有原創性解答的小組上台報告。另外，在小組開始正式報告之前，教師應該鼓勵其他學生，不但要仔細聆聽其他組提出的解決方案說明，更要嘗試去理解他們的解決方案，以及考慮這些小組提出的解決方案是否符合陳述問題裡當事人的需要。

在小組報告的互動過程中，教師可能必須提供一些不同的觀點或刺激給其他學生，讓他們能夠對報告內容提出一個好的質疑問題。儘可能讓學生在聽完其他小組的報告之後，可以透過小組討論再次更新自己的解決方案，然後在小組的任務報告單提出來和其他組共同分享。必須注意的是，當小組學生提供他們解決方案的說明並且有其他同學提出疑問時，整個班級的討論應該與解決方案的說明一起進行，這樣將有助於解決不同方案間的衝突和差異。

三、本教學活動的目標與內容

在進行本活動的學習之前，學生已具備兩位小數的加減概念，並能以直式處理三位數乘以三位數的乘法和三位數除以三位數其商為整數的除法問題，以及倍數關係（整數倍）。為了結合九年一貫課程並落實數學領域相關指標，本活動所設定在認知、情意、技能三個面向的具體學習目標如下：

認知：

1. 熟練除數為二位數的除法直式計算。
2. 熟練除數為三位數的除法直式計算。
3. 能以直式計算乘數、除數為三位數的問題。
4. 整數除以整數，商為一位有限小數。
5. 整數除以整數，商為兩位有限小數。

情意：

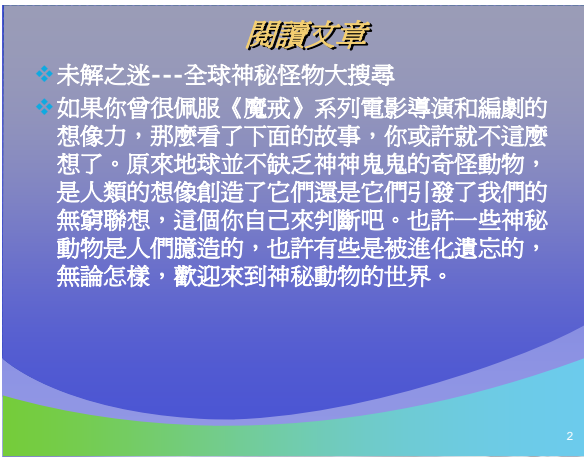
- 1.能從問題情境中檢視並反思自己解題的優缺點。
- 2.從解決問題的過程建立解題的耐心與毅力。
- 3.從小組合作解題的活動中，培養欣賞與包容他人的情意。

技能：

- 1.具備解決一般問題的能力。
- 2.能熟悉各種解決問題的歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證等。

本活動所設計的脈絡情境主要圍繞在腳印的議題，透過世界上千奇百怪的生物不同的腳印，期待能吸引學生的熱烈參與學習。有關建模活動各子活動的內容、所對應的能力指標以及設計原則，茲說明如下：

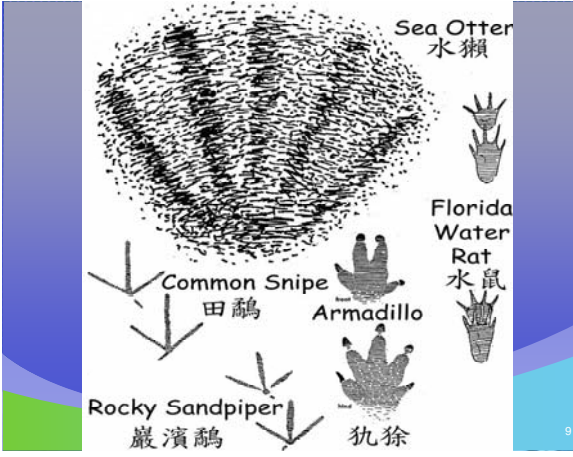
【閱讀文章】在本閱讀文章活動裡，教師透過引導和討論，讓學生聚焦在腳印與體型的關係為何？即希望僅僅透過腳印的線索，能推估出腳印擁有者的體型。

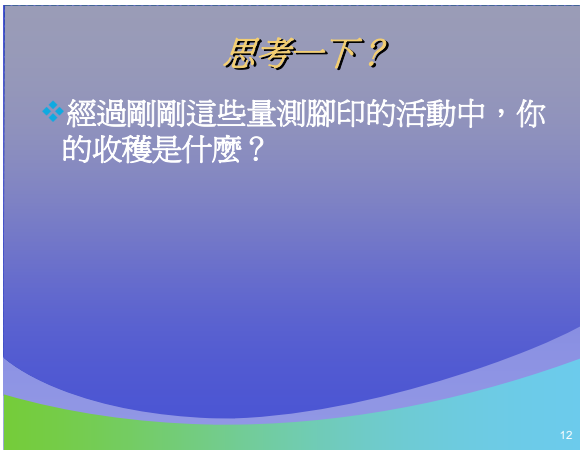
對應九年一貫 能力指標	活動內容	設計原則
C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。 C-R-02 能察覺數學與其他領域之間有所連結。 C-R-03 能了解其他領域中所用到的數學知識與方法。 ◎解題 C-S-01 能分解複雜的問題為一系列的子題。	 <p style="text-align: center;">閱讀文章</p> <ul style="list-style-type: none"> ❖ 未解之迷---全球神秘怪物大搜尋 ❖ 如果你曾很佩服《魔戒》系列電影導演和編劇的想像力，那麼看了下面的故事，你或許就不這麼想了。原來地球並不缺乏神神鬼鬼的奇怪動物，是人類的想像創造了它們還是它們引發了我們的無窮聯想，這個你自己來判斷吧。也許一些神秘動物是人們臆造的，也許有些是被進化遺忘的，無論怎樣，歡迎來到神秘動物的世界。 	*（模式建構原則 Model-Construction）

<p>C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。</p> <p>C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。</p>	<p>❖ 雪人謎蹤</p> <p>在世界上所有神秘的動物中，最讓人著迷神往的就是傳說中的喜馬拉雅山雪人，雪人被稱作“夜帝”(Yeti)，意思是居住在岩石上的動物。關於雪人的傳說可以追溯到西元前326年，它們高1.5米到4.6米不等，頭顱尖聳，紅發披頂，周身長滿灰黃色的毛，步履快捷。有關雪人的傳說逐漸被神秘動物學家承認，吸引著無數探險家來到喜馬拉雅地區，找尋這個給人類帶來無限幻想空間的神秘動物。</p> <p>*在喜馬拉雅山區，雪人被描述成一種身材高大、半人半猿的傳奇動物。</p> 	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p>
	<p>❖ 西普頓拍攝的，著名的“冰鏟和腳印”兩片。</p> <p>文章出處： http://www.fox.com/infoc/28/2008-4/3128.htm</p> 	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p>
	<p>❖ 1982年6月10日，美國華盛頓州與俄勒岡州交界處，一名國家森林管理區雇員，遭遇到一頭身高2.5米的人形巨獸。巨獸行走的腳印被考察組灌注了模型。由於腳印上保留了清晰的趾紋印痕，專家們認為不大可能是偽造。</p> 	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p>



		<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p>
	<p style="text-align: center;">思考一下?</p> <ul style="list-style-type: none"> ❖ 回顧上面這篇文章，小朋友你發現到了嗎？剛剛介紹這些傳說中的雪人體型如何？腳印呢？在正常的狀況下，生物的體型越高大腳印也就...？ ❖ 所以如果要知道一種生物的體型我們可以先...？ ❖ 嗯！讓我們先解決下面問題吧！ 	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p> <p>* (真實原則 Reality)</p>


【預備活動】為了確定學生能根據腳印的線索尋求腳印與體型的關係，並依照這樣的關係推算出體型來，量測腳印的技巧是不能或缺的。在預備活動裡，順著閱讀文章的情境脈絡，先讓學生開始辨識並量測各類動物的腳印，目的在促進學生能根據腳印的各種條件，察覺這些條件與體型間的關係並且進行推斷。例如，在討論之中，學生會發現腳印的深淺與體重有關，腳印的大小則和身高有關。而量測的活動可以促成學生使用像尺等量測工具去丈量出腳印大小，進而獲知各組同學的腳印的長、寬和面積等數據。

對應九年一貫 能力指標	活動內容	設計原則															
<p>C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。</p> <p>C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。</p> <p>C-T-03 能把情境中與數學相關的資料資訊化。</p> <p>C-T-04 能把待解的問題轉化成數學的問題。</p>	<p style="text-align: center;">預備問題</p> <ul style="list-style-type: none"> ❖ 1) 利用動物腳印的資料完成下面表格: ❖ 2) 哪一隻動物腳的面積最大? 你是怎麼估算的? ❖ 3) 哪一隻動物的體型最大? 你是怎麼知道的? 	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p> <p>* (模式文件化原則 Model-Documentation)</p>															
		<p>* (真實原則 Reality)</p>															
	<table border="1" data-bbox="671 1422 1246 1861"> <thead> <tr> <th>動物</th> <th>最小的腳趾長度</th> <th>最寬的腳印寬度</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>水獭</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>田鴉</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>犛犛</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>巖濱鴉</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	動物	最小的腳趾長度	最寬的腳印寬度	水獭			田鴉			犛犛			巖濱鴉			<p>* (有效原型原則 Effective Prototype)</p>
動物	最小的腳趾長度	最寬的腳印寬度															
水獭																	
田鴉																	
犛犛																	
巖濱鴉																	

	<p style="text-align: center;">思考一下?</p> <p>❖經過剛剛這些量測腳印的活動中，你的收穫是什麼？</p> 	<p>* (有效原型原則 Effective Prototype)</p>
--	--	---

【陳述問題】學生具備量測腳印大小的技能概念與了解腳印與體型的關係後，在陳述問題裡便可以利用這樣的技能和概念，藉由小組合作不斷探索解決問題的方案，希冀獲得解決問題的工具或方法。每一小組先透過拓印自己的腳印形狀，並利用透明方格板計算出自己腳印的面積大小，再來應用腳印大小與體型的關係，經由同儕討論，必要時教師提供引導，學生發現身高和體型、體重和體型存在著倍數關係，這個倍數關係就是所謂解決問題的工具或方法，亦即建模活動裡的模式 (model)。也就是說，學生透過建模活動在建構一個解決真實問題的模式 (modeling a model in modeling activities) (Lesh & Doerr, 2003)。

對應九年一貫能力指標	活動內容	設計原則
<p>5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決日常生活中的問題。</p> <p>5-n-09 能用直式處理乘數是小數乘以小數的計算，並解決日常生活中的問題。</p> <p>C-E-02 能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。</p> <p>C-R-01 能察覺生活中與數學相關的</p>	<p style="text-align: center;">陳述問題</p> <p>❖校園裡的神秘人士？</p> <p>❖建國國小的校園中種了許多櫻花樹，每到櫻花季節來臨時，恣意綻放的櫻花總是將校園點綴得美不勝收。可是，去年在一次颱風的肆虐下，許多種植不久的櫻花樹被吹倒了，等到天氣放晴之後，櫻花樹卻已經死了好多棵，正當全校師生一片惋惜之際，有一個神秘的善心人士在某一天的傍晚，將死去的櫻花樹全都換成新的櫻花樹苗。爲了想找出這個神秘的善心人士，學校詢問了當天的警衛伯伯，警衛伯伯表示，除了老師、家長以及課輔班的學生以外，沒有其他人進入校園，經由警衛伯伯檢視櫻花園中，只留下了神秘善心人士的足印，爲了能找出這位善心人士，小朋友你可以藉由僅剩的線索...腳印，扮演起名偵探柯南的角色幫忙估計這位善心人士的體型(身高、體重...)，將會有助於我們找出這個人。</p>  	<p>* (模式建構原則 Model-Construction) * (模式文件化原則 Model-Documentation)</p>

<p>情境。</p> <p>(代數)</p> <p>5-a-03 能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解。能透過具體情境，解決用未知數符號列出之單步驟算式填充題，並嘗試發展策略及驗算其解。</p> <p>(統計)</p> <p>D-1-01 能將資料做分類與整理，並說明其理由。</p>	<p style="text-align: center;">陳述問題</p> <p>❖ 現在的線索只剩下腳印，要如何利用這個線索，找出此神秘的善心人士？你們小組的任務是</p> <p>(1) 想辦法討論並找出你們小組每個人自己腳印大小和體型(身高、體重)的關係，然後製造出一個“如何計算”的工具(公式或方法)；</p> <p>(2) 一個能夠逐步發現的這位神秘人士的解決步驟；</p> <p>(3) 藉由這個神秘的善心人士遺留下來的腳印大小，或許可以利用你們的工具來計算出這個人的體型(身高、體重...)？</p> <p>你們所設計出來的工具應該能夠運用於解決這個關於腳印的問題，當然我們也希望它能運用於解決其他腳印的問題。</p> <p style="text-align: right;">15</p>	<p>* (模式建構原則 Model-Construction)</p> <p>* (模式文件化原則 Model-Documentation)</p>
<p>1-d-01 能對生活中的事件或活動做初步的分類與紀錄。</p>	<p style="text-align: center;">破案工具</p> <p>❖ 每組可利用的資源有：</p> <p>(1) 全班身高體重表</p> <p>(2) A4紙張若干張</p> <p>(3) 粉筆</p> <p>(4) 直尺(30公分)</p> <p>(5) 透明小格板(每格1平方公分)</p> <p>(6) 學習單</p> <p style="text-align: right;">16</p>	<p>* (有效原型原則 Effective Prototype)</p>
<p>◎溝通</p> <p>C-C-06 能用一般語言及數學語言說明解題的過程。</p> <p>C-C-07 能用回應情境、設想特例、估計或不同角度等方式說明或反駁解答的合理性。</p> <p>C-C-09 能回應情境共同決定數學模型中的一些待定參數。</p> <p>◎評析</p> <p>C-E-01 能用解題的結果闡釋原來的情境問題。</p> <p>C-E-02 能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。</p> <p>C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。</p>	 <p>你們是如何憑藉腳印大小估算出神秘的善心人士的體型(身高、體重...)，請將解決過程按上述步驟詳細寫下來？</p> <p>【解決過程與結果】</p> <p style="text-align: right;">17</p>	<p>* (自我評量原則 Self-Assessment)</p> <p>* (建構分享及再使用性原則 Construct Share-Ability and Re-Usability)</p>

在最後在教師的引導下，學生經由分享解決方案的過程，分享彼此的解決模式，根據他組的報告與分享，讓自己小組解題的模式有修正的機會，並使解決問題的模式更加精緻完美。值得一提的是，整個建模活動過程裡，在佈題方面教學者並未主動提供任何數據，所有數據乃是透過學生在問題情境中因應解題需求而自然產生的。另一方面，從問題情境促使學生解題的活動讓學生不再覺得數學只是一連串的數字計算過程，而是可以依其解題的需求善用既有的數學經驗與技能成功地解決生活裡的真實問題。

四、學習評量與教學評鑑的設計與規劃

教學活動透過針對各階段所設計之工作單與任務報告單進行小組及全班的討論與發表，並實施學習評量，用以檢視學生是否達成學習目標。另外，在教師教學評鑑方面也以數學課室觀察紀錄表進行教學與學習的質性描述。以下就各項評量方式及目的略述之：

- (一) 預備活動之工作單：藉由量測各種動物腳印的長度、寬度，評量學生對使用尺規工具的技能，以及透過腳印大小與腳印深淺推測與體型之間的關係。
- (二) 陳述問題之工作單：透過學生對自己腳印面積的量測、估算、計算以及尋求腳印大小與身高、體重的倍數關係，並瞭解學生對於乘法直式處理小數乘以整數的計算以及商數為兩位小數的除法、使用四捨五入的方法，對小數在指定位數取概數，並做加、減、乘、除之估算學習掌握的程度。
- (三) 學生任務報告單：提供學生回顧與省思解題方案和解題過程的機會，並讓學生有機會評析他組的解題方案，以增益或修改自己小組解題方案。
- (四) 數學課室觀察紀錄：評估學生於建模活動過程中關於數學概念、資料組織和問題的可能發展、各種的註解、小組間的互動、工具、評量與驗證循環等面向的評估紀錄，以作為了解學生解題表現和教師教學改進之依據。

參、建模活動的實施

一、學生解題過分析

剛升上五年級的學生與本活動有關的先備數學概念包括：兩位小數的加減概念，萬以內

的乘法除法、倍數關係（整數倍）。本活動的教學重點在於透過建模活動裡的陳述活動，使得學生為了因應問題需求進而找出神秘人士的身高體重，利用既有的兩位小數的加減概念以及三位數的直式除法，成功解決兩位小數的除法問題。

【5-n-10 能用四捨五入的方法，對小數在指定位數取概數，並做加、減、乘、除之估算】：

對於這個能力指標的達成，以第五組的同學為例，其中一位戴同學為了找出神秘人士的體型，包括身高和體重，先利用透明方格板量測自己的面積大小後，計算出是 174 平方公分。然後採用直式除法將自己腳印面積的 174 平方公分除以自己身高 147 公分，找出腳印面積與身高的倍數是 1.15。圖中另一個 1.11 是另一位詹同學的腳印面積與身高的倍數（如照片一）。接著戴同學用相同的方法找出自己腳印面積與體重的倍數，所獲得的結果是 3.5 倍（如照片二）。上述為學生能利用四捨五入的方法，對小數在指定位數取概數，並做加、減、乘、除之估算的一個實際例證。

$$\begin{array}{r} 1.15 \\ 147 \overline{) 174.0} \\ \underline{147} \\ 270 \\ \underline{147} \\ 830 \\ \underline{735} \\ 950 \\ \underline{855} \\ 95 \end{array}$$

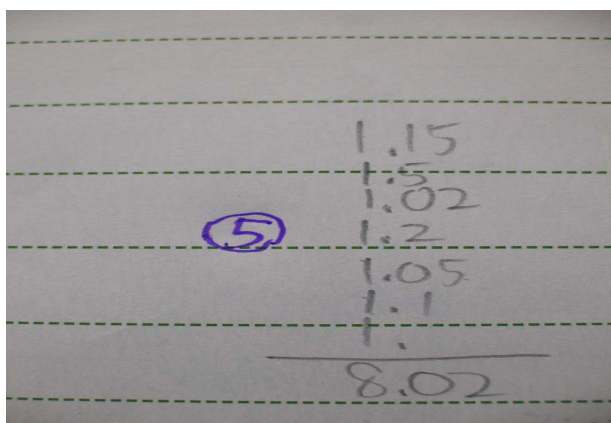
(照片一)

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ 42 \overline{) 147.0} \\ \underline{126} \\ 210 \\ \underline{210} \\ 0 \end{array}$$

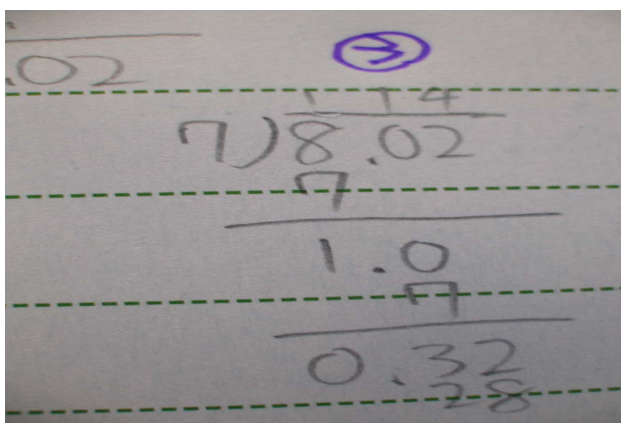
(照片二)

【5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決日常生活中的問題】：

對於這個能力指標的達成，同樣以第五組的同學為例，第五組同學們討論出先找出每個人腳印面積和身高的倍數關係，以及腳印面積和體重的倍數關係作為解決問題的模式。也就是小組的成員同樣採用上述戴同學的方法，計算出自己腳印面積和身高的倍數，以及腳印面積和體重的倍數。根據該小組表示，一個人的腳印面積和身高的倍數關係，以及腳印面積和體重的倍數關係不能代表所有人的倍數關係，必須取得這些倍數的平均值才可以，於是戴同學進行兩位小數的加法計算得到 8.02 的結果（如照片三）。接著將 8.02 除以 7 取得腳印面積和身高倍數的平均值（如照片四）。

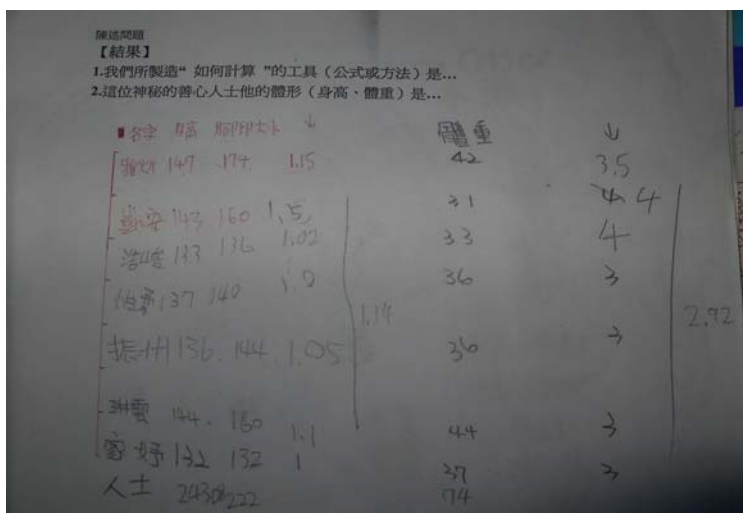


(照片三)



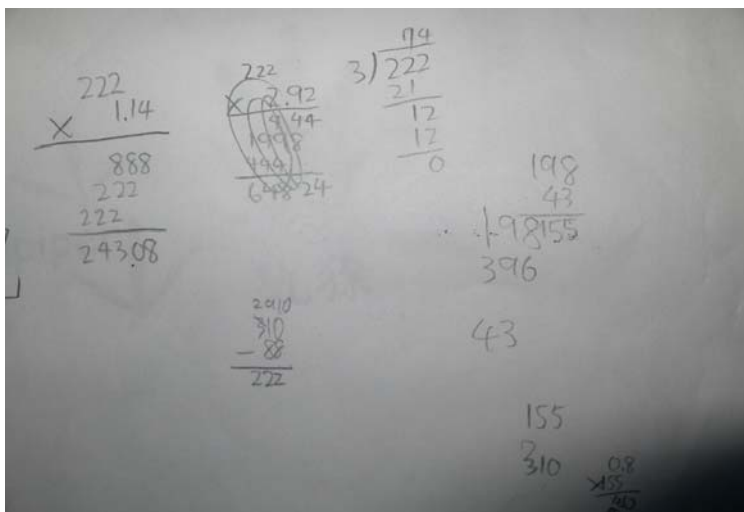
(照片四)

此外，在「連結」的數學能力指標達成的方面，像是連結能力中的察覺（C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境、C-R-03 能了解其他領域中所用到的數學知識與方法）、轉化（C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出、C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出、C-T-03 能把情境中與數學相關的資料資訊化、C-T-04 能把待解的問題轉化成數學的問題）和解題（C-S-01 能分解複雜的問題為一系列的子題、C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵、C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等）等。從學生初步形成解決問題的想法，接著加強解決問題的相關技能，最後經由思考和討論，建構解決問題模式的歷程，這些連結能力可以在下面學生的解題中得到例證。



照片五：第五組同學能察覺生活中與數學相關的情境，把情境中與問題相關的數、量、形析出並把情境中數、量、形之關係以數學語言表出，同時也能把待解的問題轉化成數學的問題。照片中所呈現的是小組已經能從問題情境中抽離出數學資料與訊息，將問題轉化成數學問題，並整理出小組每個人腳印大小與身高的關係，進而算出平均數作為解決問題的工具

或方法。



照片六：在解題方面同學能分解複雜的問題為一系列的子題，並能選擇使用合適的數學表徵，最後在解題的歷程中能展現蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證等數學能力，像照片中即是第五組利用所歸納的解題方法，嘗試反推推算神秘人士的身高體重)

從上述的學生解題過程分析我們不難發現，學生在數學建模的過程中，透過引模、探模和修模等歷程，不僅達成九年一貫數學領域相關的能力指標，同時也促進其建構問題解決的能力。這樣的問題解決能力也是九年一貫基本理念裡所重視的數學能力之一。所謂「數學能力」，是指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。在學習數學時，一般重視的是觀念和演算，但學生的數學經驗（或數學感覺）的培養卻是同等重要（教育部，94）。在九年一貫數學課程理念說明中對於學生所要發展的能力主軸，除了數學知識外，其他演算能力、抽象能力及推論能力的培養亦是整個數學教育的主軸。這三者是連貫而非獨立分開的，也是培養學生數學能力的三個具體面向（教育部，94）。本建模活動的實施，除了是對九年一貫基本理念的認同外，也希望設計並實施數學建模活動作為落實九年一貫基本理念的具體行動。

二、課室觀察

為了能更清楚本建模教學活動在教與學等各個面向的問題，以求有改進與精緻教學活動的機會，特別商請學有專精的教師進行課室觀察。本課室觀察紀錄由一位任職 13 年的教師協助執行，該名教師已取得數學教育碩士 6 年，平常亦關注於自己數學教學的實施與改進。以下為觀察三節課後，在綜合各組的觀察紀錄所做成的結果。課室觀察的重點將依使用的數學

概念、資料組織 & 問題的可能發展、各種的註解、小組間的互動、工具、評量與驗證循環等面向逐項說明（建模活動課室觀察單如附件）。

【使用的數學概念】

在活動中，學生究竟用了哪些數學的概念和技術來解決問題？根據課室觀察紀錄顯示，學生所使用的數學概念包括：

- 1、三位數除以三位數，商數為兩位小數級一位小數。
- 2、在計算所拓印腳印的面積時，會使用小數乘以整數。
- 3、學生會利用方格板估算腳印面積大小。
- 4、透過討論與溝通，察覺腳印面積大小與身高、體重相關。
- 5、利用直尺測量腳印的長度、寬度以及面積。

【資料組織 & 問題的可能發展】

教學活動進行中，學生如何組織問題中的資料？學生如何解釋任務？又他們提出了什麼可能的發展？在文章閱讀活動中，透過問題的引導與討論，學生從自身的經驗以及討論之中，推論出動物腳印痕跡越深，其體重越重，同時體型也越大。另外，學生提出腳印面積與周長有關，因此想用繩子將周界長度找出，再將繩子變形為熟悉的正方形或長方形，以便於利用可以解決面積的方法。就此，可以發現學生對於形體的面積仍存有在長度不變情況下，即使形狀改變，其面積應該還是維持不變的迷思。

【各種的註解】

關於小組的功能或問題。

- 1、小組成員除組長外，其他人未分配工作，都只需完成自己的部分。
- 2、組長多為反應快的學生，當組長有進一步行動，其他組員多會隨之仿做。
- 3、若組長會觀照其他組員，則該組活動較熱絡；反之，則有人呆坐一旁。

【小組間的互動】

學生在小組裡面如何進行互動或者如何分享彼此的想法？

- 1、在拓印個人腳印時會彼此協助，其餘時間多以個人活動為主。
- 2、有人算出初步結果時，會與組員分享，激勵其他人也趕上進度，再試圖尋求

彼此之間的異同。

【工具】

學生使用了什麼工具？他們如何使用這些工具？

1、使用直尺—測量腳印的長度、寬度。學生雖然能夠輕易使用直尺量測腳印的長度、寬度，但也因此讓有些學生嘗試以求算長方形面積的方法來解決腳印的面積問題。即便這位同學用這樣的方法算出腳印面積，經由討論後發現使用這種方法求算的腳印面積和其他同學的面積數據相差太大，最後也改採下面利用方格板的方法，計算出自己腳印的大小。

2、利用方格板—套在自己腳印拓印圖上，計算腳印佔了幾個格子。

【評量與驗證循環】

學生如何質疑他們的解決問題的程序和他們的結果？他們如何證明他們的假設和結果？他們經歷過什麼樣的循環？

- 1、在學生提出說法時，通常是老師提出質疑，同儕間較少有疑問。
- 2、自己計算出的結果（倍數）與他人不同時，會產生疑問。
- 3、在計算出自己的身高、體重與腳印的倍數關係後，可推論出神秘人士的身高、體重。但組員彼此的倍數不相同時，學生們認為取出倍數的平均值即可解決。

值得一提的是，在教室觀察紀錄裡，當學生面對腳印面積求算的問題時，會使用不同的方式來計算面積。在這個例子中，學生們必須根據一個自己量測的腳印面積，利用一些工具或方法估算腳印大小，這正意味著學生需要用不同的策略來思考求算面積的問題。或許有些人認為這類問題對大多數五年級的學生而言是比較困難的，因為在他們的思考過程中，需要不斷的「轉彎」。然而，事實並非如此---「因為建模活動的空間很大，雖然學生在形式化、複雜化和抽象化上，有不同的程度，但幾乎所有學生都可以用不同方法實際的解決這個問題」。學生可以在小組討論和全班討論的場合，展現他們知道什麼和他們可以做什麼，從學生觀察紀錄的解法當中，也可顯示許多有關他們解題的程度、策略和思考等。

從上述學生的解題表現可以發現，活動中教師不需要有太多的提示與引導，理由是透過解法可以顯示學生是否對於面積概念和算出面積策略的理解。例如：第一組的一個學生在計

算面積上，總是以腳印的長寬來求算腳印的大小。在這個問題上，他經由和同學討論與分享後，發現自己無法使用同樣的策略來解決這樣的面積問題，因此需要嘗試以點數或拼湊方格的方式，去理解有關求算面積的解釋。

三、學習評量

在數學課程的改革中，有一項重要的轉變，那就是「從學生僅給予單一答案到學生也要提供他們得到答案的過程」。為了評量學生的理解並能夠察覺到學生在這段時間中理解的增長程度，學習評量成為了一項重要的工具。如同 Shafer 和 Romberg (1999) 所指出的：評量方案應該善用教師在教學期間，透過非正式評量方法所蒐集到的資訊，而非僅依靠學生在評量或測驗上的書寫答案 (written responses) 來進行評量。許多的研究顯示：改善後的教室評量往往能提升 (學生的成就) 水準 (Black and William, 1998)。為了要真正地提升水準，教師必須頻繁的提供一些個別學生實施後，可以改善其表現的評量回饋和建議。當然，這些回饋也唯有在學生的答案足以提供回饋的情況下，才可以提供。這正意味著：「答案」的組成應較「一個數字」或「一個對錯的陳述」更為豐富才行。也唯有在一個答案可以顯示某些推理、思考或策略的情況下，才能提供回饋進而幫助學生學習。

基於這樣的評量理念，在評量學生學習情形方面，如前所述，以個別的活動單讓學生在學習活動中實作，教學者可以藉此瞭解學生的學習過程。另外，在建模活動中以不同的評量形式，像是讓全班討論、小組討論和學生上台發表等方式，即時檢視學生數學概念之正確性。還有藉由學生任務報告單的寫作，延伸數學課堂中的學習，透過報告單促成其回顧與省思的機會。實施這些評量後，從學生的課室互動歷程、活動單與學生任務報告單的寫作表現中發現，學生確實能透過這些不同的評量方式，達成預定學習目標，並能獲得數學概念—包括數與量的概念：能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決日常生活中的問題、能用直式處理乘數是小數乘以小數的計算，並解決日常生活中的問題、能用四捨五入的方法，對小數在指定位數取概數，並做加、減、乘、除之估算。以及代數概念：能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解。能透過具體情境，解決用未知數符號列出之單步驟算式填充題，並嘗試發展策略及驗算其解等。

特別是，在學生任務報告單的寫作方面，學生對於自己組別如何獲得解決問題方案的過

程有著詳細的描述。學生任務報告單所提供的不僅可以促成小組解題的省思，也可從評析並比較其他組別的過程中，增益或改進自己解題方案的機會。而這些不是傳統數學評量所呈現的「一個數字」或「一個對錯的陳述」可以比擬的。在學生任務報告單裡可以看見學生對整個解題的想法，這些想法包含了對數學的推理、思考與策略，有了這些教學回饋，教師則可進行教學省思與改進，並能據此協助學生增益其數學學習。

肆、結論

九年一貫數學領域教學總體目標指出，數學教學要能夠（1）培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；（2）學習應用問題的解題方法；（3）奠定下一階段的數學基礎。（4）培養欣賞數學的態度及能力等（教育部，2003）。而數學可以視為是依存於情境的概念和型與規律，數學學習的過程，則可視為是數學化過程(Mason, Burton, & Stacey, 1984)，其目的在培養學生面對問題時，會使用已習得的知識與技能去面對挑戰。Kilpatrick, Swafford, 和 Findell (2001)將其稱之為數學素養(mathematical proficiency)，透過編織成一條繩索的各股(intertwined strands)作為類比來詮釋其內涵包括了五項主要的的能力：(1)概念理解(conceptual understanding)；(2)程序流暢(procedural fluency)；(3)策略能力(strategic competence)；(4)合宜推理(adaptive reasoning)；與(5)建設性傾向(productive disposition)。其中概念理解是指對數學概念、運算和關係的瞭解；程序流暢是指能有彈性地、準確地、有效率地、合適地執行過程性技能；策略能力是指能夠形成表徵和解決數學問題；合宜推理是指能夠邏輯思考、反思、解釋與驗證的能力；建設性傾向則是指將數學視為有理、有用且有價值的學問以及相信自己有能力且願意努力(Kilpatrick, Swafford & Findell, op. cit., p.116)。本研究所提供的實徵資料顯示，學生在數學建模的過程中，透過引模、探模和修模等歷程，不僅達成九年一貫數學領域相關的能力指標，對於數學素養所強調的五股數學能力，也能有均衡的發展，同時也促進其建構問題解決的能力。這樣的問題解決能力也是九年一貫基本理念裡所重視的數學能力之一。所謂「數學能力」，是指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。在學習數學時，一般重視的是觀念和演算，但學生的數學經驗和數學感覺的培養也是同等重要的（教育部，2003）。在九年一貫數學課程理念說明中對於學生所要發展的能力主軸，除了數學知識

外，其他演算能力、抽象能力及推論能力的培養亦是整個數學教育的主軸。這三者是連貫而非獨立分開的，也是培養學生數學能力的三個具體面向（教育部，op. cit.），這樣的主張與 Kilpatrick, Swafford, 和 Findell 所提出的數學素養中交織的五股能力不謀而合。本建模活動的實施，或許並未像傳統講述式教學特別強調對演算能力的訓練，但對於如何活用數學知識，並結合抽象與推理能力來解決生活化的數學問題，確實提供了一套有效可行，且有實徵證據的教學模式。

伍、參考文獻

- 林麗美、尤詩憶、張靜馨（2006）。建模教學活動學生解題類型之探討——以七年級一次函數單元為例。第22屆科學教育研討會。台北：國立台灣師範大學。
- 周玉秀（2006）。從 PISA 看數學素養與中小學數學教育。科學教育月刊，293，2-21。
- 教育部（2003）。九年一貫課程數學領域綱要。台北：教育部。
- Black, P., & William, D. (1998). Inside the black box. Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, Vol.80 (2) pp.139-148.
- Diefes-Dux, H. A., Moore, T., Zawojewski, J., Imbrie, P.K., & Follman, D. (2004). A framework for open-ended engineering problem: modeling-eliciting activities. Paper presented in *Frontiers in Education Conference*, Savannah, GA., 2004.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. American, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Mason, J., Burton L., & Stacey K. (1984). *Thinking mathematically*. London: Addison Wesley.

Shafer, M., & Romberg, T. (1999). Assessment in classrooms that promote understanding. In E. Fennema, E. and T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. (pp.159-184) Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

閱讀文章部分活動資料來源

<http://big5.southcn.com/gate/big5/www.southcn.com/news/community/shzt/shennong/200206172639.htm>

活動報馬仔

一、 2011/02/19(六)~2011/02/20(日)

2011 資訊科技融入教學與教師專業發展國際學術研討會

地點：國立新竹教育大學 推廣大樓講堂乙

參考網址：

<http://gimse.web.nhcue.edu.tw/front/bin/ptdetail.phtml?Part=1000107-1&PreView=1>

二、 2011/04/08(五)~2011/04/10(日)

2011 Conference on Creative Education

地點：中國武漢

參考網址：<http://www.creativedu.org/2011/Home.aspx>

三、 2011/04/30(六)~2011/05/01(日)

2011 年第三屆科技與數學教育學術研討會

地點：國立臺中教育大學

參考網址：<http://mathed.ntcu.edu.tw/TME2011/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（keywords），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw