靳衛軍、王西茜（2013）。
由反三角函數教學引發的哲學思考。
台灣數學教師(電子)期刊，**34**，1-12。

由反三角函數教學引發的哲學思考

靳衛軍[1]　王西茜[2]
[1]山西省長治市華北機電學校圖書館
[2]山西太原師範學院計算機系 2008 級學生

反三角函數概念一直是教學難點，本文通過典型問題的深入反思，尤其例 3 反思中兩種不同方法引發出現的問題，不僅暴露出對問題理解的膚淺，更加凸顯出傳統解題教學方法的弊端，深入反思不僅促進了學生對問題的深刻理解，同時也更進一步體驗到數學本質上是一種理性探索精神。

關鍵詞：反三角函數概念、數學反思、數學理解

通訊作者：靳衛軍，e-mail：1596357695@qq.com
收稿：2013 年 5 月 3 日；
接受刊登：2013 年 9 月 27 日。

例子總是比說教來的強，讓我們靜心來研究幾個例子吧——我總認為例子比泛談更重要。[1]

只有理解人類如何獲得某些事實或概念的知識，我們才能對人類的孩子如何獲得這樣的知識作出更好的判斷。[2]

—— 喬治．波利亞（George Pólya）

壹、實踐暴露出的問題　反思中突破

反三角函數概念一直是教學難點，從課堂表面教學效果上看學生能完成教材的習題，對概念是有一定的認識，但涉及深層次理解的問題就暴露出了理解上的不足。下面是筆者在教學中遇到的問題。

一、一道令人迷惑的高考選擇題

例 1．函數 $f(x)=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函數 $f^{-1}(x)=$（　）

（A）$-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$　（B）$-\pi-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$

（C）$\pi+\arcsin x$，$x\in[-1,1]$　（D）$\pi-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$

題目出處：2003普通高等學校招生全國統一考試（全國卷）：數學（理工農醫類）（2013）

筆者一時無法給出一個正面、直接的解答，決定嘗試看看可能是哪一個答案，然後再作嚴格證明。筆者嘗試做了解答。我們知道原函數的定義域即為反函數的值域。$f^{-1}(x)=\arcsin x$ 顯然不合題意。因為 $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$，而 $\frac{\pi}{2}\le\pi+\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$，我覺得選（C）比較合理，可參考答案為（D）。參考答案也給出了一個相似的理由，選（D）似乎也是合理的，因為 $-\frac{\pi}{2}\le-\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$，而 $\frac{\pi}{2}\le\pi-\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$，所以 $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$ 也在情理中。兩個答案究竟應該選擇哪一個？一個函數的反函數形式應該是唯一的。我們在求反函數時一定錯了，但錯在哪確實需要澄清。一時沒有頭緒找個學生談談，或許交流中能有什麼新的想法。

二、學生的解答

根據反函數的值域和單調性學生很快就給出了正確答案。

首先，由 $x\in[-1,1]$ 得 $-\frac{\pi}{2}\le\pm\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$，則 $-\frac{3\pi}{2}\le-\pi-\arcsin x\le-\frac{\pi}{2}$，

---

[1] Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 288

[2] Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 316

$-\frac{\pi}{2}\le \pi \pm \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$。而 $f(x)$ 的定義域為 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，所以只有（C）、（D）符合。

其次，易知 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上嚴格單調遞增，$y=-\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上嚴格單調遞減，因為原函數與反函數的單調性是一致的，而 $f(x)=\sin x$ 在其定義域 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 內嚴格單調遞減，所以選（D）。

三、理性探索精神的培養

學生能得到正確答案至此一般的課堂教學就達到目的了，就此結束就有點遺憾。反思過程獲得的副產品要比單純的正確答案重要，我們在解題過程中是為培養學生的理性探索精神。僅滿足淺嘗輒止的教學缺失了更多的教育內涵。

整個數學思考是個複雜的過程，在無法正面、直接地給出答案的情況下，我們可盡可能的排除縮小範圍，確定出問題的可能性。這只是數學思考的一個環節，我們需要嚴格的證明，進一步確認結果。筆者進一步追問：我們通過排除法只能說明（D）是有可能正確的，如果沒有給出選項我們又如何求出函數的反函數呢？我們通過排除法只能說明（D）是有可能正確的，能確切證明這一結論嗎？下面是學生的解答。

設 $y=\sin x$。$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，則 $x-\pi$（或 $\pi-x$）$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $y=\sin x=-\sin(x-\pi)$。這一步是在畫已知函數的草圖時想到的，$\sin x$ 中的 x 不在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 內，但可以改變函數式，使角的範圍理想化且得到的函數與已知函數的圖像相同，如此他們的反函數自然相同。

$x-\pi=\arcsin(-y)$，$x=\pi-\arcsin y$，即 $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$。所以答案為（D）。

當然，由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 也可以得到答案，比上面的解答要簡單一點。

四、筆者對反三角函數概念教學的反思

函數 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函數究竟是哪一個呢？我們通過學習教材已經知道了函數 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函數，怎麼會對這一類似問題感到似無從回答呢？其實只要搞清求反函數的方法實質，及如何求三角函數 $y=\sin x$ 的反函數，問題就迎刃而解。求函數 $y=f(x)$ 的方法實質是：把 $y=f(x)$ 看作 x 的方程，y 看作已知數，不妨設其解為 $x=f^{-1}(y)$。如果方程 $f(x)=y$ 有唯一解，則稱存在反函數：$x=f^{-1}(y)$，記為 $y=f^{-1}(x)$。如由 $y=f(x)=2x-1$，得：$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ 所得反函數 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$。又如 $y=f(x)=x^2$，解之得：$x=\pm y$，知其不存在反函數。

我們知道對函數 $y=\sin x$ ， $x\in R$ 來說是不存在反函數的，若把函數定義域限制在某一嚴格單調區間才存在反函數。為了方便，我們把函數定義域限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 來研究原函數的反函數。求反函數的方法實質是解關於 x 的方程 $y=\sin x$ 。

要解關於 x 的方程 $y=\sin x$ 是一難事，我們假定 x 已解出並引進符號來表示其解： $x=\arcsin y$ 。由此便得到了反三角函數的概念。我們在引進根號符號、對數符號都是採用了類似的方法。比如 $x^2=7$ ，則 $x=\pm\sqrt{7}$ ，若 $5^x=3$ 則 $x=\log_5 3$ 。反三角函數概念、性質的證明歷來是教學的難點，突破的關鍵在於對符號 $\arcsin y$ 的深刻理解。由定義可以挖掘出 $\arcsin y$ 有三層含義：（1） $\arcsin y$ 表示一角 x ，（2）並且角 x 的正弦值為 y ，（3）而且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 。這樣便可以對反三角函數的概念、性質有比較深刻的理解。關於反三角函數性質的證明我們將在下面予以說明。

現在問題化歸為：已知函數 $y=\sin x$ ， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函數 $y=f^{-1}(x)=\arcsin x$ ，求函數 $y=\sin x$ ， $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函數。我們知 $\arcsin y$ 表示一正弦值為 y 的角且該角在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 。解答問題的實質是如何用 $\arcsin y$ 表示正弦值為 y 且在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的角。在單位圓中易知滿足該條件的角為： $\pi-\arcsin y$ 。故選（D）。

我們只是概括地談論了反三角函數概念的本質，與其在歷史上的呈現方式、現代教材的不盡相同，而且隨著時代的不同人們對反三角函數概念在數學中的地位、作用認識亦不盡相同，這些會在課綱改革中反映出來。探討這一歷史的變遷不僅是件有趣的事情而且對課綱的制定、改革有著重要的理論、現實意義，值得深入反思。

五、對學生解題過程的瞭解　恰如其分的指導

單純從一個答案是看不出學生的思維，也無法給學生恰如其分的指導。我們只能通過學生對解題過程的敍述來瞭解判斷學生理解的深淺程度。學生感到用文字表達思考過程及答案比較難，總覺心裏明白文字表達上有些不清，費了番周折才寫出了幾行自己不滿意的解答。根據學生的理解情況筆者引導學生反思了反三角函數概念的形成過程，學生對反三角函數概念有了更為清晰深刻的認識，同時學會了鑒賞什麼樣的證明才是清晰簡明的。

如果僅滿足能給出正確答案，教學似缺失了什麼。莫里斯．克萊因（Morris Kline）在《西方文化中的數學》一書中談到：

> 數學的另一個重要特徵是它的符號語言。如同音樂利用符號來代表和傳播聲音一樣，數學也用符號表示數量關係和空間形式。憑藉數學語言的嚴密性和簡潔性，數學家們就可以表達和研究數學思想，這些思想如果用普通語言表達出來，就會顯得冗長不堪。這種簡潔性有助於思維的效率。（Kline，1953／張祖貴譯，2005，頁 5）

當然，我們不能過高地期望學生能用準確簡練的數學語言表達思想，學會欣賞數學語言闡述問題簡單明瞭深刻的風格是一種文化修養。

六、教學啟示

我們回過頭來回顧一下學生看到這一題目時的最初反應，有的學生感到茫然不知如何求它的反函數，卻不會、不知反思一下學了反三角函數卻又為什麼不會做該題。有的同學根據選項通過排除法作了合理的選擇，至此就算完事大吉了卻不會更多地思考。

中國大陸大多數教師都在教解答選擇題的方法、技巧，這種學習方式對知識的理解只能停留在表面淺層，通過反思才能對問題有本質的理解。學生學會自主反思是學習的一個重要環節，教學生反思的教學和單純講解解題技巧的教學有著本質的不同。

貳、簡單的證明　漫長艱辛的過程

繼反三角函數概念後研究其性質是一種邏輯必然，因為研究反三角函數必然要涉及函數的奇偶性的判斷，這一性質證明是必要的。大陸高級中學課本代數（甲種本）（人民教育出版社數學編輯室，1983）給出了反三角函數的兩個性質：

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ， $x \in [-1,1]$　　（1）

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ ， $x \in [-1,1]$　　（2）

其中性質（1）是通過觀察反正弦函數圖像而得出，性質（2）給出了一個較複雜的代數證明。我們不妨引述一下這一證明（人民教育出版社數學編輯室，1983，頁 10）：

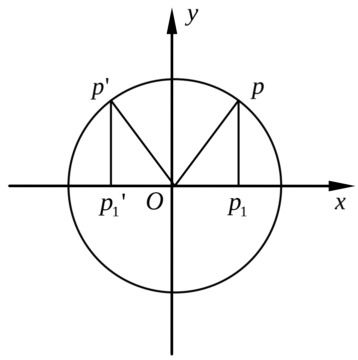
> 由 $-1 \le x \le 1$，得 $1 \ge -x \ge -1$，即 $-x$ 屬於反餘弦函數的定義域 $[-1,1]$。
> 根據誘導公式[3]與反餘弦函數的定義，得 $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$，因此，$\pi - \arccos x$ 是餘弦函數等於 $-x$ 的一個值，又因 $0 \le \arccos x \le \pi$，所以 $0 \ge -\arccos x \ge -\pi$，由此可得 $\pi \ge \pi - \arccos x \ge 0$，即 $\pi - \arccos x \in [0, \pi]$。

[3] 此處使用的誘導公式為 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

因此，$\pi-\arccos x$ 是屬於 $[0,\pi]$ 且它的餘弦等於 $-x$ 的一個值。於是 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

學生感到這一證明生澀難懂。通過觀察反正弦函數圖像而得出性質（1），從嚴格的角度說並不能作為嚴謹的證明，而且同一問題給出了兩種截然不同的證明方法，也不太令人滿意。反三角函數的性質歷來是教學的難點，刊物上多有文章論及。筆者找到一直觀、簡捷、統一的證明方法。下面以（2）為例作一說明。

設 $\alpha=\arccos x$，$\alpha'=\arccos(-x)$，在單位圓中可把角 α、α' 作出來。如右圖，若 α 的終邊為 op，易知 α' 的終邊 op' 與 α 的終邊關於 y 軸對稱。即 $\alpha=\angle p_1op$，$\alpha'=\angle p_1op'$



在 Rt△ pop_1 與 Rt△ $p'op_1'$ 中

$\because |op|=|op'|=1$，$|op_1|=|op_1'|=x$

$\therefore \triangle pop_1 \cong \triangle p'op_1'$

$\therefore \angle p_1op'=\pi-\angle p'op_1'=\pi-\angle p_1op$

即：$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

反三角函數性質證明難點的突破歸根結底在於對反三角函數概念的本質及對於數學符號 $\arccos x$ 本質的深刻理解。

本文中的例 2 作為一道高考題從嚴格的意義上說可以反映出學生對反三角函數性質及定義是否有深刻理解，有一定的難度、不失為一道好題。大多數學生都是按照教師介紹的流行方法解答，特值否定法、排除法確能幫助學生得到分數。令 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 4 個選項立刻得到答案，教學既輕鬆又簡單，師生皆大歡喜。何樂而不為？但這裏既沒對反三角函數概念、性質的理解，又沒有嚴格的數學證明。這就是數學嗎？恐怕無人會認同這種對數學的膚淺理解。毋庸諱言，我們的教育（大陸而言）是緊緊圍繞升學應試服務的。多年來這種解題思想方法在教學中是流行的。教學中反復強化這種方法技巧有失數學教育的價值、存在著弊端。

例 2．當 $x\in[-1,0]$ 時，在下面關係式中正確的是（ ）

（A）$\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$　　（B）$\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$

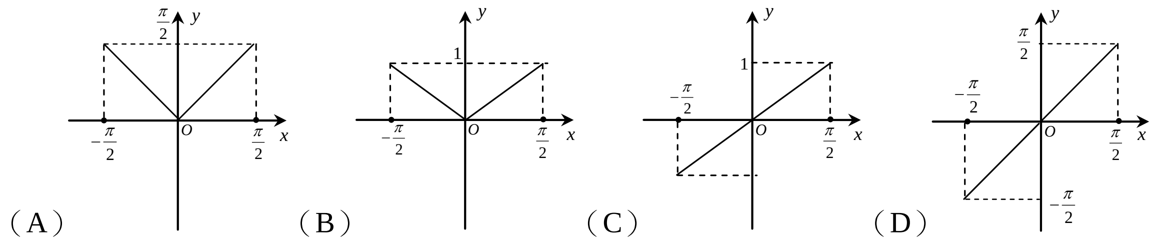
（C）$\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$　　（D）$\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$

題目出處：1986 年普通高等學校招生全國統一考試理科數學卷（2011）

叁、簡單的性質　意外的問題

一、一道高考題　學生的解答

例 3．函數 $y=\arccos(\cos x)$　$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$)的圖像是（　）



題目出處：1987 年普通高等學校招生全國統一考試理科數學卷（2011）

筆者對學生用特值法給出的正確答案（A）不滿意。通過一些數學例子學生已培養起什麼是真正的數學證明的意識，知道朝哪個方向努力。所以學生又給出了下面的解答。在學生沒養成自覺深入反思習慣的前提下，教師的提問是有必要的。

若 $t=\cos\theta$（$\theta\in[0,\pi]$），則 $\theta=\arccos t$，所以 $\arccos(\cos x)=\arccos t=\theta$。由此，當 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 時，$y=\arccos(\cos x)=x$；當 $-\dfrac{\pi}{2}\le x<0$ 時，$y=\arccos[\cos(-x)]=-x$。

二、筆者對教材的反思 傳統解題教學方法的深層弊端

大陸高級中學課本代數（甲種本）（人民教育出版社數學編輯室，1983）先說明了為什麼 $\sin(\arcsin\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$，然後上升為一般結論「一般地，根據函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$」。說明方法比較複雜，我們在此引述一下（人民教育出版社數學編輯室，1983，頁 1-3）：

> 由正弦函數的圖像（圖略）可以看到，在正弦函數的單調區間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，對於 x 的每一個值，$y=\sin x$ 在 $[-1,1]$ 上有唯一的值和 x 對應；反過來，對於 y 在 $[-1,1]$ 的一個值，x 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上也有唯一的值和 y 對應。所以函數 $y=\sin x$（$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$）有反函數。
>
> 函數 $y=\sin x$（$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$）的反函數叫做反正弦函數，記作 $x=\arcsin y$。

習慣上用字母 x 表示自變量，用 y 表示函數，所以反正弦函數可以寫成 $y=\arcsin x$，它的定義域是 $\left[-1,1\right]$。

這樣，對於屬於 $[-1,1]$ 的每一個 x 值，$\arcsin x$ 就表示屬於 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的唯一確定的一個值，它的正弦正好等於已知的 x。也可以說，$\arcsin x$ 表示屬於 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的唯一確定的一角（弧度數），這個角的正弦恰好等於 x。例如，對於 $x=\frac{1}{2}$，$y=\arcsin\frac{1}{2}$ 就表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上使 $\sin y=\frac{1}{2}$ 是唯一確定的一個角，這個角是 $\frac{\pi}{6}$，因為根據正弦函數 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的單調性可以知道，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，除了 $\frac{\pi}{6}$ 以外，其他任何角的正弦都不等於 $\frac{1}{2}$。由此可以得到 $\sin(\arcsin\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。

一般的，根據反正弦函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

筆者作學生時稀裏糊塗地學過這些內容，當了教師也認為沒什麼可講的，照本宣科地講給了學生。講評例 3 時也是按照流行的方法講解。

後來才意識到教材的例題和我們的考題是類似的，為什麼不按教材的方法給出一直接解答？……不知師生是否還記得教材上這段講述，但在此問題上突出表明教材對師生的影響並不是很大。以前對課本中的數學證明膚淺而輕慢的態度不僅害己更重要的是誤學生。

當然，我們可以按教材的方法給出一直接解答，只是在此框架、背景下的表述比較麻煩，解答過程略。我們對教材作深入反思是有益的。經反思其實我們可給出 $\sin(\arcsin x)=x$ 的一更簡單的說明。注意到 $y=\sin(\arcsin x)$ 為一複合函數，令 $y=f(x)=\sin x$，$y=f^{-1}(x)=\arcsin x$，則 $\sin(\arcsin x)=f[f^{-1}(x)]$，而 $f[f^{-1}(x)]=x$ 是一簡單性質。這一高考題從本質上是相同的，令 $y=f(x)=\arccos x$，$y=f^{-1}(x)=\cos x$，則 $\arccos(\cos x)=f[f^{-1}(x)]$。

到此對問題的進展是一非常良好的開端，由 $f[f^{-1}(x)]=x$，得出選擇答案（B）是合情合理的。然而我們的答案與標準答案不一致。若這不是一道高考題，我們很可能到此就結束了。我們極有可能認為是印刷錯誤而放棄。是我們的錯了還是提供的標準答案有誤？難道我們的證明有錯誤？我們如何確保證明的可靠性？我們是如何檢驗給出的數學證明？問題的根源究竟在

哪里？這是一無法回避的好問題。一道小題目引發這麼多問題，恐怕連高考命題者也是始料未及的。本文不討論這一具體問題，只是通過這一例子進一步說明數學教育不只是得出正確答案，其過程有著豐富的內涵。筆者認為：和給出答案相比啟迪培養學生的思維方法更為重要。題目千姿百態，但解決問題的思維方法卻是核心的。只要學生思維能力培養出來了，教師能否解出題目已不重要。喬治．波利亞（Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 327）告誡到「不要企圖靠給別人講很多東西來滿足你的虛榮。喚起他們的好奇心，就足以使他們開竅了。不要讓他們負擔過重，只須投一顆火種，假如有易燃材料，就定會燃起熊熊大火」。教學是一種開啟心靈的藝術──被人輕視、不易掌握的藝術。喬治．波利亞談到「一個沒有親身體驗過某種創造性工作的教師，決不能期望他去啟發、引導、幫助甚至或者鑒別他的學生的創造性活動（Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 438）」、「問題是有這種經驗的數學教師如此之少（Pólya，1945／李心燦、王日爽、李志堯譯，2001，頁 179）」。

不同的思考方法表面結果確是令人尷尬的。功利的評判標準是很難看到思維本質上的差異。每年高考結束刊物都要對高考題作點評、賞析，作為下屆參加高考者也要做歷屆高考熱點題目。我不知教學中講評試題時是否有學生從複合函數性質角度 $f[f^{-1}(x)]=x$ 思考問題而陷入暫時的僵局。由於筆者個人的涉獵面極其有限未見到刊物上介紹這一問題的探討。流行的解法只是特值代入法、排除法。當然，無論是否有人做過同樣類似的探討，這卻是一無法回避、值得反思的好問題。如果按流行的方法技巧去講，表面上學生得到了正確的答案、課堂效果良好。但這樣缺乏的東西就較多了。

三、從對學生解答過程的剖析看啟發契機的把握

筆者在反思例 3 時，由 $f[f^{-1}(x)]=x$ ，得出選擇答案（B）一時曾陷入困境。學生是如何思考例 3 的呢？認真地分析一下學生的解題思維過程對我們因材施教是有幫助的。

雖然中國大陸教材沒有列舉 $f[f^{-1}(x)]=x$ 這一性質，一般流行的教學輔導資料作為數學中的常識大都列舉了這一性質只是沒給出證明及應用。學生曾問過我如何證明。在中學數學教學裏必然要涉及對數學證明的理解，學生需要進一步理解的心理需求在教學中是不容忽視的。這一性質不僅需要給出證明而且證明是簡單的，若函數 $y=f(x)$ 存在反函數，則有 $x=f^{-1}(y)$ ，故 $f[f^{-1}(y)]=f(x)=y$ ，所以 $f[f^{-1}(x)]=x$ 。同理可證 $f^{-1}[f(x)]=x$ 。這一性質及證明未進入教材卻令人不解，許多學生都問過這一性質的證明。有此性質教材就不必繞彎費力先說明為什麼 $\sin(\arcsin\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ ，然後上升為一般結論「一般地，根據反正弦函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$」了。在反思例 3 時，由 $f[f^{-1}(x)]=x$ ，得出選擇答案（B）一時曾陷入的困境也迫切需要對該性質及證明作深層思考。數學為什麼要堅

持演繹證明？通過這一案例學生可能會進一步加深對數學需要證明的理解。如果沒有感受到演繹證明的需求，孤立地給出命題的證明是毫無意義的，反思例 3 出現的始料未及的問題使得我們無法回避……。

通過談話可以知道學生在解題時用到了 $f[f^{-1}(x)]=x$ 這一結論，只是文字表述上不明顯，題目證明也是不嚴格的。用數學語言完整清晰表達思想是不易的，我們回顧一下教材對反三角函數性質的證明及教師為改進反三角函數性質的證明所做的漫長、艱難努力會有更深感受。學生首先是通過特值法得到了答案（A），從學生解答過程看學生利用性質 $f[f^{-1}(x)]=x$ 解題時是意識到了直接選（B）是錯誤的，並做了進一步說明。究竟對問題意識到多麼深入不得而知。我們可更進一步地詢問學生：如果先不用特值法而直接利用性質解題是否會發現錯誤呢？這對培養學生思維是重要的。數學課不僅僅應該向學生灌輸各種事實而且應該去教會他們怎樣提出問題和解決問題。假如學生們在問題的提出過程中自己起過作用，則在學習中就必然會顯得更加主動。喬治．波利亞（Pólya，1945／閻育蘇譯，1982，頁 67）談到：

> 如果一個學生從來就沒有機會去解決一個他自己所發明創造的問題，那麼他的經驗是不完整的。教師可以向學生示範如何從一個剛剛解決的問題引出新問題，這樣做可以引起學生的好奇心。教師也可以留一部分創造發明給學生。

教學中是否能把握好這種契機不僅取決於教師對問題的洞察也取決於學生對問題的認識、理解。喬治．波利亞（Pólya, 1945／閻育蘇譯，1982，頁 205）談到：

> 未來的數學家，正像其他每個人一樣，是通過模仿和實踐來學習的。他應當尋求要模仿的正確模型。他應該觀察一個激勵人心的教師。他應該和一個有能力的朋友競賽。然後，可能是最重要的，他所閱讀的東西應當不僅僅限於流行的教科書而應當閱讀優秀作者的著作，直到他找到一個他天然傾向於模仿其方法的作者為止。他應當享受並探求什麼對他看來是簡單的，或者是有啟發性的，或者是漂亮的。他應當解題，選擇符合他思路的問題，冥思苦想其解答並發明新問題。用上述方法以及所有其他方法，他應該力爭做出他的第一個重要發現；他應當發現他自己的愛好與厭惡、他的情趣和他自己的擅長。

我們也可從喬治．波利亞的這段論述來理解阿達瑪在《數學領域中的發明心理學》（Hadamard, 1945／陳植蔭、肖奚安譯，1989，頁 92）中提出的觀點「天才乃是大自然的造化，並獨立於任何教育」。

這篇案例形成文字後學生也看了，筆者只是引導學生這裏有一個問題需要探討。只是通過具體問題培養學生的問題意識。只有學生願意去解決它，下決心去解決它，它才能真正變成學生的問題。當時解決或過一段時間遇到相關問題時都可以。學生有了獨立的思考意識及對數學證明的鑒賞能力，教師的教學就是成功的，沒有必要再過多地追問。但真正培養出這種素養的學生是比較難的。

肆、師也者，教之以事而喻諸德也

一個小的選擇題，人們可以漫不經心地選擇一答案也可經過思考做出比較合理選擇，也可能由於思維深一時無法給出一準確、合理的選擇——僅僅向合理的方向邁出一步。單純從一選擇答案是很難判斷衡定一個學生的素養。以狹隘的分數衡量學生不僅失之偏頗而且會漸漸走向極端、嚴重背離教育的根本宗旨、目的。

真正的教育不僅傳授真理，而且向學生傳授對待真理的態度，激發他們對於善良事物受到鼓舞和欽佩的情感，對於邪惡事物的不可容忍的態度。遺憾、可悲的是，比起真實的教育來，當今中國人更在乎一紙文憑。文憑值錢，而教育不值錢。我們的教育是緊緊圍繞升學應試服務的。大多數教師都在按流行的方法教學，很少關心對問題的深層思考，教育已經愈來愈嚴重地淪為功利主義的工具。這種方法從表面上看是有成效的、但卻有失數學教育的價值、存在著嚴重弊端。尤其對分數的盲目崇拜、斤斤計較折射出教育內涵之貧乏。

現在的教育走入了誤區、網路上言辭激烈的批判甚至認為現在的教育是南轅北轍—民國教育培養了一批大師級人物、當今呢？……許多家長在子女教育投資上是在所不惜，教育巨大的投入究竟培養出了什麼樣的人才、結果又如何？……中國著名科學家錢學森曾經發出「為什麼我們的學校總是培養不出傑出人才？（葛劍平，2012）」這樣的疑問。錢學森之間看似簡單，卻成為中國教育界的一個刻骨銘心的待解難題，需要整個教育界乃至社會各界共同破解已成共識。通過具體案例剖析多年來高考應試教育的模式人們可以對教育暴露出的淺層問題窺見一斑。

筆者詢問過高分學生解答問題的思路，學生受流行解題方法、技巧的影響是明顯的，課下也和個別學生對問題作過深入交流、探討，在解題技巧基礎上再促使學生進行深入反思的教學培養出來的學生思維是有深度的，但在應試中並不佔優勢或不盡人意。

我們的教育（大陸而言）是緊緊圍繞升學應試服務的，急功近利的應試教育有悖於教育的根本目的。中國儒家經典《論語．學而篇》強調到「君子務本，本立而道生」，素有「文以載道」的優良文化傳統。教育不僅要傳授知識，而且更要長期堅持不懈、潤物無聲地從點點滴滴中培養學生對待真理的態度、理性探索精神。在某種程度上對待真理的態度比發現更為重要。

誌謝

感謝臺灣學術界對文章提出具有建設性修改建議的辛勤付出和對「文章立意甚佳」、「從與學生的訪談中可瞭解其學習歷程，進而反思教學與思考流程並修正，是很好的研究方向」的肯定，感謝臺灣學術界提供的交流平台。

參考文獻

1986年普通高等學校招生全國統一考試理科數學試題及答案（2011年7月15日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/7cf80aea551810a6f52486f3.html

1987年普通高等學校招生全國統一考試理科數學試題及答案（2011年7月15日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/0d3f062ee2bd960590c677d3.html

2003年普通高等學校招生全國統一考試（全國卷）：數學（理工農醫類）（2013年2月21日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/c2be29f0aef8941ea76e05c4.html

人民教育出版社數學編輯室（1983）。**高級中學課本代數：甲種本（第二冊）**。北京：人民教育出版社。

葛劍平（2012年3月5日）。為什麼我們的學校總是培養不出傑出人才？**人民網**。查詢日期：2013年9月17日，檢自：http://edu.people.com.cn/GB/8216/239691/17291750.html

Hadamard, J. (1989)。**數學領域中的發明心理學**（*An essay on the psychology of invention in the mathematical field*；陳植蔭、肖奚安譯）。南京：江蘇教育出版社。（原作出版於1945年）

Kline, M. (2005)。**西方文化中的數學**（*Mathematics in western culture*；張祖貴譯）。上海：復旦大學出版社。（原作出版於1953年）

Pólya, G. (1982)。**怎樣解題**（*How to solve it*；閻育蘇譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1945年）

Pólya, G. (2001)。**數學與猜想：合情推理模式**（*Mathematics and plausible reasoning: Patterns of Plausible Inference*；李心燦、王日爽、李志堯譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1954年）

Pólya, G. (2007)。**數學的發現：對解題的理解、研究和講授**（*Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*；劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1962年）