ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第26期

台灣數學教育學會

2011年06月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2011 年 06 月出版
NO.26 2011

發行人： 林福來教授

出版者：台灣數學教育學會
地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212
電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw
網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw
地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
國立嘉義大學數學教育研究所
電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：
1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 26 期

2011 年 06 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 26 期　　　　　　　　　　2011 年 06 月

ISSN 1815-6355

以真實數學教育觀點談設計數學史融入課室之解題活動經驗分享

顏富明[1]　張靜嚳[2*]

[1]彰化縣立員林國中(退休)

[1,2]國立彰化師範大學科學教育研究所

摘要

本文以真實數學教育的觀點，描述數學史融入課室教學解題活動之設計發展與實施。綜合本研究之發現，可獲致以下四點結論：1.依真實數學教育重新發明數學之原則，可以發現解題情境脈絡之設計，對於促進學生的解題活動而言是非常重要的。2.解題活動中問題的鋪陳，除了由易而難之外，更重要的是要考量如何在解題活動中促進學生進行水平數學化與垂直數學化。3.將數學史融入解題活動的作法，可引用數學史融入課室教學的架構圖進行設計，並對原始文獻及二手資料進行裁剪及重新組織，且要整合其中的一些數學問題解決的關鍵性想法，以激發學生高階數學思維的產生。4.要促進解題活動的進行，可引用數學探究過程模型進行規劃，本研究針對學習單所規劃的數學探究活動可分成以下四個階段：(1)觀察與操作，(2)猜測，(3)證實，(4)應用與擴展。

關鍵詞：真實數學教育、數學史、數學探究、問題解決、數學化

通訊作者：張靜嚳　ckuchang@gmail.com

壹、前言

關於數學、文化與數學史，洪萬生 (1990) 認為若數學教材缺乏文化內涵，而且與我們的生活環境毫不相干，則可能會導致數學變得艱澀而難以接近。其次，怎樣在數學教材中加入文化內涵呢？他認為應該適當地強調數學與文化的互動關係，並舉證說明數學理論根本就是整個文化背景的產物。他並且提到，事實上，數學史的結論始終宣示：哪一種文化背景孕育哪一種數學理論，雖不一定是必然的，但卻常常是關鍵性的。

關於將數學史統整入數學教育中的重要性，Farmaki 和 Paschos (2007) 指出，許多研究學者與教育學者認為數學史在教學與學習方面能扮演一個很重要的角色，他們指出，歷史幫助學生了解數學不是一種既成且不變的知識系統，而是與科學的其他分支緊密連結且是正在進行的一種進程。再者， 由 Fauvel 和 Maanen (2000)的研究顯示，數學史在探索數學想法的形成及課室活動的設計方面，可能是一種有效的工具。

對於真實數學教育(Realistic Mathematics Education, RME)的脈絡問題或真實世界的問題，Lange (1996) 指出，推動以整合這類的問題進入教學活動中，是基於四個理由：(1)增進數學的學習；(2) 增強具有競爭力的公民；(3)加強一般的問題解決能力與態度；(4)在超越數學領域或日常生活中的問題解決中，增進在數學應用方面的實用性。此外，Van Putten、Van den Brom-Snijders 和 Beishuizen (2005) 指出，其研究的結果，能支持 RME 研究取徑中的逐步數學化的有效性，而且 RME 研究取徑的價值與效能，可從較年輕的學生擴展至年紀較成熟的學生。特別地，Gravemeijer (1994) 基於 RME 的重新發明原則，主張數學史是可以被用於課程中教學活動設計靈感的來源。

為呼應洪萬生(1990)和 Farmaki 和 Paschos (2007)的觀點，並回應 Gravemeijer (1994)的主張，研究者以真實數學教育觀點來談數學史融入課室解題活動的設計，並分享研究者的經驗。

貳、理論基礎

研究者是以真實數學教育的觀點，談數學史融入課室解題活動設計，因此，設計的理論基礎主要是聚焦於真實數學教育、數學史融入課室教學及數學探究。

一、真實數學教育

關於真實數學教育中具脈絡的問題的重要性，Gravemeijer 與 Doorman (1999) 指出，具脈絡的問題在 RME 中扮演了核心的角色。所謂真實問題，其定義是問題的情境在經驗上對於學生而言是真實的。在此定義下，純數學問題也可能成為具脈絡的問題。因此，假如所關聯的數學提供了脈絡，那就可以說，在經驗上對於學生而言是真實的。此外，Yang（2006）指出，藉由「過程導向教學模式」運用在其教學研究中，並將真實生活情境問題融入教學活動中，發現當學生能應用和連結真實生活情境中的數學概念時，他們便能理解數學的重要性和實用性。黃國勳和劉祥通 (2006) 指出，真實情境的活動可以激發學生主動學習，學童在此情境中產生了頻繁且良好的互動，也一起思考和探究，因為此情境所引發的種種問題，都使學童的學習與思考邁向更深層、更寬廣的境地。

為啟發教學設計，Gravemeijer (1994) 提出 RME 理論的三個重要原則：(1) 引導重新發明 (Guided Reinvention) 與逐步數學化 (Progressive Mathematizing)，(2) 教導現象學 (Didactical Phenomenology) (Freudenthal, 1983)，(3) 自我發展模型 (Self-Developed Models)。

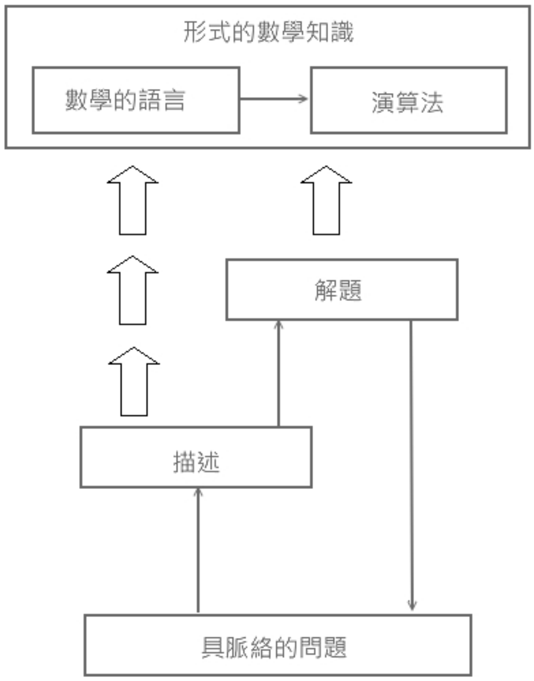


圖 1. 重新發明 (Gravemeijer, 1994)

首先，關於引導重新發明（如圖 1 ）與逐步數學化，根據重新發明的原則，Gravemeijer (1994) 認為應給予學生機會去經歷一種類似於數學被發明的過程，他引用 Treffers (1987) 的觀點指出，將具脈絡的問題數學化的過程，就稱為水平數學化，即圖 1 中的細箭頭；而其中的粗箭頭代表垂直數學化。Freudenthal (1991) 指出，水平數學化是由生活世界到符號世界所引出，而符號被機械地、理解地、反思地予以形塑、再形塑及操作，就是所謂的垂直數學化，而數學語言或解題程序經過逐漸演變、濃縮與形式化後，真正的演算法可因此而成形。

其次，關於教導現象學，Gravemeijer (1994)指出，根據此原則，他強調對於所給的數學主題的情境會被用來探究，是基於兩個理由，其一，會顯示出各種應用的類型，而這些應用是如教學上所預期的；其二，對於逐步數學化的過程帶來各種重大的影響方面，考量它的合適性。他並從數學史的觀點指出，假如我們如歷史般的觀察數學，看它從解決實際問題逐漸的演變，那麼在目前的各種應用上，對於從這種逐漸演變的過程中發現更多問題的期盼，會是合理的。

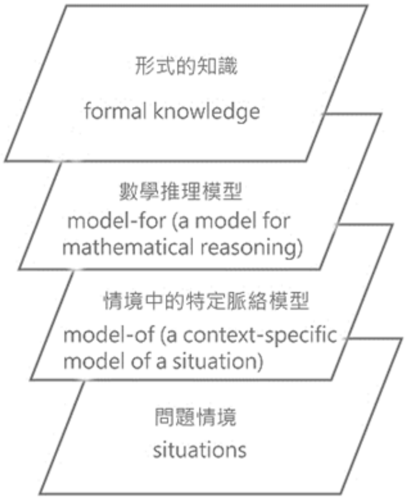


圖 2. 自我發展模型
(Gravemeijer, 1994)

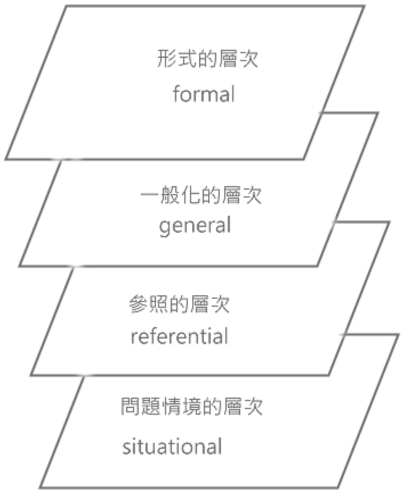


圖 3. 自我發展模型的層次
(Gravemeijer, 1994)

最後，關於自我發展模型（如圖 2），Gravemeijer (1994)指出，此模型是為非形式知識與形式數學間的缺口，扮演搭橋的角色，雖然在訊息處理研究取徑的觀點上，操作物如同預先存在的模型被展現出來，但是在 RME 的模型卻是由學生他們自己發展出來的。這意謂學生是在解題中發展模型。他強調所謂模型，它是涉及一種模型的情境、一個圖解、一段描述、或一種特別提到的方法。其次，他提到，這裡的模型是指學生所熟悉的情境的模型（model-of situation），藉由一般化與形式化，最後模型變成一個單獨的實體，它就有可能被用來作為數學推理的模型（model-for mathematical reasoning），而這種由 model-of 到 model-for 的轉變，就類似於 Ernest (1991) 所謂的主觀數學知識起源理論的重新建構。再者，他指出自我發展模型的層次（如圖 3）可以用一般的術語區分為：(1)情境層次 (the level of the situation)，其中特定的領域、情境的知識及策略被用於情境（超越學校情境的一種情境）的脈絡中；(2)參照層次(a referential level)，其中參照情境所產生的模型與策略，是被用來簡化問題的（是指在課室中所提出的問題）；(3)一般化層次(a general level)，其中在策略上各種

數學的聚焦調控脈絡參照所產生的模型；(4)形式層次(the level of formal arithmetic)，其中解題者是以常規的程序與符號進行解題。

綜上所述，可理解具脈絡的問題在真實數學教育中的重要性，其次，從具脈絡問題的定義，可推知純數學問題要成為具脈絡的問題也是有可能的。最後，要以 RME 理論來設計與詮釋教學活動，RME 的這三個重要原則是不可或缺的。

二、數學史融入課室教學

對於數學文件的歷史及數學想法的歷史的重要性，Farmaki 和 Paschos (2007)指出，可藉由詮釋這些歷史資料的哲學反思，以確認及解釋教育的選擇，因此，他們認為：(1) 從哲學的觀點，數學可以看作人類的活動，不僅發生在個別文化，而且也對外在的任何特定文化採取立場； (2) 從文化的觀點，數學的演化源自許多跨越不同文化的貢獻的總和； (3) 從跨學科的觀點，學生發現透過數學史，可以豐富他們對數學及其他學科的了解。此外，Grugnetti 和 Rogers (2000) 強調，數學史能協助學生了解數學概念透過解題過程如何被發明、調整及擴充，且過程中對於許多問題產生的誤解、質疑、直覺論點、爭議及另類的方法，不僅是合法的，而且實際上是數學形成過程中的一種整合。

關於數學史與問題解決，Horng (2000)指出，藉由數學史對同一問題不同解法上的探討，可幫助優質的學生意識到，探索幾何實體本身的價值是值得的，繼而幫助他們欣賞數學的美，而這也是一種智力上的滿足，亦是所有數學教師所喜歡去分享的。同時，洪萬生(2000)再指出，這種同一問題不同解法的探討，透過數學史比較與分析所產生的歷史經驗，對於教師與學生是頗有參照作用的。此外，張靜嚳 (1995) 指出，以問題中心雙環教學模式教學，可以引起學生的學習興趣、提高學習成就與改善教室學習氣氛，並強調在此教學模式中，有關學生的解題活動，應融入數學史於解題任務的設計中

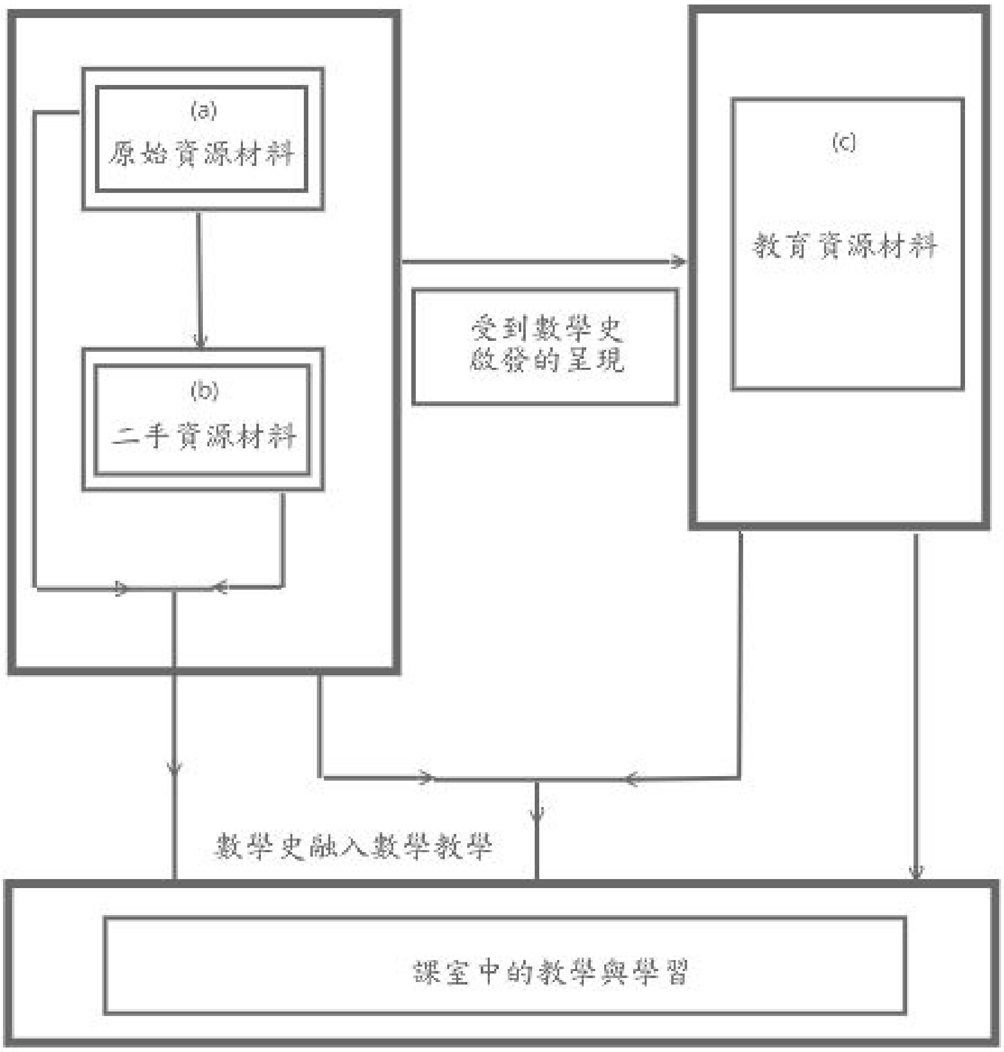


圖 4. 數學史融入課室教學的架構圖 (Tzanakis & Arcavi, 2000)

如何將數學史融入課室教學中，Tzanakis 與 Arcavi (2000) 指出，就數學史融入數學教育的方法而言，顯然是要包含參考原始材料的引用，而這些材料大致上可分為下列三種類別 （如圖 4 ）：(1) 原始資源材料（從原始的數學文件中節選）；(2) 二手資源材料（附有歷史敘說、詮釋或改寫的教科書）；(3) 教育資源材料。而圖 4 所描述參考材料的類別，其中的箭頭是指這些材料之間可能的互相關聯。其次，他們認為，數學史家基於他們的專業，大都對原始資源資料所提供的證據有興趣，且藉由撰寫二手材料以對數學知識的進步做出貢獻，而各層級的數學教師可能從原始資源材料及二手資源材料（可能佔較大部分）中獲益匪淺，但是，他（她）們更特別樂於看到第三種所謂的教育

資源材料。再者，關於教育資源材料，他們指出，是指其文獻主體是由原始資源材料及二手資源材料中提煉出來，且含有由數學史激發出的有關途徑（包括內容的說明、教程、練習等）的見解，他們並特別強調，對於這三種類別，教育資源材料似乎是數學公共領域中最欠缺的。因此，他們認為應鼓勵數學教師及數學教育工作者個別地或共同合作在這個類別上發展他們自己持有的材料，使其能在更廣的社群中能發揮作用。

基於上述，可理解融入數學史的解題活動要考量如何連結數學文件的歷史及數學想法的歷史。其次，藉由融入數學史於解題活動的歷史經驗中，可促進學生體驗數學探究的價值及欣賞數學之美。最後，在數學史融入數學的解題活動設計中，可聚焦於教育資源材料的開發。

三、數學探究

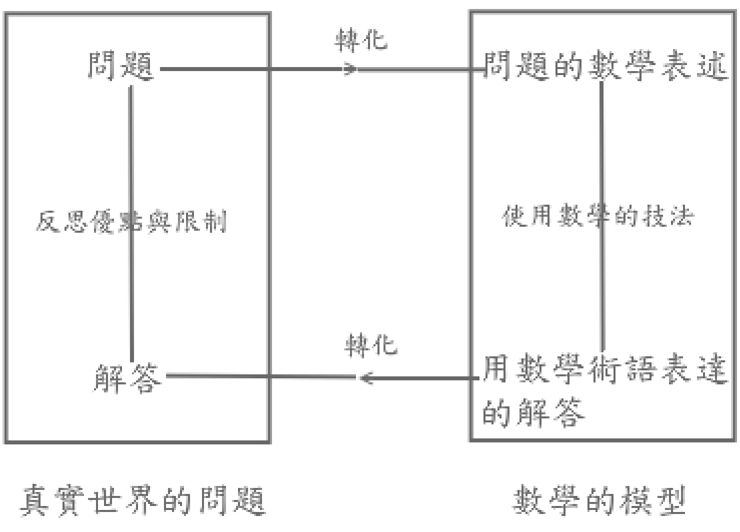


圖 5　數學探究過程的模型　(Wubbels、Korthagen & Broekman, 1997)

關於數學探究，Borasi 和 Siegel (1992) 修改了 Burke 和 Harste (1992)的探究環(inquiry cycle)版本，並列出探究環的九個階段：(1)開始階段；(2)發展與聚焦於個人要探究的問題；(3)確認合適的

探索問題的途徑、資源與工具； (4)執行探討；(5)與其他的探究者合作；(6)反思與擴展個人探究的結果；(7)與外界的觀眾溝通；(8)確認所發現的問題與安排策略說明；(9) 對新參與者提出邀請。其次，Wubbels、Korthagen 和 Broekman (1997) 提出數學探究過程的模型 (如圖 5)，其探究的步驟具有連續四階段循環的特徵：(1) 將真實世界的問題轉化為數學問題；(2)數學問題的分析與結構化；(3)創建數學的解答；(4)將此解答轉化回應真實世界的問題並反思此解答的優點與限制。此外，學生的解題表現中，為何能普遍使用論證方式解題?秦爾聰、林勇吉和陳俊源 (2009) 指出，可能是由於探究教學的問題較開放、非例行性、需要學生做判斷，且學生必須主動的思索問題，因此，猜測、邏輯推理與反證等論證技巧，就自然流露於解題過程中。基於上述，可理解於數學課室中使用數學探究的教學策略，有助於學生解題中展現其數學論證技巧。

參、解題活動設計

基於上述的理論基礎，研究者以 RME 的觀點，配合數學探究教學的理念，並以主題為「融入數學史的問題解決活動：以圓周角例」的學習單(如附件)，進行數學史融入解題活動設計的重點說明。此學習單的第一部分為探究導向的問題解決活動，共包含五個活動，依數學探究過程的模型 (Wubbels、Korthagen & Broekman,1997) 進行規劃，並分為四個階段：觀察與操作、猜測、證實、應用與擴展。第二部分為數學史文本的簡介。

一、學習單的使用說明

關於此學習單的使用說明，可分成下列四個重點：

1.此學習單適合探究導向的分組教學，透過學生分組討論中的共同觀察與操作、猜測、證實、應用與擴展，以進行問題解決活動，進而呈現成果，使學生逐漸地發現圓周角的性質，並進一步應用於解決極值問題，特別的是，此極值問題可能是數學史上的第一個極值問題。

2.此學習單適合 4 至 6 節的授課時間，且適用於國中三年級介紹圓周角的延伸補充教材。

3.教師可對各組任務分配，並對於各組討論與呈現進行分組評量。

4.此學習單包括五個活動，須依序進行，即第一個活動完成後，再發放第二個活動的活動單，依此類推，數學史文本請放在最後面才介紹。

二、探究導向的問題解決活動

(一)觀察與操作

在活動一中，其目的為構造一種有關圓周角的情境脈絡，其中六個圖形的設計，是為猜測做準備。從 RME 重新發明的觀點而言，此活動是引導學生透過討論，自行建構情境中的特定模型(model-of)，亦即為學生所完成的表格。因為這是一種將具脈絡的問題數學化的過程，所以，它是一種水平數學化。

(二)猜測

在活動二中，藉由活動一所產生的表格，引導學生針對此表格，猜測圓周角的度數與其所對弧的度數的關係，且依圓心位置，對活動一的六個圓周角進行分類。從 RME 重新發明的觀點而言，此活動是引導學生透過討論，自行建構情境中的特定模型(model-of)，亦即為學生所建構的圓周角的度數與其所對弧的度數的關係(或命題)及圓周角的類別。因為這是一種將具脈絡的問題數學化的過程，所以此亦為一種水平數學化。

(三)證實

在活動三中，藉由活動二所產生的圓周角的度數與其所對弧的度數的關係及圓周角的類別，引導學生依此關係與類別，進行三個有關「圓周角的度數等於所對弧的度數的二分之一」的論證。從 RME 重新發明的觀點而言，此活動是引導學生透過討論，自行建構數學推理模型(model-for)，亦即學生所證實「圓周角的度數等於所對弧的度數的二分之一」的關係(或命題)，由於此關係(或命題)

已經被證實，因此，它就變成一種性質。因為這是一種將符號機械地、理解地、反思地形塑及操作所產生的數學化的過程，所以此為一種垂直數學化。

在活動四中，藉由活動三所產生的性質「圓周角的度數等於所對弧的度數的二分之一」，引導學生依此性質，針對(1) 命題：在同圓中，對同弧的圓周角相等；(2) 命題：半圓內的圓周角等於 90 度；(3) 命題：對同弧的圓周角大於圓外角(或對同弧的圓周角小於圓內角)，進行論證。從 RME 重新發明的觀點而言，此活動是引導學生透過討論，自行建構數學推理模型(model-for)，亦即學生所證實「在同圓中，對同弧的圓周角相等」、「半圓內的圓周角等於 90 度」、「對同弧的圓周角大於圓外角(或對同弧的圓周角小於圓內角)」的命題，由於此命題已經被證實，因此，它就變成一種性質。因為這是一種將符號機械地、理解地、反思地形塑及操作所產生的數學化的過程，所以此亦為一種垂直數學化。

(四)應用與擴展

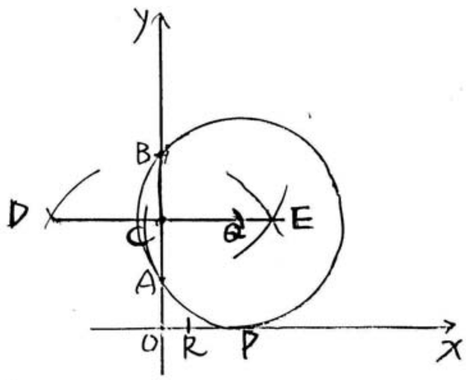
在活動五中，藉由活動三所產生的性質「圓周角的度數等於所對弧的度數的二分之一」，與活動四所產生的性質「在同圓中，對同弧的圓周角相等」、「半圓內的圓周角等於 90 度」、「對同弧的圓周角大於圓外角(或對同弧的圓周角小於圓內角)」，引導學生應用這些性質，針對雕像視角問題 (亨斯貝爾格，1970/凡異出版社譯，1987)進行問題解決。在此，為便於描述，針對雕像視角問題引用第一位研究者所教班級學生的解題原案(如圖 6，圖 7)，作為說明。

組別：第6組

(2)假定有一個塑像，高 h 公尺，立在一個高 s 公尺的底座上(如下圖)一個人注視著這個塑像朝它走去，這個人的水平視線離地 e 公尺 $(e<s)$ 問這個人站在離塑像基底多遠的地方，才能使塑像看上去最大(亦即視角最大)(此問題首先由數學家 Johann Muller 在1471年提出)

此問題可轉化如下列兩題：

1)如下圖，OY 上有 A，B 兩點，在 OX 上求作一點 P，使得 $\angle APB$ 有最大值. [$OA=s-e$, $AB=h$, OX 為水平視線]



作圖法：1. 作 $\overline{AB}$ 的中垂線

2. 以 $\overline{CO}$ 當半徑，A 為圓心畫弧交 $\overleftrightarrow{DE}$ 於 Q

3. 以 $\overline{CO}$ 當半徑，Q 為圓心畫圓切 $\overleftrightarrow{OX}$ 於 P

4. 則 P 點即為所求

證明：

1. 在 $\overleftrightarrow{OX}$ 上任取一點 R (不在 P 上)

2. ∵ P 為圓 Q 和 $\overleftrightarrow{OX}$ 的切點，∴ R 為圓外點，$\Rightarrow \angle ARB < \angle APB$

3. 由 2. $\Rightarrow$ 不存在一點 R 使 $\angle ARB > \angle APB$.

4. ∴ $\angle APB$ 為最大角

圖 6. 阿隆所呈現的解題投影片

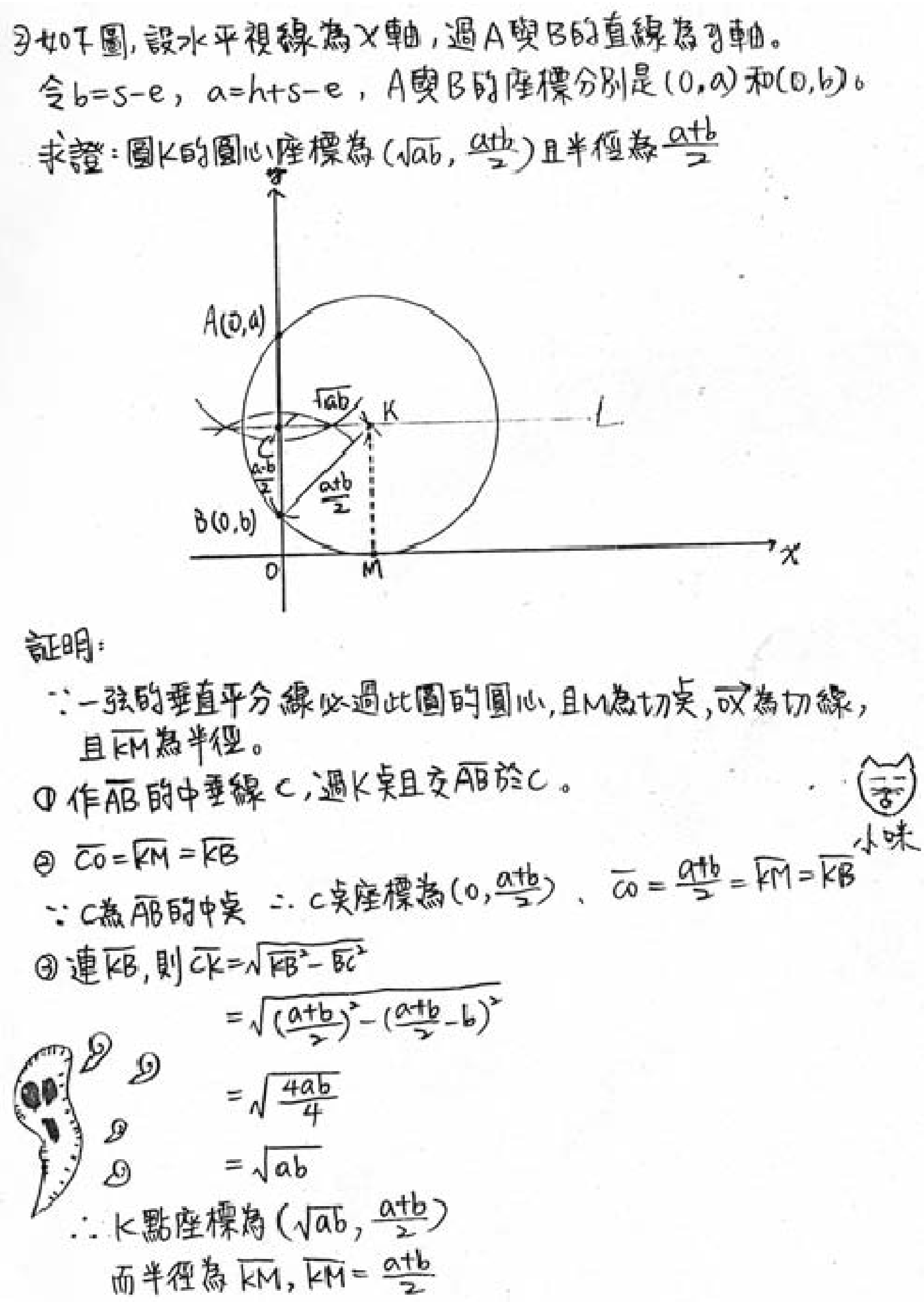


圖 7. 阿璇所呈現的解題投影片

從 RME 重新發明的觀點而言，此活動是引導學生透過討論，將上述的四個性質及個人的先備知識形成數學的語言，並透過合適的演算法將這些數學語言應用或擴展於問題解決中。因此，學生不僅解決了真實世界的問題，而且也建構了個人所擁有的形式的數學知識。此外，若以高階數學思維的觀點而言，從阿隆和阿璇的解題原案所呈現的幾何或座標一般化及論證的結果可以發現，他們

的數學思維都已達到一般化(generalizing)及綜合(synthesizing)的層級(Dreyfus, 1991)。

三、數學史文本的簡介

關於數學文本的內容，研究者根據《毛起來說三角》(毛爾，1998/胡守仁譯，2000)中的數學史文本，依其重點分成三個部分加以說明。1. 慕勒(Johann Müller)的生平與貢獻，是透過六個重點來加以描述：(1) 將三角學引進歐洲；(2) 慕勒又被稱做雷吉蒙塔努斯(Regiomontanus)；(3)第一位將數學及天文學書籍做商業用途的出版者；(4) 協助修訂儒略曆（Julian calendar）；(5) 最有影響力的作品《論各種三角形》；(6) 協助天文學家對宇宙產生新的視野。2.雷吉蒙塔努斯可能是數學史中的第一個提出極值問題者。3.雷吉蒙塔努斯為何會提出這個極值問題。

其次，由阿隆的解題原案(如圖 6)中的證明，可發現阿隆是使用性質「對同弧的圓周角大於圓外角」進行論證，而由雷吉蒙塔努斯問題的幾何解的證明(如附件中的圖 5)，所使用的性質是「對同弧的圓周角小於圓內角」，雖然殊途同歸，但是，當學生發現自己不僅可以解決此問題，而且自己所用的方法與數學史文本所介紹的方法有所不同時，那種感覺不只是讓學生覺得喜悅，而且也是一種智力上的滿足(Horng, 2000)。

關於數學史文本的介紹，研究者是引用的《毛起來說三角》(毛爾，1998/胡守仁譯，2000)(此雖為二手資源材料，但其內容含有數學史原始資源材料) 中的數學史文本，再配合問題解決活動的設計與情境脈絡，對此資料進行裁剪及重新組織，以產生學習單，而此學習單可能成為數學課室中的教學與學習的教育資源材料(Tzanakis & Arcavi, 2000)。其次，當學生從這介紹當中了解慕勒(Johann Müller)可能是數學史中第一個提出極值問題者，而此問題的提出可能與藝術或建築有關，並且從這當中也可認識到慕勒不僅在三角學，而且在天文學與曆法上亦有諸多貢獻，再結合先前他(她)們已完成的學習單的問題解決活動，其可能產生的效果，若從跨學科的觀點而言，這可能可以豐富他們對數學及其他學科的了解(Grugnetti & Rogers,2000)。

肆、結論與建議

關於數學史融入課室解題活動，研究者以 RME 重新發明理論的觀點，並引用數學史融入課室教學的架構圖(Tzanakis & Arcavi, 2000)及數學探究過程的模型 (Wubbels、Korthagen & Broekman, 1997)進行設計，所產生的學習單經過研究者使用於課室教學，其中所獲得的些許經驗，可統整說明如下列四個重點：

一、 依 RME 重新發明原則(Gravemeijer, 1994)，可發現如何設計解題的情境脈絡，對於促進學生的解題活動而言是非常重要的。

二、 在解題活動中問題的鋪陳，除了由易而難外，更重要的是要考量如何在解題活動中促進學生進行水平數學化與垂直數學化(Treffers, 1987)。

三、 將數學史融入解題活動的作法，可引用數學史融入課室教學的架構圖(Tzanakis & Arcavi, 2000)進行設計，並對原始文獻及二手資料進行裁剪及重新組織，且要整合其中的一些數學問題解決的關鍵性想法，以激發學生高階數學思維的產生。

四、 要促進解題活動的進行，可引用數學探究過程的模型(Wubbels、Korthagen & Broekman, 1997)進行規劃，譬如研究者針對學習單所規劃的數學探究活動可分為四個階段：1.觀察與操作，2.猜測，3.證實，4.應用與擴展。

綜合上述作法，或許可促進數學課室的問題解決活動，及激發學生的數學思維，並貼近在數學教學中融入數學史文化面向的觀點 (洪萬生, 1990; Farmaki & Paschos, 2007)，並回應將數學史用於教學活動設計的主張(Gravemeijer, 1994)。再者，為提升數學教師的教學品質，及基於數學史在教學與學習方面能扮演一個很重要的角色(Farmaki & Paschos, 2007)，因此，研究者認為數學史要融入的不僅僅限於「解題」活動，而是要融入於課室之「教學」活動中。此外，對學生來說，數學史可以清楚地告訴他們數學不是一下子就變成那個樣子的，相反的，歷史顯示一個科目的發展乃是匯集各方

面的成果點滴累積而成的，其中有一些重要的關鍵往往需要經歷幾十年，甚至幾百年的奮鬥才能解決，因此，透過數學史，教師至少可以向學生強調數學是如何的演化、如何的有用以及如何地擁有「文化內涵」(洪萬生，1984)，亦即教師可以透過數學史強調，很多性質或定理，往往是累積很多人的智慧及多年的時間，經過不斷地精緻成果，最後才能得到漂亮的結果。

其次，研究者基於上述觀點，對於如何以真實數學教育觀點，將數學史融入課室教學活動之作法，提出下列三點建議：

一、教科書的出版商可在教師手冊中，加入一些與單元主題相關的數學史資源材料提供給老師參考，並將此材料收錄於教學光碟中，以方便教師編撰使用。

二、為促進職前數學教師的專業發展，可仿照國外一些大學的作法，將數學史列為師培生的必修科目，例如 1. 澳洲的北方領土大學(Northern Territory University)就開了兩個學期的數學的文化起源(The Cultural Origins of Mahtematics)課程，以調整職前教師數學的世界觀(Isaacs, Ram, & Richards, 2000)；2. 以色列的 Oranim—School of Education of the Kibbutz Movement 開了數學史的某些時期(Some Chapters in the History of Mathematics)課程，以作為想取得國小數學教師資格的在職教師的必修科目(Winicki, 2000)。

三、要落實真實數學教育必須配合探究教學，但是在國內教育環境及制度下，如升學競爭、答案唯一評量才公平、教學進度要全年級一致、家長特別關心學生的成績等等，難免對於實施探究教學及落實真實的數學教育造成困難或阻礙。雖然探究教學在現實環境中不易推行，但是教師只要有意願，其實也不是不可行，目前存在的困難，就是因為學校大部分都用那種沒有脈絡背景的問題讓學生進行學習。所以，要改善此種情形，就是應當讓教師多使用一些有情境脈絡的問題，而且教師也需要繼續的進修，才能落實探究教學及真實的數學教育。因此，建議：1.在編輯教科書時，其單元的內容邏輯架構，可以參考 RME 理論的三個重要原則。2.在師培課程中，提供職前教師及在職教師的專業發展課程，以強化其進行探究教學及落實真實的數學教育的專業能力。

參考文獻

毛爾（Maor, E.）（2000）。*毛起來說三角*（Trigonometric Delights, 胡守仁譯）。台北：天下文化。出版社。（原作 1998 年出版）

亨斯貝爾格（Honsberger, R）（1987）。*數學中的智巧（*Ingenuity in Mathematics, 凡異出版社譯*）*。新竹市：凡異出版社。（原作 1970 年出版）

洪萬生（1984）。數學史與數學教育。*科學月刊，15*（5），371-375。

洪萬生（1990）。*從李約瑟出發：數學史、科學史文集*（一版二刷）。台北：九章出版社。

洪萬生（2000）。《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。*科學教育學刊，8*（3），215-224。

秦爾聰、林勇吉、陳俊源（2009）。探討高二學生在三角探究教學中的解題表現。*科學教育學刊，17*（5），433-458。

張靜嚳（1995）。問題中心教學在國中發展之經過、效果及可行性之探討。*科學教育學刊，3*（2），139-165。

黃國勳、劉祥通（2006）。一個情境認知取向教學活動的發展與實踐－以「因數大老二」為例。*科學教育學刊，14*（1），1-27。

Borasi, R., & Siegel, M. (1992, August). Reading, Writing, and Mathematics: Rethinking the “basics” and their Relationship. *Paper Presented at the 7th International Congress on Mathematics Education*, Quebec City, Canada.

Burke, C., & Harste, J. (1992, August). Teacher as Researcher: Classrooms that Support Teacher and Student Inquiry. *Workshop Presented at the third Annual International Whole Language Umbrella Conference*, Niagara Falls, NY.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Ed.), Advanced *Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire: The Falmer Press.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing Genetic 'moments' in the History of Mathematics in Classroom Activities. *Educ Stud Math*. 66, 83-106.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). Introduction. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: An ICMI study* (pp. xi-xviii). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revising Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*, CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Gravemeijer, K., & Doorman, D. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, Multicultural and Interdisciplinary Issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: An ICMI study* (pp. 39-62). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Horng, W.-S. (2000). Euclid versus Liu Hui: A Pedagogical Reflection. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An International Perspective* (pp. 37-48). Washington, DC.: Mathematics Association of America.

Isaacs, I., Ram, V. M., & Richards, A. (2000). A Historical Approach to Developing the Cultural Significance of Mathematics among First Year Preservice Primary School Teachers. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An International Perspective* (pp. 123-128). Washington, DC.: Mathematics Association of America.

Lange, J. de: (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In A. J. Bishop et al. (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49-97). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating History of Mathematics in the Classroom: An Analytic Survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: An ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Van Putten, C., van den Brom-Snijders, P., & Beishuizen, M. (2005). Progressive Mathematization of Long Division Strategies in Dutch Primary Schools. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36, 44-73.

Winicki, G. (2000). The Analysis of Regula Falsi as an Instance for professional Development of Elementary School Teachers. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An International Perspective* (pp. 129-133). Washington, DC.: Mathematics Association of America.

Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 1-28.

Yang, D. C. (2006). Developing number sense through real-life situations in school of Taiwan. *Teaching Children Mathematics*, 13(2), 104-110.

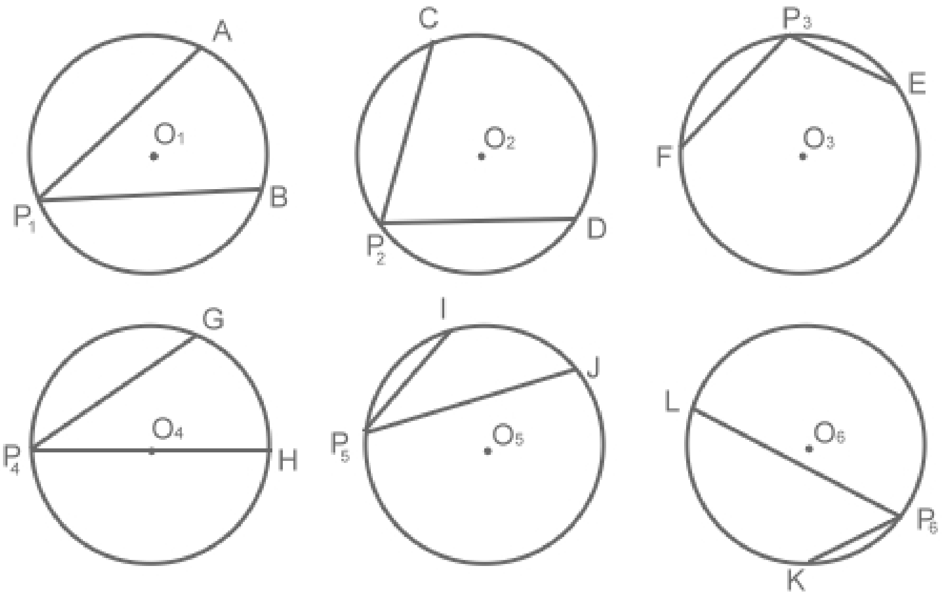
附件

學習單

融入數學史的問題解決活動：以圓周角為例

一、探究導向的問題解決活動

(一)活動一



用量角器測量上列六個等圓的圓周角及其所對的弧的度數,

請將所得的度數據填入下表中

圓周角 度數	$\angle AP_1B$	$\angle CP_2D$	$\angle EP_3F$	$\angle GP_4H$	$\angle IP_5J$	$\angle KP_6L$
所對的弧 度數	弧 AB	弧 CD	弧 EF	弧 GH	弧 IJ	弧 KL

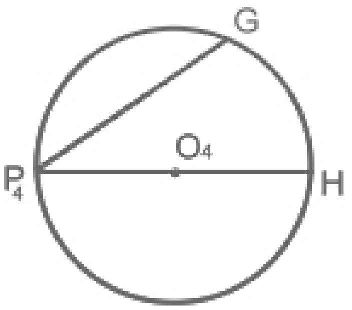
(二)活動二

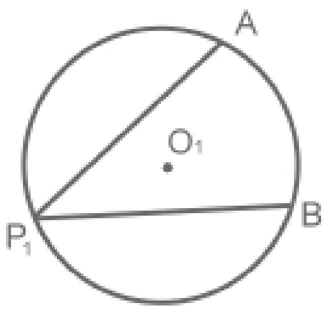
1.觀察活動一的表格,請猜測在同圓(或等圓)中, 圓周角的度數與其所對的弧的度數的關係, 並將小組的猜測填於下列空白處。

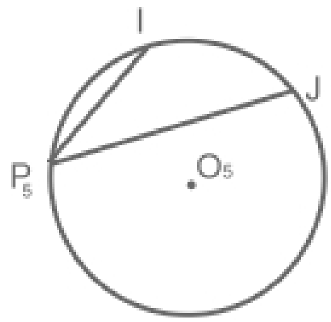
2.請各小組同學共同研究探討，在同圓(或等圓)中，所畫的所有圓周角中，若以圓心的位置加以分類，共可分成幾類？請將討論結果，用圖形表示於下列空白處。

(三)活動三

根據活動二之 1 的猜測：在同圓(或等圓)中，圓周角的度數等於對同弧的圓心角的度數的二分之一。依據活動二之 2 對圓周角與圓心的位置關係分類，得到三種類別，請依這三個類分別加以證明。





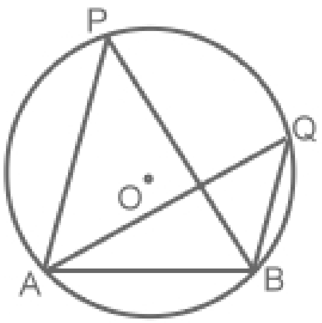


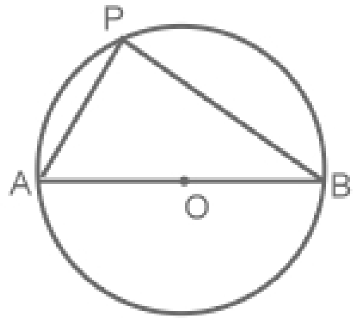
已知：圓 O_4，$\angle GP_4H$　　已知：圓 O_1，$\angle AP_1B$　　已知：圓 O_5，$\angle IP_5J$

求證：$\angle GP_4H=1/2$ 弧 GH　　求證：$\angle AP_1B=1/2$ 弧 AB　　求證：$\angle IP_5J=1/2$ 弧 IJ

(四)活動四

請根據活動三之結論，證明下列問題：





1.命題：在同圓中，對同弧的圓周角相等。

已知：如圖，AB 為圓 O 的弦，P、Q 為圓周上相異兩點

求證：∠APB＝∠AQB

證明：

2.命題：半圓內的圓周角等於 90 度

已知：弦 AB 為圓 O 的直徑，P 為圓上異於 A、B 之一點

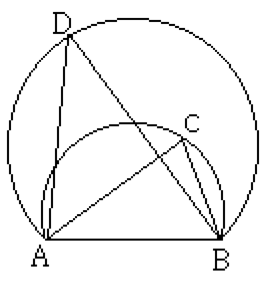
求證：∠APB＝90^0

證明：

3.如右圖，兩個圓有一公共弦 AB，∠ADB 是大圓的圓周角，∠ACB 是小圓的圓周角。

求證：∠ADB＜∠ACB

證明：



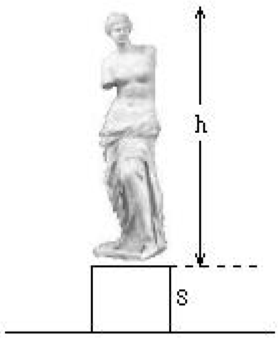
(五)活動五

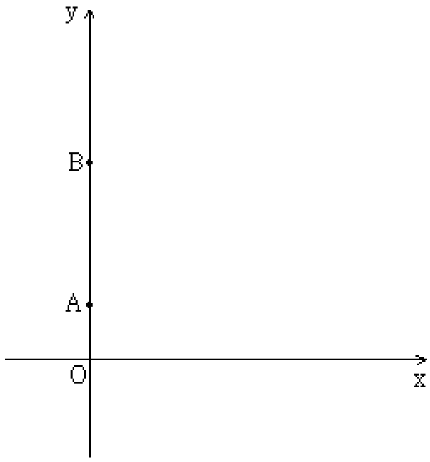
雕像視角問題：

假定有一個塑像，高 h 公尺，立在一個高 S 公尺的底座上(如下圖) 一個人注視著這個塑像朝它走去，這個人的水平視線離地 e 公尺(e＜S)問這個人站在離塑像基底多遠的地方，才能使塑像看上去最大(亦即視角最大)(此問題首先由數學家 Johann Müller 在 1471 年提出。)

此問題可轉化如下列兩題：

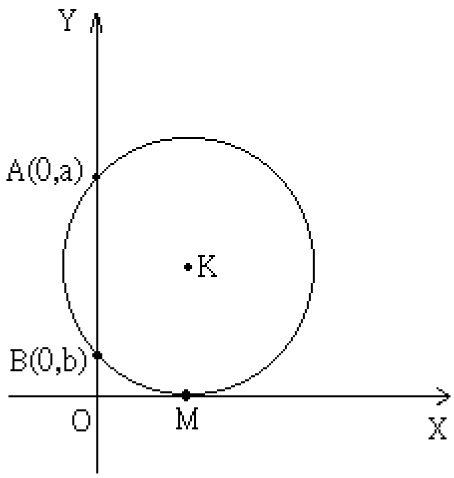
(1) 如下圖，OY 上有 A,B 兩點，在 OX 上求作一點 P，使得∠APB 有最大值。(OA $=s-e$, AB= h , OX 為水平視線)





(2) 如下圖，設水平視線為 x 軸，過 A 與 B 的直線設為 y 軸 。令 $b=s-e, a=h+s-e$，A 與 B 的座標分別是 (0,a) 和 (0,b)。

求證：圓 K 的圓心座標為($\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$)且半徑為$\frac{a+b}{2}$



二、數學史文本的簡介

自希臘、羅馬古典時代以來，數學史中第一個提出極值問題者，或許是慕勒(Johann Müller)，別名雷吉蒙塔努斯(Regiomontanus)(如圖 1)。下列數學史是針對慕勒的生平與貢獻、雷吉蒙塔努斯可能是數學史中的第一個提出極值問題者及雷吉蒙塔努斯為何會提出這個極值問題(毛爾，1998/胡守仁譯，2000)，提供一個簡要的說明。

圖 1　慕勒(雷吉蒙塔努斯)的畫像

DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-requæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re

hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

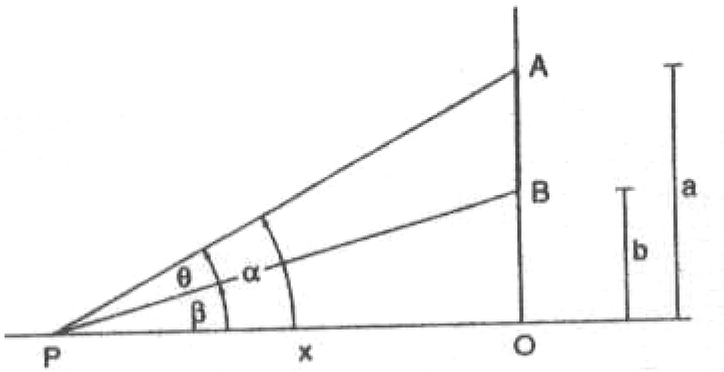
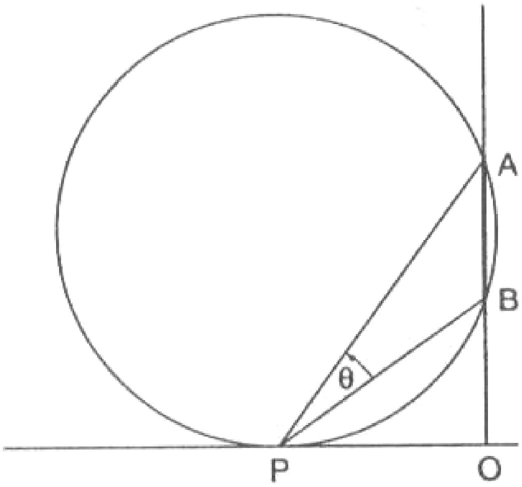


圖 2 雷吉蒙塔努斯最有影響力的作品《論各種三角形》的封面

圖 3 雷吉蒙塔努斯的極值問題：x 等於多少時，線段 AB 所正對的角 θ 為最大？



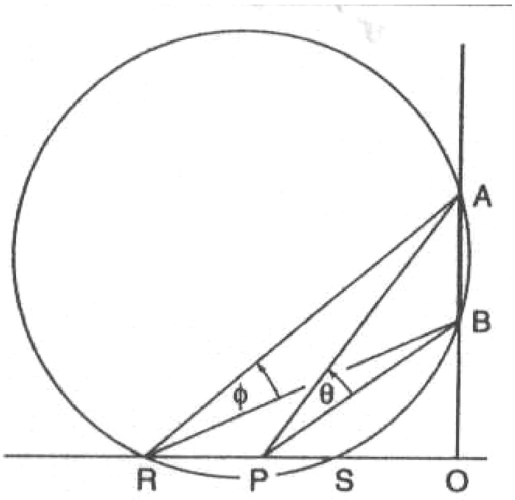


圖 4 雷吉蒙塔努斯問題的幾何解
圖 5 雷吉蒙塔努斯問題的幾何解的證明

(一) 慕勒(Johann Müller)的生平與貢獻

1. 將三角學引進歐州

直到十六世紀，三角學內容的主要部分皆由天文學者發展出來，這並非歷史上的巧合。阿里斯塔克斯與希巴爾卡斯創立了三角學，並成為一個獨特的數學分支。他們如同《大成》的作者托勒密(Ptolemy) 一樣，都是天文學家。在中世紀時期，阿拉伯、印度著名的的天文學家，像是阿布威法(Abul-Wefa)、巴坦尼(al-Battani)、阿利耶巴陀(Aryabhata)及尤路貝格(Ulugh Beg) (1393-1449)，他們吸收了希臘的數學遺產，並盡可能地擴展它，尤其是在球面三角學方面更為顯著。這些結合東西數學的遺產被傳遞到歐洲，再度是由天文學家的先鋒慕勒來接手。

2. 慕勒又被稱做雷吉蒙塔努斯(Regiomontanus)

慕勒(Müller) 1436 年出生於靠近下法蘭哥尼亞(Lower Franconia)的哥尼斯堡(Königsberg)鎮的一個叫做恩分登(Unifinden)的地方。他遵循他那個時代的學著的慣例，採用一個拉丁名字雷吉歐蒙特(Regio Monte)，這是由德文 “Königsberg” (皇室之山) 按字面翻譯出來的，因此在正式場合，他被稱做雷吉蒙塔努斯 。雷吉蒙塔努斯也是一個重視觀察實證的天文學者。

3. 第一位將數學及天文學書籍做商業用途的出版者

雷吉蒙塔努斯是第一位將數學及天文學書籍做商業用途的出版者。於 1474 年，他將作品《星曆》(*Ephemerides*)付印，表列出從 1475 至 1506 年，每一天太陽、月亮及行星的位置。這本書帶給他很大的迴響。哥倫布第四次航向新世界時就帶了一本，並用它預測到 1504 年 2 月 29 日的月食。

4. 協助修訂儒略曆（Julian calendar）

1475 年，教宗思道四世 (Sixtus VI) 徵召雷吉蒙塔努斯到羅馬，協助修訂已偏誤到不能適應季節變換的儒略曆（Julian calendar）。他很勉強地離開了他的工作並去到聖城，而在那裏，他不幸突然去世了。時間是 1476 年 7 月 6 日，享年 40 歲。至於導致他死亡的原因則仍然不明。

5. 最有影響力的作品《論各種三角形》(如圖 2)

雷吉蒙塔努斯最有影響力的作品就是《論各種三角形》(*De triangulis omnimodis)*。本書分成五冊，寫法模仿歐幾里得的《幾何原本》(*Elements)*。他在 1460 年完成本書，但直到 1533 年才出版，這個時候已經是在他去世後超過半個世紀了。

6. 協助天文學家對宇宙產生新的視野

哥白尼(Nicolas Copernicus) (1473~1543)從德國數學天文學家瑞蒂克斯(George Joachim Rhæticus) (1514-1576)的手上取得了一套《論各種三角形》。瑞蒂克斯於 1539 年拜訪哥白尼並成為他的第一個入室弟子。雖然瑞蒂克斯比哥白尼年輕了 41 歲，但他們卻能在一起作研究，他甚至還指導過哥白尼數學。(也由於瑞蒂克斯持續的激勵，哥白尼終於同意出版他著名的作品《天體運行論》《*De revolutionibus*》，在這部書內他詳述了他的日心宇宙體系)。瑞蒂克斯贈送一本《論各種三角形》的刻本給哥白尼，而哥白尼徹底地研讀過。這套刻本有保存下來，在書頁的邊緣還留有很多哥白尼的筆跡。後來著名的丹麥天文觀測家第谷(Tycho Brahe, 1546-1601)，使用這部書，作為對仙后座計算著名的新星 (Nova) 位置的根據。新星於 1572 年出現，他很幸運能親眼目睹。正因為如此，雷吉蒙塔努斯的著作所提出許多的數學根據，得以協助天文學家對宇宙產生新的視野。

(二) 雷吉蒙塔努斯可能是數學史中的第一個提出極值問題者

1471 年，雷吉蒙塔努斯在寫給任教於厄爾福特大學(University of Erfurt)的羅德(Christion Roder)教授的信中，提出下列問題：「對於一根垂直懸掛的桿子，在地面上那一個位置看起來最大 (即正對最大的視角)？」這個問題已經被聲稱為自希臘、羅馬古典時代以來數學史中的第一個極值問題(如圖 3)。

(三)雷吉蒙塔努斯為何會提出這個極值問題

或許只能用猜測的，也許原先是從建築或透視法的問題而來的：找出最好的角度觀察高樓中的一扇窗。關於透視法，即依實物在眼中看到的真實影像來繪圖的技巧，在當時還是相當新的課題，它是由兩位文藝復興時期的義大利建築師，布魯內勒斯基及阿爾貝蒂所提出的。這裡有個巧合，即寫過多部有關透視法的書籍的德國大畫家杜勒(Albrecht Dürer, 1471-1528)，他在紐倫堡出生的那年，正好也是雷吉蒙塔努斯定居紐倫堡那年。特別的是，透視法的觀念不久就成為藝術領域的中心學說，而藝術與幾何這兩個看似全然不相關的課題並列在一起，也正符合文藝復興的普遍主義理想。雷吉蒙塔努斯之所以提出這個題目，很可能是要回答某位藝術家或建築師的問題，而圖 4 與圖 5，即為此問題的幾何解與證明。

線上 Flash 測驗應用於國小低年級評量之研究

林怡采[1]、顏晴榮[2]

[1]新北市三重國民小學

[2]國立台北教育大學數學暨教育資訊系

摘要

本研究旨在建立線上數學測驗，希望成為學生學習的輔助工具。通常教師運用紙筆測驗，來評量學生學習狀況，事實上，過多的紙筆測驗，除了影響學生的學習動機外，更會抹煞了學生學習數學的興趣。

除了紙筆測驗，到底有沒有更好的工具，能讓學生喜歡數學，且老師能深入了解學生的學習狀況？若能運用現代電腦科技來幫助我們，使它成為一個公平且有趣的測驗工具，那有多好呀!教學者將所欲評量數學的概念放在電腦中，來測驗學生，或透過電腦來教學。

研究者根據九年一貫課程能力指標，建置低年級線上數學測驗網站。設計線上測驗需簡單且容易使用，如：

增加讀題按鈕—可以幫助學生瞭解問題。

題數不宜過多—避免測驗時間太長。

提供虛擬教具—幫助學生容易思考。

題目貼近生活—從生活經驗出發可以幫助學生思考。

在螢幕上的字體及按鈕要大—以便於操作。

調查58位學生中，有54位數學生喜歡，且樂於接受線上測驗，他們覺得使用容易。家長也認同此種測驗。線上數學測驗與紙筆數學測驗兩者有正相關。調查21位低年級教師，有15位老師交回問卷，此15位教師對線上測驗網站高度滿意。結論是使用電腦來測驗，學生表現喜歡且積極正向，我們應該發展學生喜歡的測驗方式。

關鍵字：Flash 測驗、線上數學評量、國小低年級

通訊作者：林怡采 th818@mail.tsces.ntpc.edu.tw

壹、發揮創意

研究者想發展一個評量的網站，提供教師在教學後，利用該網站讓學生利用電腦評量，思考數學問題，也讓教師透過此評量了解學生的學習狀況，並適時的指導學生，解除學生的疑惑。將各種類型的題目根據能力指標及學習概念分類，教師可以根據學生的程度或自己的教學進度，讓學生進行前測、學習中評量或後測。也可以讓學生在家中，自行連線上網，透過網際網路，在家中作自我練習之用。

貳、文獻探討

一、學習理論

運用水平學習遷移及垂直的學習遷移，低年級所要學習的數學概念，對大人而言，或許簡單，但對於初次接觸的人而言，卻未必簡單。在每一個測驗試圖將相同的概念放置在同一個測驗中，透過相似的情境，希望學生可以達到水平的學習遷移。在測驗題的設計部份，研究者根據 D.Ausubel 提出意義學習理論，將題目難易程度相同或程度類似的知識佈題於數學情境中，即達到所謂的水平遷移，由易而難不同層次的水平遷移，猶如階梯一般讓學生可以讓知識能力提升而達到垂直遷移的歷程。

為了讓學生做有意義的學習，首先要先分析了低年級的課程，這些數學概念的建立應有其先後順序，數學概念的建立非一蹴而幾，概念建立如何應用在生活之中，學生能在完美的數學情境中加以運用，需要佈題者的巧思，讓學生從題目的練習中，強化已習得的概念知識。

二、電腦測驗與紙筆測驗的比較

Hargreaves、Shorrocks-Taylow、Swinnerton、Tait＆ Threlfall（2004）用電腦測驗數學科目盡可能保持評量樣式相類似像紙筆測驗。在某些程度上電腦測驗使評量失真而影響學習的表現，電腦媒體有可能可以做到改善評量。

Threlfall、Pool、Homer 和 Swinnerton（2007）認為紙筆評量或電腦評量何者為更有效的評量，需視問題而定。

Eid（2005）研究二到五年級 31 女學生，比較線上測驗與傳統的紙筆測驗之學生表現，有些學生的分數類似，有些學生的分數有差異，電腦焦慮未影響學生的成績表現，且電腦經歷並無影響學生的在線成績表現。

紙筆測驗及電腦測驗各有其優缺點，形態改變需注意電腦畫面所提供更有趣和動態的評量，是否影響所測驗的項目，提供過多的資訊，是否無法得知學生的程度，對於佈題內容的掌握與拿捏是很重要的，對於學生的概念知識的了解要相當清楚，針對不同的數學知識概念，不同程度的學生，要提供不同的訊息。如：低年級宜多提供具體畫面，讓學生能具體的思考，不宜過於抽象；高年級有時候若提供過多的具體畫面，無法得知其抽象概念是否以形成，則失去其評量的意義。教師要能好好運用此兩種的測驗方式，若能熟悉此兩種測驗方式，針對評量的內涵加以評估，適合以何種方式呈現，可以提升評量的效益而加以運用。

參、研究工具

本研究使用之研究工具為「低年級線上數學測驗」、「線上低年級數學測驗學生意見調查問卷」及「低年級線上數學測驗網站評估教師反應問卷」。

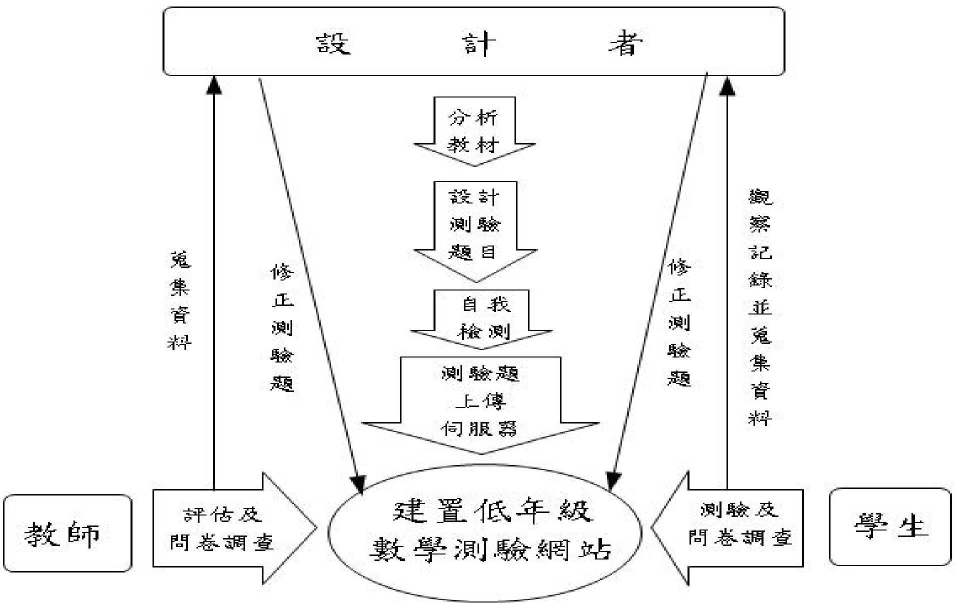


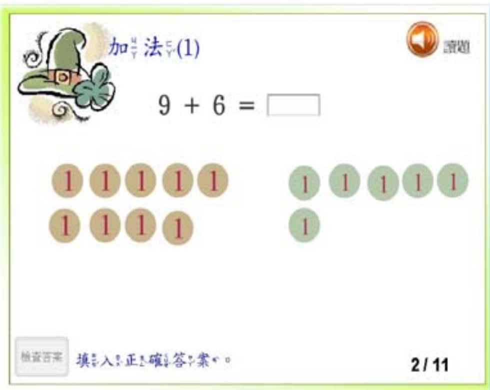
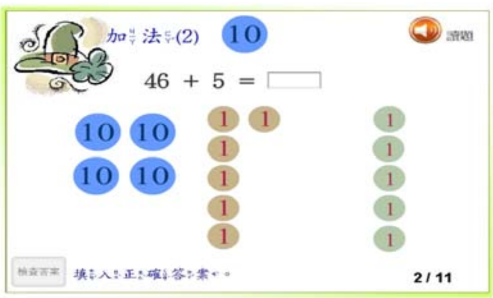
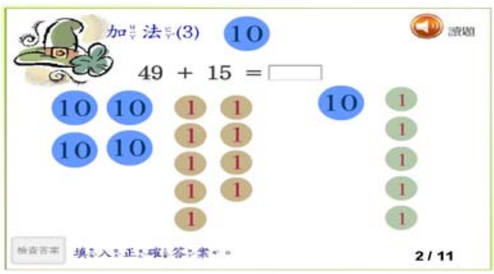
圖 1. 研究架構

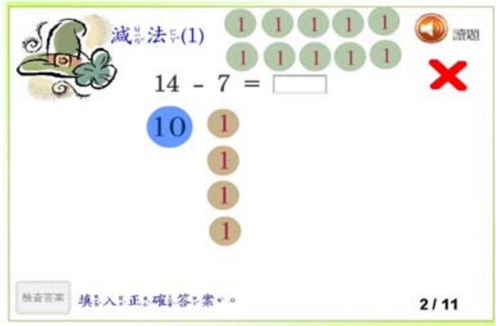
一、低年級線上數學測驗

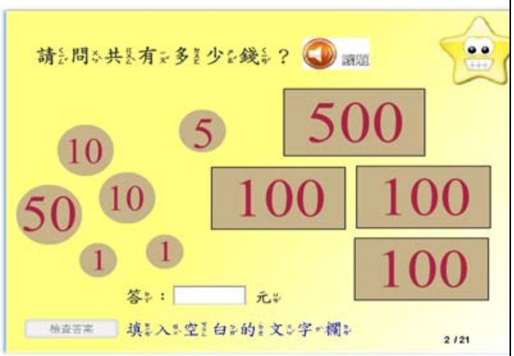
低年級線上數學測驗建置於研究者任教學校之電腦伺服器中，網址

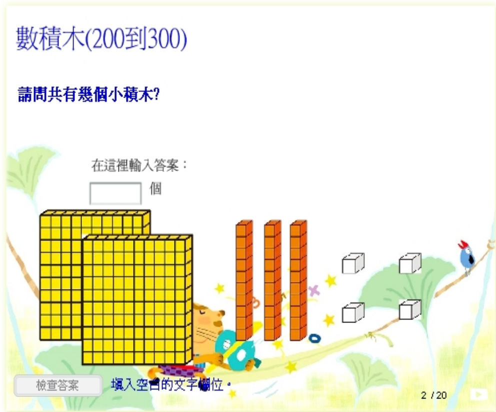
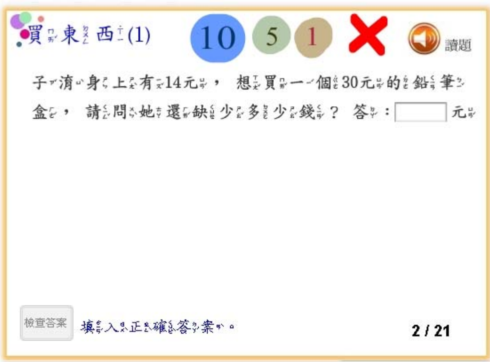
http：//163.20.94.10/th818,其數學測驗內容：

表 1. 數與量測驗項目內容分析表

測驗名稱	評量內容	測驗範例	能力指標
兩數量的比較 1 兩數量的比較 2	花的數量比蝴蝶多幾個？ 球的數量比小狗多幾個？ 能數 0 至 10 並確定 10 以內的量並做數量的比較		N-1-01
加法（1）	一位數加一位數，進位練習。運用搬移代幣的方式，讓學生觀察到湊十的活動。		N-1-01
加法（2）	二位數加一位數，進位練習。湊成十，將十個一換成一個十，進位。		N-1-01
加法（3）	二位數加二位數，進位練習。		N-1-01

測驗名稱	評量內容	測驗範例	能力指標
減法（1）	二位數減一位數，個位數字不夠減，向十位借一個十，換成十個一，由十減減數後，加上被減數的個位數字。(被減數小於 30）		N-1-01
減法（2）	減法借位練習。(被減數小於 100）		N-1-01
減法（3）	二位數減二位數，減法練習。		N-1-01
10 以內的分與合 20 以內的分與合	10 以內的數的分解和合成 20 以內的數的分解和合成		N-1-02

測驗名稱	評量內容	測驗範例	能力指標
數積木 1、2、3、 4及5	積木推疊以目視數積木的數量。 設計的積木原本由照片的白色積木圖片，到後來藍色積木可以搬移，協助學生點數下排的積木，讓學生利用 flash 的動畫的功能，加強學生對於數學概念的建立。	 	N-1-01
錢幣 錢幣5 錢幣10 錢幣50 錢幣100 錢幣500	使用1元、5元、10元、50元100元和500元的錢幣，原用新台幣圖檔請學生點數錢幣，輸入總金額。看學生手點螢幕，難以區分哪一個已點數，於是改設計假幣，用滑鼠按錢幣時更換其顏色，以協助學生點數。點數錢幣的總額。	 	N-1-01

測驗名稱	評量內容	測驗範例	能力指標
數積木 (100 到 200) 數積木 (200 到 300)	點數畫面中的百格積木板數量、十格積木板數量及單格積木數量並加總。 會加總全部的百格積木板、十格積木板和單格積木板的數量。		N-1-01
40 以內的數	點數、加法及乘法的應用，會運用九九乘法，理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題。解決兩步驟問題。(加、減與乘，不含併式)		N-1-03 N-1-06 N-1-07
買東西 (1) 買東西 (2)	將生活中的使用錢幣經驗相結合，融入加、減及乘法問題。(數字在50元以下) 將生活中的使用錢幣經驗相結合，融入加、減及乘法問題。(數字在100元以下)		N-1-01 N-1-02 N-1-03 N-1-06 N-1-07

測驗名稱	評量內容	測驗範例	能力指標
重量（1）	用天平觀察物品的重量，哪一種較重？哪一種較輕。		N-1-14
容量（1）	由容器的大小、水量的高低，判斷水量的多寡或容量的大小。		N-1-14

表 2. 長度測驗項目內容分析表

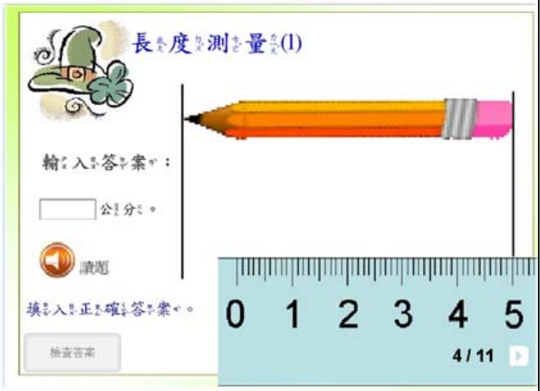
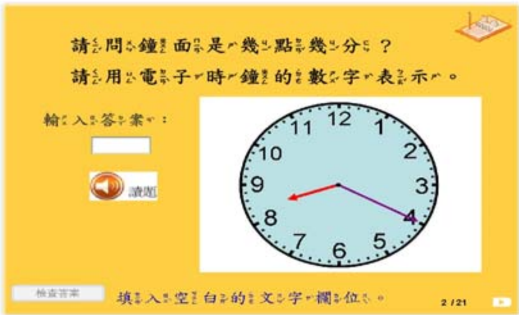
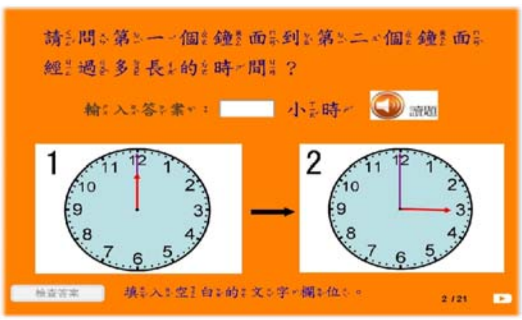
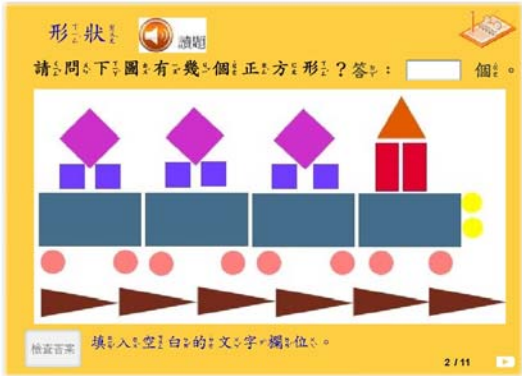
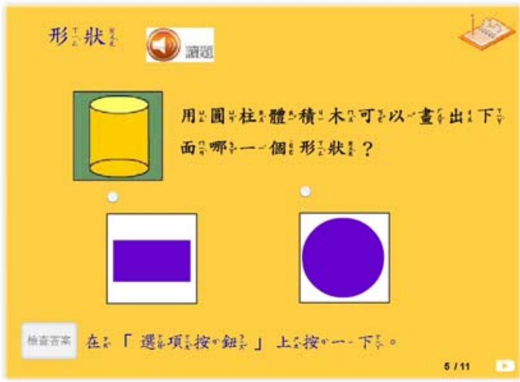
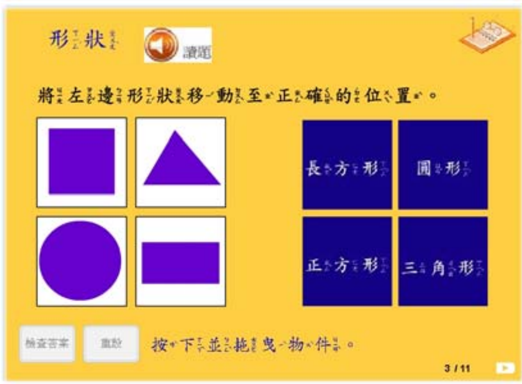
測驗項目	內評量容	測驗範例	能力指標
比長短 測量長度 1	直接比較 能比較高矮、長短、厚薄、粗細、輕重。 鉛筆可以搬動，讓學生實際操作，運用物品的長度為小單位測量東西的長度。		N-1-08
長度 測量長度 2	使用尺測量物品的長度 會使用尺測量物品的長度 長度單位公分		N-1-08

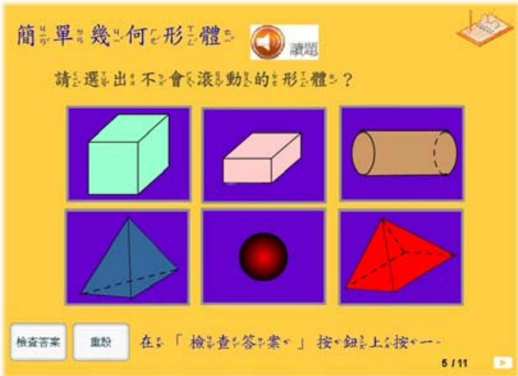
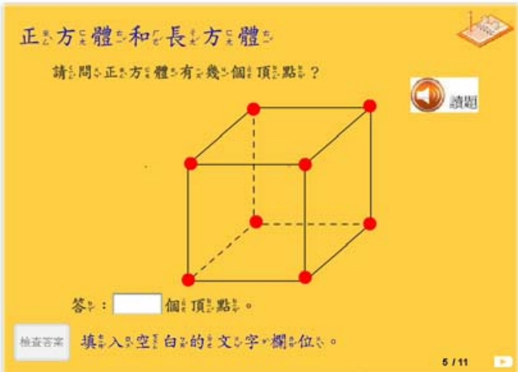
表 3. 時間測驗項目內容分析表

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
幾點鐘和幾點半	看鐘面以電子時鐘的表達方式輸出時刻，認識幾點鐘及幾點半。		N-1-11
時針與分針指向何處	分辨時針與分針分別是看長針或短針，看所指定的長短針在鐘面上所指的數字。		N-1-11
幾點幾分 5、10、15	認識 5、10、15、20、25、35、40、45、50 和 55 分。能看出分針在鐘面在一大格的時刻。		N-1-11
幾點幾分	輸出精確的幾點幾分。		N-1-11
經過多久 1 經過多久 2	比較兩個鐘面的時刻，表達經過多久的時間。能思考分針繞了幾圈，經過了幾小時。		N-1-11

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
日曆 1 日曆 2 月曆 1 月曆 2	將日曆或月曆呈現於考題中，根據所提供的日曆或月曆的資訊來解答。 認識日曆、月曆。 查日曆及月曆報讀幾月幾日是星期幾。 查月曆的週末假日有幾天。 認識一星期有幾天。 點數某月某日到某月某日共有幾天。	 	N-1-11

表 4　幾何測驗項目內容分析表

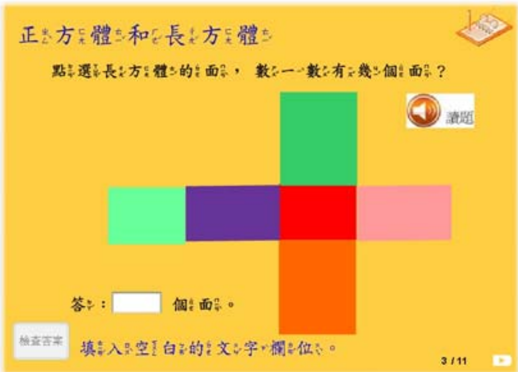
測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
平面形狀	認識三角形、正方形、長方形和圓形，點數各種形狀的數量。 題型的變化由填充題加入單選題、多選題及拖曳題型的加入，讓題目更具變化。 除了確認小朋友對於形狀的名稱是否了解，並針對學生運用立體的形體拓印或繪製形體的面，所產生的經驗，看學生是否對於所繪製出的形狀，能加以辨認的能力。		S-1-01

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
立體形狀 立體形狀1 立體形狀2	形體的分類 立體形狀是利用上課由小朋友造形堆疊，拍攝後佈題，學生對自己的造形設計也可以放在考題中，覺得很有趣。		S-1-01
簡單的幾何形體	認識長方體、正方體、圓柱體和球體。從認出各形體的正確名稱，到針對各形體的特徵如：會不會滾動、有沒有頂點或形體的面可以繪製出的形狀。		
正方體和長方體	分別繪製正方體及長方體的立體透視圖，讓學生點選紅色頂點，按壓變色成綠色來點數正方體及長方體的頂點，增進學生對於正方體及長方體共有幾個頂點的認識。 分別繪製正方體及長方體的立體透視圖，讓學生點		

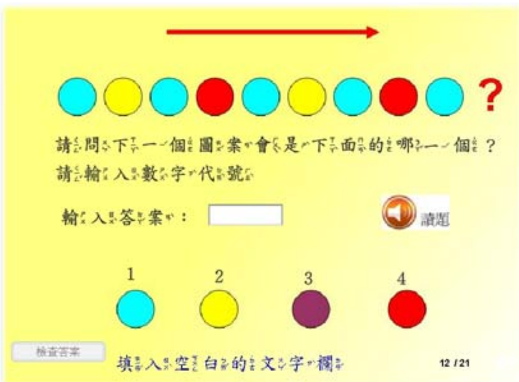
<table>
<tr><th>測驗項目</th><th>評量內容</th><th>測驗範例</th><th>能力指標</th></tr>
<tr><td></td><td>選藍色的邊，按壓變色成綠色來點數正方體及長方體的邊，增進學生對於正方體及長方體共有幾個邊的認識。

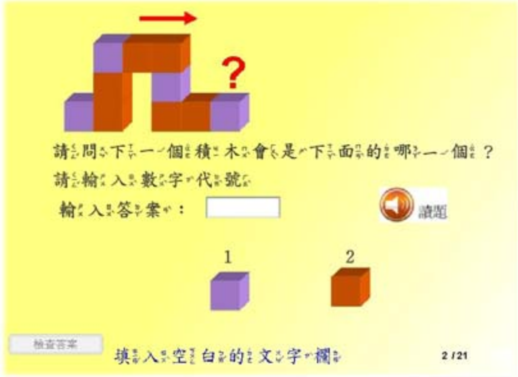
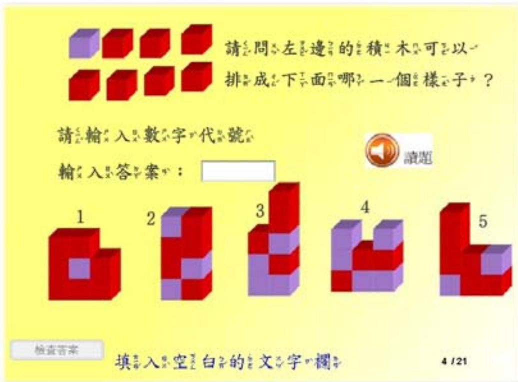
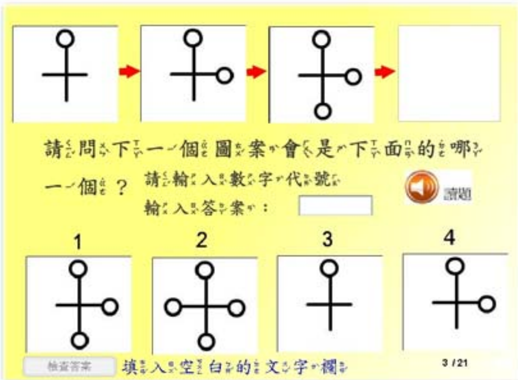
別繪製正方體及長方體的展開圖，讓學生點選長方體及正方體的面，按壓後，其面會展開，來點數正方體及長方體的面，增進學生對於正方體及長方體共有幾個面的認識。

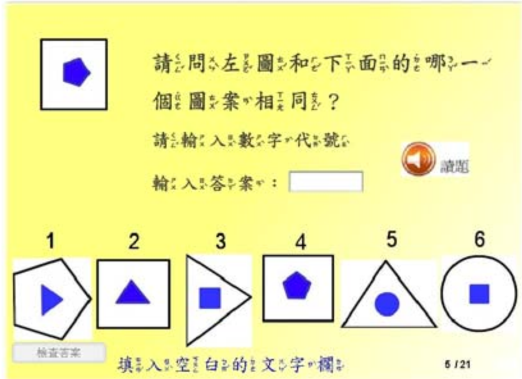
複選題綜合形體的頂點、邊及面的特性。</td><td>

</td><td></td></tr>
</table>

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
左右 左右、上下、前後及遠近 撲克牌 1	原本設計左右加上點數，且美人魚面著學生，其左右剛好和學生相反，增加學生辨識的難度。後來的設計只單純考驗學生左右的概念，配合圖片中的人物背對者學生，讓先分辨出自己的左右為哪一邊。此概念對一年級的學生常常會分辨不出自己的左有手。 最後利用撲克牌，讓學生覺得像是在玩遊戲般，詢問所指定的位置，其撲克牌的點數。	  	S-1-06
看積木回答問題	利用不同顏色積木排列推理下一個會是什麼顏色的積木。 平面圖案顏色的推理，立體積木排列順序的推理及給予固定的積木顏色，可以推疊出哪一個正確模樣。		

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
	學生的推理能力，國小數學教材無，參考芬蘭數學教材。	 	
看圖形回答問題	利用不同圖片呈現，推理下一個圖片會是什麼哪一種。 原圖案若轉變一個方向，是否學生可以辨識的能力。 學生的推理能力，國小數學教材無，參考芬蘭數學教材。	 	

<table>
<tr><th>測驗項目</th><th>評量內容</th><th>測驗範例</th><th>能力
指標</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>數格子</td><td>由點數格子，點數所佔的面積大小。由整個格子的點數，再加入半個格子的數量，讓學生學會半個格子加半個格子等於一個格子的觀念。</td><td>

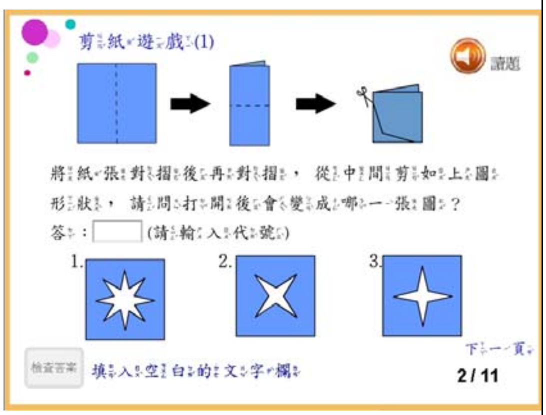
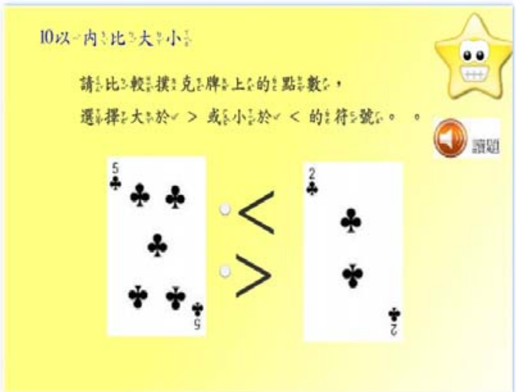

</td><td>N-1-14
S-1-03</td></tr>
<tr><td>剪紙遊戲1</td><td>利用學生剪紙的經驗，讓學生思考抽象的幾何空間概念。</td><td>
</td><td>S-1-01</td></tr>
</table>

表 5. 代數測驗項目內容分析表

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
撲克牌 10 點	利用撲克牌遊戲建立代數概念，讓學生熟悉數字湊成10的活動。		A-1-01
撲克牌 21 點	由撲克牌21點的遊戲，讓學生算出未知數是多少。		
10 以內比大小	運用撲克牌的點數，兩個點數的比較，讓學生選取大於或小於的符號。		A-1-02
數字排列>和<	看大於或小於符號，拖曳四個數字排在適當的位置上。		

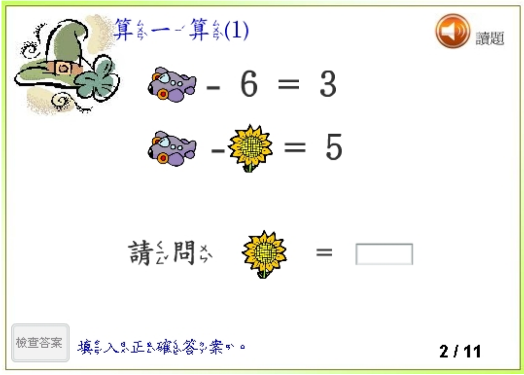
測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
數格子（1）	學生藉由格子數去了解三個數字之間的關係。		A-1-01
線段（1）	從線段的長短分析三個數字之間的關係。		
算一算（1） 算一算（2） 算一算（3）	運用學生熟悉的物品代替未知數，讓學生由其它兩數之間的關係，推論出第三個數字。		A-1-02

表 6. 統計測驗項目內容分析表

測驗項目	評量內容	測驗範例	能力指標
統計	從不同的畫記方式了解統計數字。	  	D-1-01

肆、研究結果

一、九十九學度記錄一年級 29 位學生線上數學成績，如下表：

表 7A. 一上線上數學測驗成績記錄表

測驗項目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
比長短		95	50	80	65		35		35	55
長度		100								
10 以內分與合	90	100	100		100	100	20		90	85
10 以內的應用問題		100	95	85	55		55			
11 以內的應用問題		100	95	95	100					
數格子 1	100	100	95		100	100	100	100	100	100
錢幣 5	100	100	100						100	
錢幣	100									
錢幣 10										
撲克牌 10	100	100	100	75	100	95	10	20	85	95
撲克牌比大小	70	100	100	90	85	65	45		100	85
21 點 1		100					5			
21 點 2		100								
數數 1-1		100	100							
積木		100	95							
整點		100	100	100	100	60	85		100	
半點		95								
指針指何處	90	100	95		95	85	45		90	
幾點多		100	100		100	90	80		100	
填數字 1	90	100	100		90	90	50	60	80	90
填數字 2	90	100	100		100	50	20	30	90	70
數積木	100	100	95		100	95	15	90	100	100
數積木 1-1	100	100			100		100	100	80	100
加法 1	100	100			100	100	100	100	100	100
加法 2	100	100			100	100	80	80	100	100
減法 1	90	100		80	100	95				
一位減法	100	100			100		95	85		90
減法 1	100	100			75	85			90	65
減法 2	100	100								
減法 3		100								
經過多久	100	100		70	100		40	15	95	85
月曆 1		100		85	100			75	60	85
日曆 1		100			95					
月曆 2		100			95					
日曆 2		100			90					
10 以內的分與合		100		100	100	100	60	70	95	95
20 以內的分與合		100		85	100	85			100	100
平均分數	95.6	99.7	95	85.9	94	87.2	54.7	68.8	89.5	88.2
測驗次數	18	35	16	11	26	16	19	12	20	17

表 7B. 一上線上數學測驗成績記錄表

測驗項目	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
比長短	85	55	45		75	60	75	45	95	90
長度								45		100
10 以內分與合	100	85	50	70	40		70	30	100	100
10 以內的應用問題	100	90		80	40		95	80	95	100
11 以內的應用問題	100	60		85	40		85	80	95	85
數格子 1	100	95	100	100	100	95	100		100	100
錢幣 5	90	100		60			100		100	100
錢幣	100								100	90
錢幣 10	100								100	90
撲克牌 10	100	95	100	95	95	95	100		100	100
撲克牌比大小	90	80		100	85	95	100		100	100
21 點 1									95	
21 點 2										
數數 1-1	95						95		100	100
積木										
整點	100	100	90	100	95	90	100	100	100	100
半點	80									
指針指何處	85	65	75	95	90	90	95	75	90	100
幾點多	95	80	100	65	95		100	100		100
填數字 1	100	90	60	80	80	100	100	100	100	100
填數字 2	100	70	30	50	70	90	90	70	100	100
數積木	100	100	95	85	95	100	100	95	100	100
數積木 1-1	100	100	100	70	70	85	100	95	100	100
加法 1	100	100	80	100	90	100	100	100	100	100
加法 2	100	90	90	90	100	70	100	80	100	100
減法 1					85	80	100		100	100
一位減法	80				100				100	100
減法 1	100	95	45	90	100	80	100	95	90	
減法 2	100					85			100	
減法 3									100	95
經過多久	95	90	70	85	100	95	95	30	100	100
月曆 1	95	75	85	100	80	95	95	85	85	85
日曆 1	100			100		90	85		95	95
月曆 2	95								95	95
日曆 2	90								85	100
10 以內的分與合	100	100	100	100		100	100	100	100	100
20 以內的分與合	100	100	85	100		100	100	100	100	100
平均分數	96	87	77.8	86.4	82.1	89.8	95.2	79.2	97.5	97.6
測驗次數	31	22	18	22	21	20	25	19	32	31

表 7C. 一上線上數學測驗成績記錄表

測驗項目	21	22	23	24	25	26	27	28	29
比長短			75	70	90		100	90	65
長度					75				
10 以內分與合	20	100	60	100	70	90	100	100	40
10 以內的應用問題			100	100	65	50		100	100
11 以內的應用問題			90	100	100			100	90
數格子 1	100	100	100	90	100	85		100	100
錢幣 5		100	100	90	75			95	70
錢幣									
錢幣 10									
撲克牌 10		100		45	90	100	95	100	100
撲克牌比大小		100			95		45	95	50
21 點 1									
21 點 2									
數數 1-1		95							
積木									
整點		100	100	100	100	50	85	100	
半點									
指針指何處		95	90	95	80		90	95	
幾點多	100		100		100		100	95	
填數字 1	100	90	100	90	90	60	90	90	50
填數字 2	90	90	70	90	90	60	80	70	30
數積木		100	100	100	100		100	100	70
數積木 1-1	100	100	95	100	95	55	100	100	95
加法 1	100	100	100	100	100	90	100	100	100
加法 2	100	100	100	100	100	100	70	100	100
減法 1		100		100	95	95	85	100	
一位減法		100						95	
減法 1	85	100	100	100	65	85	70	90	75
減法 2								100	
減法 3									
經過多久	75	100	95	95	100	25	85	90	70
月曆 1		90	80	100	80	15	70	85	100
日曆 1			90	100	70		80	70	
月曆 2								90	
日曆 2									
10 以內的分與合	100	100	80	100	100	85	100	100	100
20 以內的分與合	100	100	85	100	95		100	85	100
平均分數	89.2	98.1	91	93.9	88.8	69.7	87.3	93.9	79.2
測驗次數	12	21	21	22	25	15	20	27	19

二、統整及收集到的數據並加以分析，下表為九十九學年度一年級上學期之平均分數記錄表。

表 8. 一上線上數學測驗、紙筆數學測驗與紙筆國語測驗成平均績記錄表

編號	線上數學成績	測驗次數	數學紙筆成績	紙筆國語成績	性別
1	95.6	18	89.3	93.9	男性
2	99.7	35	98.6	98.8	男性
3	95.0	16	89.0	93.0	男性
4	85.9	11	80.5	86.8	男性
5	94.0	26	95.3	92.6	男性
6	87.2	16	86.7	86.9	男性
7	54.7	19	66.0	67.8	男性
8	68.8	12	60.9	43.4	男性
9	89.5	20	81.8	87.0	男性
10	88.2	17	91.9	97.4	男性
11	96.0	31	97.0	96.3	男性
12	87.0	22	96.5	91.0	男性
13	77.8	18	73.5	76.1	男性
14	86.4	22	81.9	80.9	男性
15	82.1	21	89.9	88.0	男性
16	89.8	20	85.3	89.9	男性
17	95.2	25	91.6	94.5	女性
18	79.2	19	73.5	88.1	女性
19	97.5	32	93.4	98.5	女性
20	97.6	31	93.2	94.6	女性
21	89.2	12	82.3	86.3	女性
22	98.1	19	94.0	92.6	女性
23	91.0	21	78.3	81.4	女性
24	93.9	22	97.9	93.9	女性
25	88.8	25	80.8	87.9	女性
26	69.7	15	76.8	82.0	女性
27	87.3	20	88.4	92.5	女性
28	93.9	27	93.4	90.0	女性
29	79.2	19	71.5	85.0	女性

將一年級學生人數 29 人的上學期數學與國語的學期總平均分數與線上數學測驗成績總平均分數進行單一樣本 T 檢定。

表9. 一上線上數學測驗、紙筆數學測驗與紙筆國語測驗成績統計表

	個數	平均數	標準差	平均數的標準誤
線上數學成績	29	87.528	10.1329	1.8816
線上測驗次數	29	21.07	6.017	1.117
數學紙筆成績	29	85.490	9.9032	1.8390
國語紙筆成績	29	87.486	10.8898	2.0222

由上表得知，線上數學成績的標準差為10.1329，數學紙筆成績的標準差為9.9032，兩者的標準差相當接近；平均數的標準誤線上數學成績為1.8816，數學紙筆成績為1.8390，兩者也相當接近；雖然線上數學成績的平均數為87.528和紙筆國語成績的平均數為87.486較為接近，就平均數的標準誤來看線上數學成績與紙筆數學成績較為接近。

表10. 一上線上數學、紙筆數學與紙筆國語測驗成績之間的相關性

測驗項目	相關項目	線上數學成績	線上測驗次數	數學紙筆成績	國語紙筆成績
線上數學成績	Pearson 相關	1	.523**	.829**	.768**
	顯著性（雙尾）		.004	.000	.000
線上測驗次數	Pearson 相關	.523**	1	.592**	.510**
	顯著性（雙尾）	.004		.001	.005
數學紙筆成績	Pearson 相關	.829**	.592**	1	.842**
	顯著性（雙尾）	.000	.001		.000
國語紙筆成績	Pearson 相關	.768**	.510**	.842**	1
	顯著性（雙尾）	.000	.005	.000	

** 在顯著水準為0.01時（雙尾），相關顯著。

由以上的相關表格可得知，線上數學成績與紙筆數學成績的相關顯著水準為.000，兩者相關性顯著；線上數學成績與紙筆國語成績的相關顯著水準為.000，兩者相關性為顯著；數學紙筆成績與國語紙筆成績的相關顯著水準為.000，兩者相關性為顯著。而線上測驗的次數與三項平均分數也有著顯著相關性，其顯著水準P值分別為.004、.001和.005。

線上數學測驗成績與數學紙筆測驗成績兩者存在著正相關，利用測驗工具來幫助教師診斷學生的學習狀況，是可行的。

三、學生問卷調查

參與線上數學測驗學生人數 58 人，問卷由情意、電腦的操作及家人的支持度三個面向去加以討論。綜合出以下重點：

1. 學生對於以線上數學測驗的表示喜歡且接受。
2. 多數學生認為線上數學測驗的電腦操作簡單。
3. 多數家長支持數學線上測驗。

四、測驗網站評估

任教於低年級的教師進行測驗網站評估，教師人數 15 人，對於網頁操作介面、佈題內容及網站設置的評估皆有高度的滿意度，獲得以下評價：

1. 網頁操作介面使用順暢且容易，版面規劃、音量、字體和圖片大小適當。
2. 佈題內容用詞清楚且容易理解，難易度規劃適中，能符合學生的程度。
3. 網站設置可以幫助學生學習，讓學生上網練習，增強學生的數感。

伍、結論

本研究在探討線上數學測驗工具的建立的可行性，對於老師及學生的影響。經分析歸納出上述的重要結論，依研究目的，提出具體建議，以作為設計測驗網頁者、教育工作者、學校單位及日後研究者作為參考。

一、設計測驗網頁者

1. 網頁測驗內容標示清楚易懂。
2. 測驗內容由易而難，循序漸進。
3. 對低年級學生建立一個容易融入的測驗環境，注音的標示及讀題鈕的設置。
4. 字體及按鈕大小要適當，畫面及顏色的配置要適宜。
5. 題目的設計要生活化，貼近學生的生活經驗，讓數學能更具體存在。

二、教育工作者

1. 靈活運用線上測驗工具，利用科技媒體聚焦於螢幕，可佈題讓學生思考。
2. 掌握測驗工具的內容，根據教學進度加以配合。
3. 善用線上測驗工具中的虛擬教具，讓學生透過具體操作加強其概念。
4. 運用學生喜歡的測驗方式，提升學生的學習意願。
5. 尊重學生的個別差異，配合學生的學習速度。
6. 增強學生資訊能力，也是一種學習。

三、學校單位

1. 電腦設備的擴充，使測驗能全面實施。
2. 整合有興趣設計的老師，共同研究與開發測驗網站。
3. 能為有興趣的老師增加其資訊能力，舉辦相關之研習與進修活動。

參考文獻

Ausubel, D. (1963). The psychology of meaningful verbal learning. *New York: Grune & Stratton.* From the world wide web: http://tip.psychology.org/ausubel.html

Eid, G. K. (2005). An Investigation into the Effects and Factors Influencing Computer-Based Online Math Problem-Solving in Primary Schools. *Journal of Educational Technology Systems, 33*(3),223-240.

Harcourt, Inc.(1919). Harcourt School Publishers。Retrieved December 24, 2010, from Web, Institute for Web Technologies Web site: http://www.ixl.com/http://www.hbschool.com/thinkmath/

Lichtman, M. (2010)。*教育質性研究實用指南*（江吟梓、蘇文賢合譯）。台北：學富文化事業有限公司。（原著出版於2009）

Threlfall, J., Pool, P., Homer, M., & Swinnerton B. (2007). Implicit aspects of paper and pencil mathematics assessment that come to light through the use of the computer. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 335-348.

活動報馬仔

一、 **2011/07/10(日)~2011/07/15(五)**

The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

地點：土耳其

參考網址：http://www.arber.com.tr/pme35.org/index.php/home

二、 **2011/12/15(四)~2011/02/18(日)**

2011 台灣教育研究學會國際學術研討會

地點：國立中山大學

參考網址：http://www.education.nsysu.edu.tw/TICE2011_ch/

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請e-mail至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw