

ISSN 2312-7716

第 35 卷第 2 期  
二〇一四年十月  
VOL. 35 NO. 2  
October 2014

# 臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

**發行單位** | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

## 編輯委員會

主編	左台益	國立臺灣師範大學數學系
副主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
編輯委員	洪儷瑜	國立臺灣師範大學特殊教育學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	中原大學教育研究所
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
	劉曼麗	國立屏東教育大學數理教育研究所
	劉遠楨	國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所
	蔡文煥	國立新竹教育大學數理教育研究所
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所

---

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmeassistant@gmail.com
網址	<a href="http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&amp;fid=74">http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&amp;fid=74</a>

---

## 附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。

---

**版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究**

**2013-2014 年編審委員**  
**2013-2014 Editorial Review Board**

左台益 Tai-Yih Tso  
國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

唐書志 Shu-Juh Tang  
臺北市立百齡高級中學  
Taipei Municipal Bailing High School

李俊儀 Chun-Yi Lee  
國立臺北大學師資培育中心  
Center of Teacher Education,  
National Taipei University

袁媛 Yuan Yuan  
中原大學教育研究所  
Graduate School of Education,  
Chung Yuan Christian University

李政豐 Cheng-Feng Li  
國立竹南高級中學  
National Chunan Senior High School

張宇樑 Yu-Liang Chang  
國立嘉義大學教育行政與政策發展研究所  
Graduate Institute of Educational Administration and  
Policy Development, National Chiayi University

李源順 Yuan-Shun Lee  
臺北市立大學數學系  
Department of Mathematics,  
University of Taipei

許技江 Chi-Chiang Hsu  
國立楊梅高級中學  
National Yangmei Senior High School

林延輯 Yen-Chi Lin  
國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

許慧玉 Hui-Yu Hsu  
國立新竹教育大學數理教育研究所  
Graduate Institute of Mathematics and Science  
Education, National Hsinchu University of Education

林原宏 Yuan-Horng Lin  
國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

陳建誠 Jian-Cheng Chen  
明志科技大學電機工程系  
Department of Electrical Engineering,  
Ming Chi University Of Technology

林素微 Su-Wei Lin  
國立臺南大學測驗統計所  
Graduate Institute of Measurement and Statistics,  
National University of Tainan

陳彥廷 Yen-Ting Chen  
國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

洪儷瑜 Li-Yu Hung  
國立臺灣師範大學特殊教育系  
Department of Special Educatuon,  
National Taiwan Normal University

陳嘉皇 Chia-Huang Chen  
國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

英家銘 Jia-Ming Ying  
臺北醫學大學通識教育中心  
Center for Liberal Arts,  
Taipei Medical University

陳蕙茹 Hui-Ru Chen  
高雄市立新興高級中學  
Kaohsiung Municipal Sinsing Senior High School

**2013-2014 年編審委員 (續)**  
**2013-2014 Editorial Review Board (continued)**

**楊志堅 Chih-Chien Yang**

國立臺中教育大學教育測驗統計研究所  
Graduate Institute of Educational Measurement and  
Statistics, National Taichung University of Education

**蕭淑娟 Shu-Chuan Hsiao**

臺北市立萬華國民中學  
Taipei Municipal Wanhua Junior High School

**楊凱琳 Kai-Lin Yang**

國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

**謝佳叡 Chia-Jui Hsieh**

國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

**楊德清 Der-Ching Yang**

國立嘉義大學數理教育研究所  
Graduate Institute of Mathematics and Science  
Education, National Chiayi University

**謝閻如 Kai-Ju Hsieh**

國立臺中教育大學數學教育學系  
Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education

**劉遠楨 Yuan-Chen Liu**

國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所  
Graduate School of Educational Communications and  
Technology, National Taipei University of Education

**鍾靜 Ching Chung**

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系  
Department of Mathematics Education and Information  
Education, National Taipei University of Education

**鄭英豪 Ying-Hao Cheng**

臺北市立大學數學系  
Department of Mathematics,  
University of Taipei

**蘇意雯 Yi-Wen Su**

臺北市立大學數學系  
Department of Mathematics,  
University of Taipei

## 主編的話

---

《臺灣數學教師》原名為《台灣數學教師(電子)期刊》，為能更符合期刊要義，經編輯委員會議與台灣數學教育學會理監事會議討論後決議更名。本期刊從 2013 年起一年發行兩期，於每年四月與十月出刊，本期編號為第 35 卷第 2 期。

本期刊作為數學教育者溝通交流的平台，同時提供數學教師教學經驗與想法，以及數學教育研究者教學實驗或理念構想相關成果發表的園地。近來，國內外教育單位均重視教育改革，以因應科技發展中的社會變遷。國內也正推動十二年國教，各方期待能有新的教育氣象。數學教育界在翻轉教學的議題中，亦熱衷討論能以學習者為中心可能進行的數學教學模式。在本期刊登的兩篇論文即在討論可以在數學教室進行的教學設計。本期第一篇文章是由林勇吉、秦爾聰與段曉林共同著作之〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉。本文首先從五個觀點概論數學探究之意義，之後從文獻中簡述數學教育探究的架構，最後以三個數學探究教學實例來展現在課室中實施的相貌。本文亦經三位數學教育者的論文評析，分別是左台益的〈數學教師的挑戰：數學探究教學〉、英家銘的〈關於數學探究之意義初探與教學設計實例一文之評述〉以及蘇惠玉的〈數學探究之意義初探與教學設計實例之我見〉。

本期刊第二篇文章為〈從活化教學議題談國中數學教學〉，由王茂源與楊德清共同研究發表。作者們從訪談資料中分析認同活化教學的國中數學教師對落實此教學的意圖與策略。研究發現顯示透過教師彼此間教學分享，可以增強教師活用不同的教學策略。

本期刊能順利發行得感謝許多編審委員無私無償的貢獻及編輯助理行政的努力。也期盼本期刊給讀者——尤其是數學教師——有效且有用的閱讀。

《臺灣數學教師》主編

左台益 謹誌



# 臺灣數學教師

第 35 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2014 年 10 月出刊

---

## 目錄

- |                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 數學探究之意義初探與教學設計實例<br>／林勇吉、秦爾聰、段曉林 | 1  |
| 從活化教學議題談國中數學教學<br>／王茂源、楊德清       | 19 |
| 論壇<br>／左台益、英家銘、蘇惠玉               | 31 |

# Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 35 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2014

---

## CONTENTS

- |   |    |
|---|----|
| Mathematical Inquiry and Its Teaching Examples<br>/Yung-Chi Lin, Erh-Tsung Chin, Hsiao-Lin Tuan               | 1  |
| The Activated Teaching Issues in Junior High School<br>Mathematics Teaching<br>/Mao-Yuan Wang, Der-Ching Yang | 19 |
| Forum<br>/Tai-Yih Tso, Jia-Ming Ying, Hui-Yu Su   | 31 |



林勇吉、秦爾聰、段曉林（2014）。  
數學探究之意義初探與教學設計實例。  
臺灣數學教師，35（2），1-18。

## 數學探究之意義初探與教學設計實例

林勇吉 秦爾聰 段曉林  
國立彰化師範大學科學教育研究所

本文藉由回顧先前的文獻，從五種觀點來闡述何謂數學探究（mathematical inquiry）、提出數學探究教學架構、探討數學探究與數學解題的差異，最後列舉國小至高中等三個階段的教學設計，具體說明數學探究教學為何。

**關鍵詞：**探究、數學探究、數學探究教學

## 壹、前言

「探究」是科學中耳熟能詳的詞彙，這可追溯自 Dewey (1910)，他鼓勵 K-12 的科學教師使用探究為主要的教學策略，儘管當時對於探究的意義，可能與當代略有不同，但我們無法否定探究在科學學習上的重要性 (Bybee, 2000)。相對於「科學探究」，「數學探究」似乎受到較少的關注，然而，文獻指出「數學探究教學」能有效率提升學生的「數學解題能力」(Whitin, 2006)、「溝通能力」(Chin, Lin, & Lin, 2009) 與「後設認知」能力 (Chin, Lin, Chuang, & Tuan, 2007)，並能降低「學習焦慮」，增進學習效能 (Chin, Lin, & Wang, 2009)。此外，在數學探究中，學生必須探索 (explore) 和檢驗解題策略，用以解決開放式的問題，因此數學探究也與建構主義的學習哲學觀相符 (Inoue, 2011)。

有鑑於數學探究的重要性，但並沒有研究者彙整過去文獻對數學探究提出詳盡說明，也沒有學者比較數學解題與數學探究的差異。本文將回顧過去文獻，經由五個觀點具體闡述數學探究的意義，並且列舉三個數學探究教學設計實例，幫助後續研究者更深入了解數學探究。

## 貳、數學探究的意義

數學探究可簡單解釋為「問題－過程－解答－延伸」的整體程序。換言之，它是發現問題、思考問題與解決問題的過程。Romberg 與 Kaput (1999) 認為數學應被視為人類活動 (human activity)，反映出數學家工作的性質。這個性質是經由探究來學習，例如，知道為何所提供的方法能夠運作、發現新的方法，證明主張等；Jaworski (1994) 認為數學探索 (investigation，意味數學探究) 似乎是將學生融入在尚未定義清楚 (loosely-defined) 的問題，學生問自己問題，依據他們自己的興趣和喜好設定目標，做他們自己的數學，進一步獲得樂趣；Yerushalmy、Chazan 與 Gordon (1990) 進一步提出數學探究是學生使用「數學家的態度」進行探索。

換言之，數學探究是數學知識發展的過程。在此過程中，我們必須考慮「數學到底是甚麼？」，「數學知識如何發展？」，這兩個問題與數學本質息息相關，在建立了數學本質的哲學思維後，我們分別從「如何溝通數學思維」(師生互動模式)、「數學應該如何被教」(課程綱要的信念)、「數學解題行為」(擬題) 與「現實世界與數學世界的關聯」來探討數學探究：

### 一、數學本質的觀點

關於數學本質觀點，我們主要的論述主軸在「動態的知識觀」，以及「知識如何獲得」這兩方面，另外也輔以數學知識除了是演繹與符號的學科外，它也是探索的過程，這與知識如何獲得相關，整體說明如下：

哲學家對於數學本質觀點（知識論，epistemology）歷經不斷的改變與演進。古希臘時期（約西元前四世紀）的哲學家認為知識是客觀、且永恆不變的真理，如柏拉圖（Plato）認為知識存在於感官以外的獨立世界，它是固定且不可改變（Dossey, 1992）。這個想法一直延續到二十世紀初期，縱然哲學家們對於數學本質存在爭議，但這都沒有動搖「數學是客觀永恆真理」的立場，學者們所爭議是如何詮釋這個永恆真理的方法。

晚近，學者對上述想法提出新思維。Peirce（1877/1982）提出知識的動態觀（dynamic view of knowledge），認為知識是由不確定性引起的探究過程（process of inquiry motivated by uncertainty），這個知識是動態的想法，影響了 Dewey（1933）、Kuhn（1970）、Lakatos（1976）和 Kline（1980）等人的哲學觀，他們提出許多科學理論與數學知識隨著時代變遷而不同的看法。因此，Lakatos 在其證明與反駁（proofs and refutations）一書中主張，定義並非永遠為真，常常需要透過後來的更深入的思維進行修補。他以一段師生關於尤拉多面體公式（ $V-E+F=2$ ）對話作為開場，強調不斷提出反駁（反例）與重新論證（argument 或證明），是數學知識發展的必經之路，意即反駁啟動對原臆測的精進。

上述知識動態觀的想法一路延續至根本建構主義學者的思維（e.g., von Glasersfeld, 1990），他們認為知識是社會建構（socially constructed）的產物，所以既不是既定的（predetermined），也不是絕對的（absolute）。從數學史的例子，也許可以更明白這一點：古希臘時代認為所有的數都是有理數，無理數的發現在當時造成整個學界的動盪與不安；在非歐幾何中，三角形的內角和不是 180 度，內角和 180 度只存在歐基里德的幾何思維中，當然，現實生活中亦可展現非歐幾何的思維，例如在一個「曲面」畫三角形。

從這個角度來看，數學知識本身就充滿模糊（ambiguity）與衝突（conflict），Borasi（1992, 1996）認為可透過這個特性來幫助學生探究。例如：（1）利用錯誤（題目）當跳板，引起學生思考「為何錯」與「該如何修正」等問題；（2）藉由提出與現狀不同的另有（alternatives）解答，創造模糊和衝突，例如問學生：「如果改變一些假設、定義或目標，會發生什麼事？」；（3）探索學生不熟悉的新概念。例如非歐幾何：討論如何在方格紙上畫「圓」（此時如何定義圓？如何在方格紙中呈現？）。

此外，就數學特質來說，數學本質普遍被認為是計算（calculation）與演繹（deduction）的學科，但是數學其實還包含了猜測（conjectures）、估計（estimation）與觀察樣式（observation of patterns），這就是所謂數學上的探究。換言之，數學是一種探索的過程，目的在於揭露隱藏在世界背後的規則（Jarrett, 1997），Jarrett 更具體提出數學探究的架構為：（1）在一個資源豐富的環境下學習（具有適當的學習輔助工具、實驗器材）。（2）思考問題並寫下或畫下一些他們初步探

究的想法。(3) 提出假設。(4) 擬定探索的計畫 (investigation)。(5) 蒐集資料。(6) 分析這些資料。(7) 形成結論。(8) 溝通分享這些發現。

## 二、師生互動的觀點

除了從理論來看數學探究外，我們期待從學生與教師的行為（社會文化環境造成）來解釋甚麼是數學探究，這就是本研究所稱的師生互動觀點。Wood 等人的研究 (Wood & Turner-Vorbeck, 2001; Wood, Williams, & McNeal, 2006) 由心理學與社會學的角度，探討在不同課室文化 (culture) 中學生所形成的互動模式 (interaction pattern)。他們的研究發現在改革取向的課室中 (reform-oriented classes)，主要有兩種互動模式，分別是「策略報導」(strategy reporting) 和「探究 / 論證」。「策略報導」的課室文化中，學生報導解題的不同策略，有時候學生會被老師提問他們是如何找到解答的，但是幾乎不會有學生發問。在「探究 / 論證」類別中，學生提供不同的解答方法方面跟「策略報導」類似，但是需要解釋「為什麼」，他們必須對自己的想法提出理由說服其他學生（或老師）；此外，學生或老師在此課室中彼此問問題進一步澄清自己的想法或瞭解，這些討論通常包含了挑戰 (challenge) 或是不同意對方的想法，藉由這個過程促進彼此想法的交流，並且也刺激學生思考如何辯證 (justification) 自己的觀念 (ideas) (意味對自己的想法提出合理的解釋或支持)。

Wood 等人的實徵研究告訴我們在改革取向的課室中，師生的互動模式為何；Anderson (2002) 提出只要是符合新課程綱要（改革取向）的教學，就可以稱作探究取向的教學。透過 Anderson 的觀點，我們認為 Wood 等人的研究可以作為詮釋數學探究的一種方向，是故，當課室形成「策略報導」或「探究 / 論證」的文化時，兩者都是數學探究教學，只是「探究 / 論證」的探究層次高於「策略報導」。Zion、Cohen 與 Amir (2007) 認為探究教學活動是在一條連續光譜上，兩個極端分別是結構式探究（記憶步驟）與完全開放式的探究（教師不介入），是故，探究可以有層次之分。

## 三、擬題的觀點

擬題是數學家發展數學知識第一個步驟，從觀察既有的事實中產生新的質疑與問題，這可以呼應到「數學知識發展歷程」的數學本質上。「擬題」(problem posing) 從「數學解題」(problem solving) 的觀點來看數學探究，它較傾向於教學的角度。擬題是數學探索 (exploration) 中的一個重要元素 (Cai & Hwang, 2002)，在探究中，做好「形成問題」這件事 (formulating a problem well) 通常比找到它的解答來的更有意義。「擬題」也與「解題」彼此相互呼應 (e.g., NCTM, 2000)，如果我們認同解題是一種數學探究行為，那麼擬題也應是數學探究的一部分；更進一步來說，擬題是探究的開端。

Whitin (2006) 使用擬題策略於數學探究教學，這裡的擬題並非給予學生產生問題的機會，而是教師運用擬題，引發學生的數學探究。Whitin 以學生的「觀察」和「問題」當作跳板，做為進行探究的機會，例如當學生知道  $6+4=10$ ，可以進一步詢問有哪些三個數相加，也可以得到同樣的結果（如  $2+4+4$ ； $3+4+3$ ）。更進一步，Whitin 使用擬題（problem posing）做為數學探究的工具。這意味找出（identifying）給定問題的特性（attribute），之後改變一個或幾個特性，創造新的問題，這個過程與上述例子相同。Whitin 使用擬題策略的原因，是因為擬題其實融入一些數學探究重要元素於其中，包括：細心觀察、使用多樣的觀點、產生問題、提供臆測、設計與執行計畫、反思這個結果等。

Lee (2001) 對數學探究也提及類似的觀點，他認為數學探究起始自學生的臆測（conjecture），並且經由學生自主佈題與解題，組織整個探究過程，例如當學生處理了「偶數加偶數還是偶數」的問題後，有些學生可能會好奇的問「那奇數加奇數呢？」，這些就會變成探究的機會，教師可以把握這些機會，讓學生探究這些問題，或是將這些問題變成學生的回家功課。原來的小問題，可以導致更多的問題和臆測，這個步驟，可以變成教師進入下個單元前的轉折，然而，學生除了偶然的提問，更需要教師刺激他們探究，教師可以藉由與學生討論的機會，引發一些學生想探究的問題。

#### 四、課程標準的觀點

課程標準所揭露的探究是整個社會或研究社群所期待的數學教學，而課程標準的發展來自於數學本質與數學教育研究。American Association for the Advancement of Science (AAAS, 1993) 認為的數學探究，就像是數學家在做數學所進行的工作，數學可以被描述為一個探索的循環（a cycle of investigation），透過這個發展數學觀念（mathematical ideas）的有效性。它進一步提出數學探究的循環（cycle），分別是：「表徵」（representation）、「操弄」（manipulation）與「驗證」（validation）。「表徵」意謂使用符號或算式來表徵真實，在這個過程，學生最主要目標是能理解用符號來表徵抽象，並且應用來解題。例如想像一些數量、分配它們的性質、選擇某些運算、用符號表徵事物、設定問題、然後依據邏輯規則、移動這些符號、獲得答案，這些就是操弄的過程。「驗證」在數學中是判斷（judgment），而非權威（authority），一個解答的好壞，應該關係到這個問題是如何形成的，以及解題的過程如何實施，在真實的數學探究中，唯一「正確」的答案並不存在。AAAS (1993) 認為學生應該要有機會使用整個循環（use the entire cycle），去執行他們的數學探究，然而，AAAS 也認為，數學探究雖然包含上述三個主要過程，但這些過程的次序（order）並非一成不變的，也不要將所有經歷這三個過程所產出的探究結果當成正確解答，換言之，這三個過程有其必然重要性，但不要將這三個過程當作一種數學探究或求得

數學解答的固定模式，它可能會針對不同的探究有不同的重視之處，例如某個當我們想應用數學模型於經濟學上，那麼一個有效的探究應該在於其探究的結果可否解決實際的經濟學問題。從上述來看，AAAS 著重於描述「數學行為」的本質。

英國教育技能部 (Department for Education and Skills [DfES], 2001, p. 21) 主張「探究是數學的核心，探究技能可以讓學生問問題、定義探究的問題、計畫研究 (plan research)、預期結果 (predict outcomes)、推論與作結論」。DfES 主要在強調探究的重要，並且定義探究教學為何。

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) 在評量標準二、「多元的資訊來源」(multiple sources of information) 中定義：數學知識是將數學概念和程序整合 (integration) 在一個連貫 (coherent) 且有意義 (meaningful) 的結構，意謂學生能夠在不同形式的任務 (task) 中，展現整合性的數學知識，因為數學知識是整合、連貫且有意義的結構，為了讓學生獲得整合性的數學知識，課程標準倡議 (advocate) 探究取向 (inquiry orient) 教學，應以解題為媒介，透過應用所學的數學知識達成，這意味將課本中所學的數學知識進行統整與融會貫通，並實際應用以解決真實情境化的問題，在此過程中，學生將有進一步的機會再次統整所學，並獲得新知識。NCTM(1989) 進一步解釋他們所定義的「解題」，認為解題就是「探究」與「應用」(application) 的方法：

數學課程必須包含多樣的「探究」和「應用」的經驗，這個探究與應用是以解題做為手段，如此，學生能夠：1. 使用解題取向去探索 (investigate) 和瞭解數學主題；2. 由數學內與數學外的情境，型塑問題；3. 發展和應用多樣的策略去解決問題，注重多重的步驟和非例行之問題；4. 產生解答和策略至新的問題情境；5. 在有意義的使用數學中，獲得自信 (p. 75)。

NCTM (2000) 在「推理與證明」的課程標準中提及：「教師應該努力的創造討論、提問和聆聽的教室風氣。教師應該期待他們的學生去尋找、形成 (formulate)、批判解釋，因此課室轉變成探究的社群」(p. 346)。那麼甚麼是「探究的社群」？簡單的說，就是課室中充滿對話過程。我們認為 NCTM (1991) 對於「課室中對話」(discourse of a classroom) 的說明隱含著對「探究的社群」之解釋，NCTM (1991) 解釋「課室中對話」包含了數個面向：表徵的方式、思考的方式、說話的方式、同意和不同意的方式 (the ways of representing, thinking, talking, agreeing and disagreeing)，換言之，這代表課室中我們如何提出證據去說服他人，這些方法表現了學生所學習的數學是人類探究的領域 (a domain of human inquiry)。此外，NCTM (1991) 也提到對話 (discourse) 與建立數學知識的基本 (fundamental) 有關，因為「對話過程」或「數學家論證

過程」讓數學變得真實與可理解，意即「對話過程」讓這個知識可被大眾信服；而數學推理和證據是這個對話的基礎，意味數學推理和找出證據（論證）在課室對話中很重要。

NCTM 的觀點與前述數學本質的觀點相符，他們皆認同數學是人類探究後的產物，那甚麼是 NCTM 所認為的「探究」？它是數學解題、它是求知的方法，更具體的說它是「形成」與「解決」問題、產生臆測（making conjectures）、建立論證（constructing arguments）、驗證解答、與評價數學主張的合理性（evaluating the reasonableness of mathematical claims），這也是 NCTM（1989, 1991）所稱的數學力量（mathematical power）。

## 五、建模的觀點（modeling）

建模的觀點主要在強調數學如何與真實世界連結，這個連結的程序就是一種數學探究的程序。Wubbels、Korthagen 與 Broekman（1997）的數學探究教學模型，是經由一連串的步驟，將真實世界的問題轉化（translation）成數學問題，並且利用數學的方法創造出（creation）答案後，再轉化到真實世界中，之後藉由反思（reflection）獲得更精煉（refined）的問題、一般化（generalized）的問題、或是新的問題（圖 1），這種真實世界與數學世界間的交互轉換過程，便是他們所謂的數學探究。

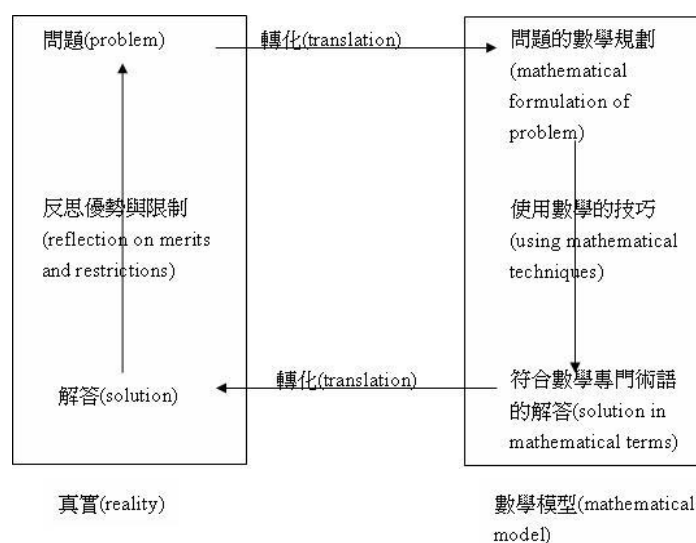


圖 1 數學的探究模型。翻譯自“Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education,” by T. Wubbles, F. Korthagen, and H. Broekman, 1997, *Educational Studies in Mathematics*, 32, p.7.

我們整合上述學者意見（圖 2），認為「數學探究」是指數學知識發展的過程與方法，在這個構念底下，學生猶如數學家在探索知識，過程中充滿不確定性和衝突性。在課室中，教師主要的工作是引起學生討論與論證，而學生應論述自己的想法，挑戰其他同學的思維。擬題是一

個幫助學生探究的策略，教師利用學生的觀察結果與提問，與學生共同溝通，創造一些新的問題，引發學生的探究。相對的，課程中必須安排讓學生有臆測、推理、論證、解題與展現多元策略與開發新問題的機會。從真實數學（realistic mathematics）的觀點來看，數學探究也是學生如何發展數學模型解決生活實際問題的過程。

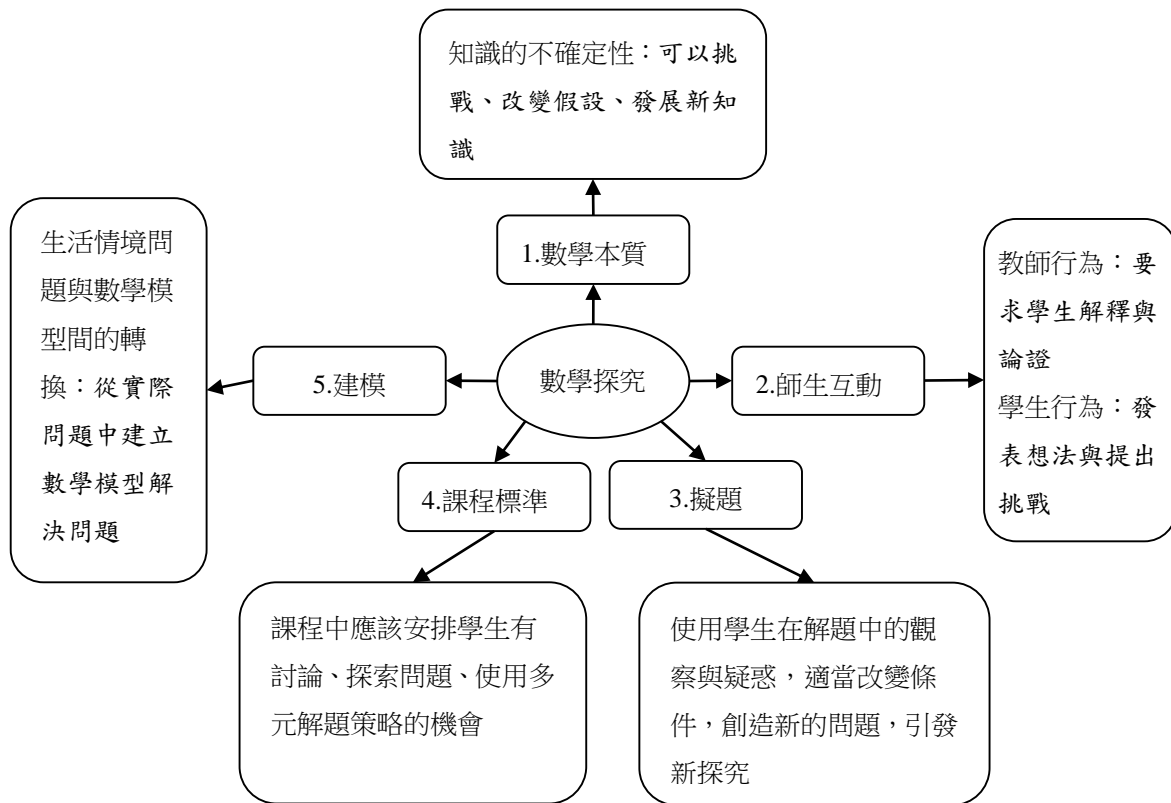


圖 2 數學探究的五個觀點

### 參、數學探究與解題

數學解題被課綱（NCTM, 2000）視為學習的核心，這裡想要解釋他們細微的差異。事實上，整體來看，把數學探究當成數學解題也是正確的。

數學解題是數學探究的子集。Baroody 與 Coslick（1998）認為數學探究，包含了三個過程：「數學解題」、「數學推理」和「數學溝通」。廣義的來說，數學解題是指整個解決問題的過程，包括形成問題（或被給予問題）與使用解題策略等；數學推理，泛指所有在數學中的邏輯，包括直覺、歸納、演繹與臆測等，傳統上，探索一個問題應該是來自臆測，接著再經由直覺或歸納推理獲致結論或主張；數學溝通，是指澄清或反思對於數學概念的思考，藉由這個合作學習的過程，互相檢驗彼此的相法，並促進數學概念的思考與瞭解。



Lederman 與 Niess (2000) 指出探究所強調的精神，比解題提供了更多瞭解學生思考的機會，因為探究強調的「臆測」與「論證」(或證明)，較能充分顯露數學學習的過程；Marzano 等人 (1988) 提出探究是用來預測和解釋這個世界，符合數學建模 (mathematical modeling) 的精神，比解題的層次更高深。

Borasi (1996) 認為解題取向，是指問題是由教師設定的，並且教師已經預先知道解答；發現學習則是學生的發現已在事前設定先好，不會產生更多的疑問；然而在探究的模式下，學生參與在一個更開放與更具生產性 (generative) 的過程 (意味能有較多的數學知識產出)，在事前，不管是教師或學生都可能不知道探究的結果，並且學生通常主動的融入，關於探究的方向與範圍的決策，然而這並不意味教師放棄他計畫與精心編排 (orchestrating) 課室活動的角色，對於探究取向的數學教學，教師並沒有減少他們的責任，反之，他們必須承擔新的任務，即是，他們必須提供刺激與結構的活動，幫助學生進行探究。

## 肆、數學探究教學的架構

數學探究教學並沒有具體的固定方式 (Borasi, 1992)，重點在於讓學生能自主探索、找到問題的答案，相關論述如下：

Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998) 提出四個數學探究階段 (稱之為「探究環」(inquiry cycle)，代表這四階段是一個循環，階段四可再回到階段一)：

1. 準備與聚焦探究 (setting the stage and focusing the inquiry)。此階段是探究的暖身階段，主要工作是：(1) 透過教師介紹活動，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識；(2) 並且挑戰學生的原始想法，點燃學生的興趣，(3) 聚焦在值得討論的議題上。
2. 執行探究 (carrying out the inquiry)。在上述階段 1. 中決定出問題與探究的方向後，(1) 學生開始進行臆測、分析、推理與試驗等探究行為，(2) 並經討論後，獲得初步的結果。
3. 綜合 (synthesizing) 和溝通來自探究的結果。此階段是將上個階段的探究產生最後結論。過程包含：(1) 與他人討論，藉由相互辨證、論證的過程，獲致最後結果；(2) 學生必須學習如何闡述自己的想法 (如運用表格、圖形、證明等) 與回應他人的意見。(3) 另外一方面，教師在此階段中，適時引導或幫助學生作結論 (可使用閱讀文章或讀教科書之策略)。
4. 評估與延伸 (taking stock and looking ahead)。此階段的核心是「反思」，內容如下：(1) 學生必須反思這整個探究的過程；(2) 確認與討論在探究過程中所獲得的數學知識；(3) 教師也藉由評鑑學生的探究，幫助學生精進下次的探究；(4) 最後，學生可以依據對探究結果的反思，形成新的探究問題，開啟下一個新的探究循環。

McNeal 與 Simon (2000) 舉出數學探究教學是：(一) 由老師或學生佈題；(二) 學生在小組中工作；(三) 教師要求學生提出具說服力 (persuasive) 的論證；(四) 並且學生討論這些論證。因此，教師與學生在數學探究教學中的工作分別是：

1. 教師的工作是：(1) 要求解釋、(2) 要求澄清與示範、(3) 要求小組提出論證、(4) 佈新的問題。
2. 學生的工作是：(1) 發表想法 (ideas)、(2) 問彼此問題、(3) 在討論中挑戰 (challenge) 或精煉 (refine) 想法。

Inoue (2011) 認為數學探究是學生在開放問題中，有機會探索和驗證不同的解題策略。在他的研究中，他認為數學探究教學有四個主要的元素：(1) 教師給予一個能引起豐富概念性討論 (conceptual discussion) 的數學問題。(2) 學生分組或個人解題，而教師巡視其中。(3) 全班性討論。比較、對比不同解題策略，並獲得一致的共識。(4) 總結。其中，步驟 (3) 是整個數學探究教學的關鍵。

綜合上述，數學探究教學起始於 (1) 問題、(2) 接著學生開始推理與論證對問題的猜測、(3) 再與同學間進行討論，並比較不同的策略、(4) 最後總結整個學習，發展較精緻的想法。在其後的教學實例中，我們將以 Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998) 作為架構進行分析，(1) 因為其架構將 McNeal 與 Simon (2000)、Inoue (2011) 的想法以較有邏輯系統性的呈現，有助於清楚呈現教學的流程。此外，相較於其他兩位學者，(2) Borasi 在其著作中 (Borasi, 1992; Siegel et al., 1998)，亦有依據探究環架構呈現其教學範例，可以幫助我們更加瞭解如何使用這個架構。

## 伍、數學探究教學實例

在下面的教學案例中，我們依序呈現國小、國中與高中三個階段的數學探究教學，藉此展現探究教學可在各個層級實施。

在教學上，國小階段的學生應該著重於讓學生解釋或發表自己的想法，或是讓學生知道或體驗到數學思考的過程，不須將焦點放在讓學生學習較高階的數學知識 (非當前教學主題)，或是更抽象的思考能力上，例如過度要求學生必須要有形式化證明的能力。國中程度的學生，教師可以嘗試引導學生更進階的探究層次 (這同時包含了學生的探究能力與學習或使用更進階的數學知識)。簡而言之，可以與學生有更多的討論與互動，引導他們產生較抽象的數學知識，例如本文的範例二，除了以純粹數字來探討兩個量的關係外，我們期待學生能夠用代數表徵兩個量的一般性 (使用  $x, y$  形成通式)。至於高中階段的學生，我們將賦予他們更多的自主性，教師的角色是一個富有知識的諮詢者、討論者，學生應該更自主的主導自己的探究，甚至自己擬定探究問題。綜合上述，不同階段與教師的介入程度有關，越低階段的學生，需要教師越多的引

導與協助。國小階段的學生重點在於體驗探究過程，至於探究的成果（學習目標）需要老師大量的協助，國中階段的學生應該可以在老師適當的幫助下，透過探究過程來學習數學知識，而高中階段的學生可以擁有更開放的探究過程，老師的介入程度最低。

在引入這些不同的例子中，我們嘗試用實際在文獻中發表的範例，換言之這些教學案例曾經被實際實施過，並非只是一種理念設計，強調這些都是可行的範例。此外，我們也交錯一些不同主題的設計，例如國小、高中階段的課程內容直接來自課本內容；而國中階段則是課外情境化的問題與課本連結。

從前述階段，我們可以感受到數學知識是人類探索以後的結果，在這些教案中，我們想要展現如何去探索建立這些知識，意即如何想問題、解問題、發表想法、在別人挑戰後（反駁），精進自己的想法。

## 一、國小階段：奇數與偶數的定義

教學主題：奇數與偶數的定義

探究活動：小明說：「6 可以是奇數，也可以是偶數，因為 6 可分成 3 堆(2+2+2)與 2 堆(3+3)」，你覺得這位學生的說法對嗎？為什麼？

階段	教學內容
	<b>藉由一位學生的說法，挑戰學生的已知（6 非偶數），進而引起學生討論如何定義奇數與偶數</b>
1. 準備和聚焦	<ol style="list-style-type: none"> <li>告訴學生數字可分類為奇數與偶數，並實際舉出一些奇數與偶數的例子 參考結果：1, 3, 5, 7... 與 2, 4, 6, 8...</li> <li>詢問學生是否可以舉出更多相似的例子？ 參考結果：學生說出偶數可以是 10, 12, 14...</li> <li>評量學生所給的例子</li> <li>引入探究題目，讓學生討論小明的說法</li> </ol>
2. 執行	<p><b>學生開始推理與檢驗小明的想法，並提出自己的看法分組討論的方式進行</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>詢問學生是否能夠給出更多與小明說法相似的例子，所謂相似的例子是指與小明一樣，用同樣的方法去定義奇數或偶數，即是這些數字能夠用加法拆解成奇數個或偶數個重複的數字相加，更具體的例子如參考結果所示： 參考結果：數字 10，<math>10=5+5</math>，<math>10=2+2+2+2+2</math></li> <li>引導學生探索小明的分類規則為何？ 參考結果：<math>4n+2</math></li> </ol>

---

總結學生的整個探究，並且引導學生彼此溝通自己的探究成果

## 3. 綜合和溝通

1. 學生分享自己的想法，並與其他同學互動，接受別人的挑戰。

參考結果：

學生可能會說小明是錯的，因為 6 是偶數不是奇數

學生可能會說小明是錯的，因為如果一個數可以分作偶數與奇數，那麼就不需要發明這樣的分類方法，沒有意義

學生可能會說小明是錯的，因為偶數是可以被 2 整除的數

2. 教師總結或精緻化學生的想法：對於奇數與偶數可以有哪些不同的定義方法？

參考結果：

平分：一個數可以分作恰相等的兩堆稱作偶數（例： $6=3+3$ ）

配對：一個數可以兩個一數，恰全部數完稱作偶數（例： $6=2+2+2$ ，與能被 2 整除同意義）

錯置：從 0 出發，偶數與奇數錯置（偶數、奇數、偶數、奇數...）

---

引導學生反思，讓學生瞭解與精進自己的探究過程，並進一步延伸新的探究議題

## 4. 評估和延伸

1. 學生討論他們的探究過程，分享所獲得數學概念為何？

參考結果：例如學生提到奇數、偶數的定義

2. 詢問學生偶數加偶數答案一定是偶數嗎？為什麼？

參考結果：是，方法不唯一，例如學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明

3. 奇數加偶數答案是偶數還是奇數？為什麼？

參考結果：奇數，方法不唯一，例如學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明

4. 奇數加奇數答案一定是奇數嗎？為什麼？

參考結果：不是，方法不唯一，學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明

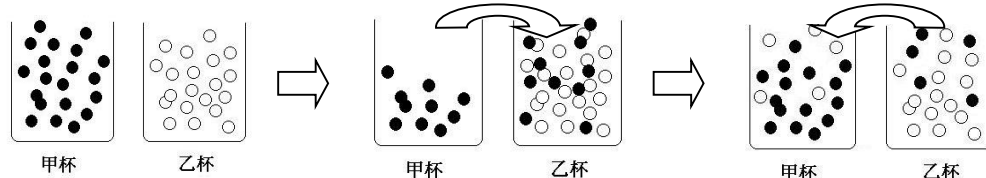
---

註：原文是對國小三年級進行教學，在此不限定年級。整理自 Ball & Bass (2009)。

## 二、國中階段：黑白棋

教學主題：以符號代表數，用代數式一般化 (generalization) 兩個量之間的關係

探究活動：(1) 在甲、乙兩個「不透明」杯子中分別放入黑、白棋各 20 子；接著，(2) 從甲杯（黑棋）中取 10 子放入乙杯（白棋）中；(3) 再從乙杯（現為黑、白棋相混）中「隨機」取 10 子放至甲杯中。請問：甲杯中的白棋數量與乙杯中的黑棋數量，哪一個比較多？



階段	教學內容
	<p><b>藉由展示一個調低酒精濃度的活動，引起學生探究的動機</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>教師展示兩個的大小一樣空杯，將其中一杯裝滿水，另外一杯裝<math>\frac{1}{2}</math>杯 100%的純酒精。</li> <li>將水倒入純酒精中，直到純酒精的杯子全滿為止（倒<math>\frac{1}{2}</math>杯的水至酒精中），此時純酒精變成酒水混合液。</li> <li>再將酒水混合液倒回原來的水杯中，讓水杯再度全滿，酒精杯剩下<math>\frac{1}{2}</math>，此時原來的水杯中也有酒精。</li> <li>詢問學生，此時「水杯」中的「酒精」比較多？還是純「酒精」杯中的「水」比較多？ 參考結果：一樣多，因為水杯中失去的水被酒精補滿，酒精杯中失去的酒精被水補滿，失去多少水等於得到多少酒精（也可從濃度的觀點來看）。</li> <li>引入本次欲進行的活動，讓學生用具體物進行探究：</li> </ol>
1. 準備和聚焦	
2. 執行	<p><b>學生使用具體物操作實驗、進而驗證自己的想法並提出結論</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>分組討論的方式進行</li> <li>教師可於此時再次解釋題意幫助學生了解問題</li> <li>學生使用教具（黑、白棋、兩空杯）實際操作、並驗證自己的猜想</li> <li>學生用紙筆紀錄與歸納實驗後的結果（學生可用未知數 <math>x</math> 一般化）</li> </ol>
3. 綜合和溝通	<p><b>總結學生的整個探究，並且引導學生彼此溝通自己的探究成果</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>教師引導學生上台分組報告，詳述自己的想法</li> <li>教師引導學生對於不同想法進行批判與討論 學生可能認為不一定，因為機率是公平的，可以引導學生多試幾次，看結果是否恆定</li> <li>教師總結這些探究結果，並引導學生用較抽象的數學符號，去討論兩個量之間的關係（例如黑棋拿走 <math>x</math> 個，剩下 <math>(20-x)</math> 個）</li> </ol>

引導學生反思，讓學生瞭解與精進自己的探究過程，並進一步延伸新的探究議題

1. 學生討論他們的探究過程，分享所獲得數學概念為何。  
(請教師協助總結)
2. 詢問學生，假使改變初始的黑、白棋個數會不會影響答案？  
參考結果：不會
4. 3. 詢問學生，假使改變拿走乙杯回甲杯的數量，會不會影響答案？  
參考結果：會
4. 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必大於乙杯中的黑棋數量？\*  
參考結果：一開始從甲杯拿走的量小於從乙杯再拿回來的量，例如一開始從甲杯拿走 5 顆黑棋，但從乙杯拿 10 顆相混的棋子回來
5. 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必等於乙杯中的黑棋數量？  
參考結果：拿走與拿回的量相同，本題即為此例
- 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必小於乙杯中的黑棋數量？  
參考結果：一開始從甲杯拿走的量大於從乙杯再拿回來的量，例如一開始從甲杯拿走 10 顆黑棋，但只從乙杯拿 5 顆相混的棋子回來

註：活動設計參考自 Eastaway & Wyndham (1998/2004)。

\* 設從甲杯先取走  $w$  個黑棋，再從乙杯拿回  $x$  個黑棋與  $y$  個白棋

When  $w < x + y$ ,  $(w - x) < y$ ,  $(w - x)$  是乙杯中黑棋的數量， $y$  是甲杯中白棋的數量

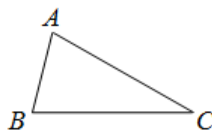
When  $w = x + y$ ,  $(w - x) = y$

When  $w > x + y$ ,  $(w - x) > y$

### 三、高中階段：三角探究

教學主題：餘弦定理

如下圖， $\triangle ABC$  是老農夫擁有的一塊田地， $\overline{AB} = 7\text{km}$ ， $\overline{BC} = 8\text{km}$ ， $\overline{AC} = 9\text{km}$ 。



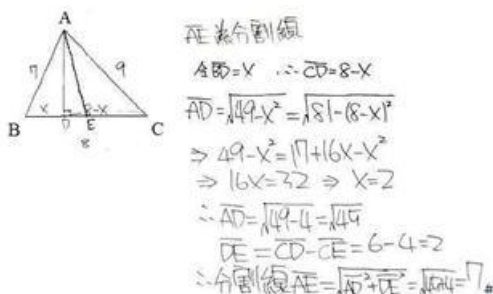
1. 老農夫想將這塊地，平分給他的兩個兒子，請問該怎麼做？為什麼？
2. 承上，求這個分割線的長度為何？

階段	教學內容
1. 準備和聚焦	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 引導學生進入問題情境，詢問如何平分此三角形農地。 參考結果：學生可能會取中線，因為同底等高兩面積相等 學生可能會取<math>\overline{AB}</math>與<math>\overline{AC}</math>的中點，因為誤認為面積相等</li> <li>2. 引導學生聚焦於取中線，並討論「如何求此中線長」</li> </ol>

2. 執行探究

1. 引導學生閱讀課本找到可用的公式，或從過去的經驗解題。

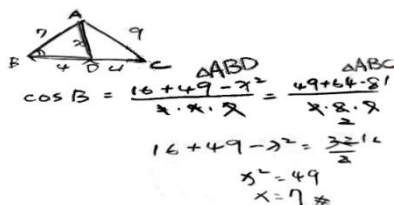
參考結果：第五組學生用畢氏定理解題（如下圖）。該組學生先誤認「 $\overline{AE} = \overline{AB} \sin B$ 」；接著引發作輔助線：高 $\overline{AD}$ ；再以高相等為條件列式，分別解出 $\overline{AD}$ 與 $\overline{DE}$ ，最後使用畢氏定理得 $\overline{AE}$ 。



3. 綜合和溝通

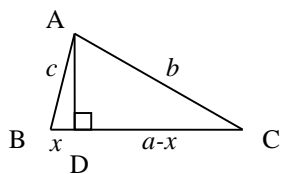
1. 教師刻意讓第五組先上台分享（因使用大家較熟悉的畢氏定理解題），接著讓第三組分享使用餘弦定理解法（挑戰大家的想法），進而引導大家聚焦「餘弦定理」。

參考結果：



4. 評估與延伸

1. 教學者先帶領大家回顧求取中線長的兩種方式，接著進一步解釋餘弦定理，用不同方式表示餘弦定理（如  $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacosB$ ），並連結畢氏定理與餘弦定理的關係（畢氏定理是餘弦定理的特例）。
2. 討論完餘弦定理後，教學者進一步引發新探究問題「證明餘弦定理」，學生一開始對此感到茫然，教學者因此更具體說明題意，並引導學生用在先前解中線長的方式（作高）來證明它。  
參考結果：第五組學生模仿剛剛求中線長的方式（作高，並以高相等為條件列方程式），很快得出接近的答案（ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ax$ ， $\overline{BD} = x$ ），然而他們不知如何將  $x$  換成  $cosB$ ，經教學者提示後證明成功。



註：整理自秦爾聰、林勇吉、陳俊源（2009）。

## 陸、結論

本文中，我們嘗試透過深入的文獻分析，幫助讀者勾勒數學探究的輪廓，從上述內容來看，我們也許可以這樣簡單的解讀數學探究：它是學習者「研究」數學問題的總稱。更清楚地來說，它就是數學家想問題、解問題、發表想法、接受挑戰、產生更精緻想法的過程，在這個過程中，它和數學解題、數學推理、數學溝通、臆測、論證的過程環環相扣。

改革取向的數學教學大聲疾呼必須幫助學生成為「獨立的學習者」(e.g., NCTM, 2000)，「數學探究」與此理念完全相符。在數學探究教學中，學生將擁有主動「思考」、「臆測」、「推理」、「論證」、「解釋」與「挑戰」他人等能力，主動參與知識的建構過程，成為獨立的學習者。是故，瞭解數學探究與從事數學探究相關研究的重要性，已不言可喻。

## 參考文獻

- 秦爾聰、林勇吉、陳俊源 (2009)。探討高二學生在三角探究教學中的解題表現。《科學教育學刊》, 17 (5), 433-458。
- Eastaway, R., & Wyndham, J. (2004)。為什麼公車一次來三班？：81 個生活中隱藏的數學謎題 (Why do buses come in threes?: The hidden mathematics of everyday life; 蔡承志譯)。臺北市：三言社。(原作出版於 1998 年)
- American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for science literacy*. New York, NY: Oxford University Press.
- Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education*, 13(1), 1-12.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. Retrieved from [http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL\\_Deborah\\_BASS\\_Hyman\\_2009\\_Horizon.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf)
- Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.
- Bybee, R. (2000). Teaching science as inquiry. In J. Minstrell & E. van Zee (Eds.), *Inquiring into inquiry learning and teaching in science*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 401-421.



- Chin, E. T., Lin, Y. C., & Lin, C. P. (2009). A study of improving 7<sup>th</sup> graders' mathematical problem solving and communication abilities through inquiry-based mathematics teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 359). Thessaloniki, Greece: PME.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., & Wang, Y. L. (2009). An investigation of the influence of implementing inquiry-based mathematics teaching on mathematics anxiety and problem solving process. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 447). Thessaloniki, Greece: PME.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., Chuang, C. W., & Tuan, H. L. (2007). The influence of inquiry-based mathematics teaching on 11th grade high achievers: Focusing on metacognition. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 129-136). Seoul, Korea: PME.
- Department for Education and Skills. (2001). *National strategy for key stage 3*. London: DfES.
- Dewey, J. (1910). Science as subject-matter and as method. *Science*, 31, 121-127.
- Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston, MA: D.C. Heath.
- Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39-48). New York, NY: Macmillan.
- Inoue, N. (2011). Zen and the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 5-23.
- Jarrett, D. (1997). *Inquiry strategies for science and mathematics learning: It's just good teaching*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: The Falmer Press.
- Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.
- Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (Ed.). (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Lederman, N. G., & Niess, M. L. (2000). Problem solving and solving problems: Inquiry about inquiry. *School Science and Mathematics*, 100(3), 113-116.
- Lee, L. (2001). An inquiry-based mathematics classroom. *Voyages in Mathematics and Science*, 26, 3-6.
- Marzano, R. J., Brandt, R. S., Hughes, C. S., Jones, B. F., Presseisen, B. Z., Rankin, S. C., & Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- McNeal, B. & Simon, M. A. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 475-509.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Peirce, C. S. (1982). The fixation of belief. In H. S. Thayer (Ed.), *Pragmatism: The classic writings* (pp. 61-78). Indianapolis, IN: Hackett. (Original work published 1877)
- Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.
- Von Glasersfeld, E. (1990). Chapter 2: An exposition of constructivism: Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 4, 19-29.
- Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching & Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21 (1), 59-83.
- Wood, T., & Turner-Vorbeck, T. (2001). Extending the conception of mathematics teaching. In T. Wood, B. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 185-208). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking revealed in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(3), 222-255.
- Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 1-28.
- Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, 19, 219-245.
- Zion, M., Cohen, S., & Amir, R. (2007). The spectrum of dynamic inquiry teaching practices. *Research in Science Education*, 37(4), 423-447.

王茂源、楊德清（2014）。  
從活化教學議題談國中數學教學。  
臺灣數學教師，35（2），19-30。

## 從活化教學議題談國中數學教學

王茂源<sup>1</sup> 楊德清<sup>2</sup>

<sup>1</sup>嘉義市立北興國民中學

<sup>2</sup>國立嘉義大學數理教育研究所

本研究旨在探討認同活化教學的國中數學教師對落實此教學的意圖與策略為何。採用半結構的訪談方式蒐集三位兼任不同職位的國中數學科教師之想法，並記錄、分析、詮釋與比較訪談資料。研究結果：（1）教師認為推動數學活化教學有其重要性，也願意嘗試投入改變。（2）教師認為推動數學活化教學可由教學活潑化、教材生活化、學習感官化著手。（3）教師認為推動數學活化教學的評量可以朝向運用多元的評量方式。

**關鍵詞：**十二年國教、活化教學、國中數學

## 壹、緒論

### 一、研究動機與目的

在教學現場時，「教什麼」與「怎麼教」都很重要。鑒於課程與教材的良窳是影響學生學習成效的關鍵之一（吳麗玲、楊德清，2007；Son & Senk, 2010），所以教育部對「教什麼」的控管是訂定課程綱要，並要求各教科書出版商必須按照課程綱要內容來編輯教科書，透過審定才能發行的機制來維持品質，不管是部編版或民間版本教科書，設計方向都朝提供優質而又符合國情的教材內容讓師生便於課堂上使用。早期台灣的國中數學教育對於「怎麼教」並不重視，授課以教師單向講述為主，學習者被強迫灌輸教科書的知識，以教學者為中心，講求效率卻無法滿足學習者的差異性需求，教師教學專業能力與學生學習成效無法持續提升，造成教育的效能低落，學校的學習環境與社會的現實情況漸漸脫節，學生的適應問題顯得愈來愈嚴重。

此外，根據天下雜誌編輯部（2010）的「2010 年教育特刊：中學生科學教育大調查」，在台灣國中生方面，「最不喜歡的科目」第一名是數學，有三五·八%的學生表示數學最令他們頭痛，提不起興趣。The Programme for International Student Assessment (PISA) 國際學生能力評量計劃 2006 針對學生對數學學習的信心與喜好等態度進行調查時，也發現台灣學生對數學學習的正向態度排名是國際倒數的名次，表示台灣學生雖有好的學習成就表現，卻對數學學習缺乏信心也不喜歡數學（OECD, 2007）；此與 TIMSS 2011 國際教育成就調查委員會，針對各國國中二年級，所舉辦的數學和科學教育成就趨勢調查結果不謀而合（李國偉，2013）。如何讓學生在學習數學的同時也能真正喜愛數學，PISA 研究報告指出應讓學生能把數學知識運用於實際生活，啟發學習興趣，而不只是書本知識的單向傳授。Artzt 與 Armour-Thomas（2002）指出教師教學時應以學生為學習主體，將學生的生活經驗融入學習活動中，強調實際操作與多元表徵的使用，並鼓勵學生進行探索、發表和溝通，以提升學生的學習興趣、動機與學習成效。Artzt 與 Armour-Thomas 的主張正呼應活化教學的必要性。

九年一貫國民義務教育乃至於近期的十二年國民基本教育實施後，政府在教師的教學品質之提升方面，注重教學的差異性與創新多元化的教學策略，以適應學生不同的學習型態，強調教師教學專業能力應與時俱進，擬透過精進教學計畫之推動、成立專業學習社群等途徑，企圖提升教師的教學專業知能。藉由教材的多元設計與教師的專業成長提升學生的學習品質，主張全人的教育，要確保學力的提升，帶起每一個學生，達成整體教育績效之改善（教育部，2011）。

Trends in international mathematics and science study (TIMSS) 的研究報告指出，東亞各國近年來在數學教育方面的成果豐碩，台灣若從歷次測驗的結果來看，國中八年級的數學能力也是

呈現向上成長的趨勢 (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012)。此結果顯示九年一貫課程改革的方向是有利於學生學習的，為此，教育部進一步地在十二年國民基本教育的宣導中，以國中活化教學列車影片記錄了各學習領域的活化教學典範，提供教師具體的活化教學理念介紹，強調活化教學可以從 0.01 的小小改變開始，慢慢開啟學生的多元智慧，逐漸創造屬於每個學生的發展舞台，樂於追尋自己的掌聲。而活化教學係指能提升教師教學專業能力與學生之學習成效的教學策略，其基本理念是以學習者為中心，滿足學習者的差異性需求。再者，十二年國民基本教育秉持這樣的精神，期望在教材設計上提供更有趣而生活化的內容，在教師教學上推動更活潑而有效的授課方式，在學生能力的評量上研發更多元而精準的測驗題庫，希望能帶給學生快樂而不失空洞的學習經驗。

教育部推動活化教學企圖改善學生在數學學習上表現出高成就但低興趣與低信心的現象，但效果尚待更多驗證，目前並無確切證據顯示有效。本研究欲從部分國中數學教師之觀點與親身經驗尋求相關佐證訊息。而教育部身為政策制定者，在作為上除了邀集相關領域的學者專家集思廣益外，亦廣為蒐集與報導足為教學典範的第一線教師之成功案例提供各界參考，並要求縣市政府的教育主管機關落實活化教學的推動。以研究者所身處之教育現場，學校在推動教師進行活化教學的角色為協助者、支持者，只要教師願意投入努力而相關經費也許可，學校行政都能提供不同程度的後盾。

綜合以上所述，教師在學生的數學學習上除了知識的傳授外，也負有觸發學生學習興趣的責任，故本研究目的在探討在國中數學教師對於活化教學的看法如何？怎麼教才能引發學生願意在課堂上進行有意義的學習？如何評量才能鞏固學生的學習成就又不會扼殺其學習的樂趣？

## 二、待答問題

依據上述研究動機及目的，形成本研究之待答問題，如下所示：

- (一)、探討本研究中的國中數學教師對活化教學議題的看法為何？
- (二)、探討本研究中的國中數學教師在活化教學議題的推動下，其數學教學方式是否有所改變？如何進行？
- (三)、探討本研究中的國中數學教師在活化教學議題的推動下，對學生的成就評量方式是否有所改變？如何進行？

## 貳、文獻探討

### 一、國中數學課程的發展

民國八十六年實施的國中數學課程改革中，發現國中生的數學學習意願低落，故特別強調引導學生認識數學在生活中的功用，以提高學習的興趣，並培養主動學習的態度及欣賞數學的能力。為了要達到這些目的，教材中引入漫畫，並大量的增加生活情境、操作活動、討論活動、數學遊戲以及數學與生活或其他領域連結的材料(謝豐瑞, 1997)。後又發現課程內容過於縮減，造成國小、國中與高中之間的教學無法銜接，內容太過於簡單，遂於民國 90 年大幅修正課程綱要，強調在終身學習的社會中，教育的重點在培養國民知道如何學且樂於學，揭示要以探究的活動達成有效的數學學習。民國 92 年正式公布的課程綱要中談到，任何一本教科書或單一教學法都無法總攬地兼顧各個學生的學習，甚至各時期的發展，教師要能從各面向去觀察、引導學生的學習並適時給予關懷，而雙向溝通的教學方式則是其中一種積極又正向的發展。而後課綱在民國 97 年稍作微調以利與高中課程內容接軌，但鼓勵教師專業發展並與其他教師分享教學經驗以培養學生帶得走的能力之大方向並無改變。民國 103 年政府提出十二年國民基本教育，要讓每個學生都能適性揚才，降低考試壓力，鼓勵學生創意思考，推動教師教學精進，以求教學之活化。

美國數學家 Paul Halmos 曾說，解題是數學的核心。但是，數學能力培養不是靠零碎知識的累積，而是透過自主學習活動、討論、連結相關的解題經驗、形成解題類型，甚至形成數學概念。數學課程的改革也強調培養學生解決問題的能力，能夠分析資料、形成臆測、謹慎驗證與做出判斷，進而強化數學知識與能力。這樣不但能學到有結構的知識，且更能適應內容表徵方式的改變，因此增加應用的可能性。在經過幾年的修正之後，多數教科書出版商也朝向運用情境或圖表繪製來設計自家的教材，以日常生活經驗為基礎，連結生活情境，提高教材的可親近性，讓學生學起來更有感覺，也能體認數學在生活中的實用性。

### 二、活化教學議題的認識

活化教學意指能提升教師教學專業能力與增進學生學習成效的教學策略，能以學習者為中心，實施各種有效而能符合差異性需求的教學、管理及學習策略，適用於不同教材性質與學科特性的教材教法(高松景, 2012)。

現代學子每天隨時接受來自各方的資訊，例如手機、網路、電視等等，這些媒體充滿著許多的聲光效果，很容易吸引學生的注意，長久下來已習於接受這樣的刺激。反觀學校教育型態若仍停留在全部都是枯燥乏味的單向講述，缺少激發學生學習興趣的引導活動，試問學生怎麼

可能會願意乖乖坐在位置上聽課？劉金山（2014）提到老師在課堂裡奮筆疾書，而學生的神情是木然的，多數學生喪失了主動學習的欲望和動機。數學的內容若只是一堆公式的推導，加上反覆地計算練習，沒有其他真實生活的經驗結合，沒有趣味而引人入勝的推理活動，學生對數學的喜好當然不會高，即使他的數學能力不錯。何琦瑜、賓靜蓀與張靜文（2012）在《親子天下》針對國中生的「學習力大調查」顯示，在結束忙碌的八節課甚至九堂課的課業洗禮後，近六成不再主動學習新知，更別提廣泛閱讀與興趣專研，於是多數國中生整天喊著好無聊。

筆者觀察造成此種現象的原因，不外乎是教師忽略了學習者為教學的主體，教學過程多為教師主導的灌輸式原則，未養成學生的獨立思考習慣，只為應付考試，發展快速解法，對學生的學習狀況及困難不了解也無從診斷與補救（林福來、黃敏晃，1993）。一個有效能的教師不只要有豐富的學科專門知識，更要有能力去了解學生的學習歷程，並隨時依據學生的學習成果做出反省與修正。

教學是一個循環的歷程，在此過程扮演媒介、提供回饋的角色則為評量。不過許多經歷過傳統評量的學生多認為「學習就是考試」，久而久之就變得害怕考試、拒絕學習。但學習評量的目的主要在於協助學生學習、提升教師的教學品質，在以學生為中心的教學觀點之下，評量更重視統整學生的學習經驗，在內涵上則強調方式多元、技巧複雜、目的明確與觀察深入（林素微，2000）。

有鑑於此，教師在教學上有必要隨著時代的變遷做出因應，教師必須承認改變的事實進而願意接受改變，不管是在教材的重新組織設計、教學活動的費心安排、成就評量的多元方式上，教師的教學專業挑戰越來越大，必須在教學過程中銳意革新、持續創新，善用創新教學方法（吳清山，2014）。教育部也在十二年國民基本教育的推動上提供許多教學活化的案例，經由教師彼此之間的觀摩學習，激發出更多有創意的教學模式，目的就是要藉由教師的力量提高學生的學習興趣，找回學習的動力，進行有意義的學習。

但目前未能清楚數學教師在推動活化教學的情形，且教育部的活化教學列車典範影片也只有三位教師的教學分享，因此有必要探討國中數學教師對活化教學議題的看法與相關經驗。

## 參、研究方法

### 一、研究對象

本研究邀請實際參與活化教學，對此議題持正面看法，同時具有數理教育碩士學位並願意接受訪談的數學教師，經便利取樣選取三位擔任不同兼職工作之教師，接受訪談以深入了解其對活化教學的看法與實際推動情況。

研究對象介紹如下：

(一)、靜師的教學年資已有七年，具數理教育研究所碩士學位，身兼數學科輔導團輔導員職務，接觸教學輔導工作已有數年之久，協助輔導團規劃及執行全市在職教師的研習工作，本身對數學教學的精進極具熱誠，也對學習共同體的想法深表認同，除了積極參加十二年國教相關教學研習外，目前正參與教育部亮點基地計畫，邁向共同備課與相互觀課之實施。

(二)、敏師的教學年資已有十二年，具數理教育研究所碩士學位，身兼普通班導師職務，曾任數學科輔導團輔導員，對數學教學的理論與實務具備深厚的基礎，目前有參與校內教師讀書團體及教育部亮點基地計畫，持續在教學工作上成長以求精益求精。

(三)、捷師的教學年資已有十五年，具數學教育研究所碩士學位，曾任教務、輔導主任等行政工作，身兼數理資優班導師數年之久，常指導學生參與獨立研究、科展及數學競賽工作，長期接觸數理方面資賦優異的學生，在數學教學上有其與眾不同之處，目前亦參與教育部亮點基地計畫，數學教學深獲好評。

## 二、研究設計

以訪談的方式來研究教育問題有著極高的價值（王如哲，1998）。訪談通常是兩個人之間有目的的對話，藉由研究者的引導，蒐集受訪者的言談資料，藉以了解受訪者的觀點（黃瑞琴，1994）。教育研究常用的訪談是半結構式，這種訪談方式雖有結構嚴謹、標準化的題目與答案，但留下較大彈性讓受訪者表達更多想法及意見，研究者也有較大自由控制訪談的程序與用語，故兼具結構與無結構式訪談的優點（吳明清，1994）。故本研究採用半結構式訪談，事先將訪談大綱提供給受訪者參閱，使其有充分時間準備再進行訪談。

## 三、訪談大綱

本研究依據研究目的設計的訪談大綱如下：

- (一)、在活化教學議題的推動之下，您對這個議題的看法為何？
- (二)、在活化教學議題的推動之下，您個人在數學教學上是否有所改變？如何進行？
- (三)、在活化教學議題的推動之下，您個人在學生成就評量上是否有所改變？如何進行？

## 四、資料蒐集與分析

在質性研究過程中，資料的蒐集與分析是同時持續進行的，如此才能立即知道蒐集的資料間是否互相矛盾，是否需要進一步蒐集更多的資料（黃瑞琴，1994）。本研究資料的搜集是以訪談的方式與每位受訪者約定時間、地點一一對談，並將談話內容錄音存檔後轉成逐字稿。並於



每次訪談結束之後，即著手進行資料分析，以免迷失於龐大的原始資料中。

資料分析則是將逐字稿閱讀數次後，了解受訪者的思想觀點並擷取重要資訊，發現疑問或有不清楚之處再向受訪者詢問其真正想表達的意思為何，並採三角校正法，與研究對象以外的一位資深數學教師（教學年資 16 年）再討論後確認語意觀點。部分討論舉例如下：

**研究者：**「有老師提到：舉凡能夠引起學生的學習動機，提升學習成就的教學方式都應該是屬於教學活化的範疇。您認為這樣的說法與您的認知吻合嗎？」

**資深教師：**「現在的學生對數學的學習動機普遍不高，有時甚至是被迫。若是教學時能夠突破此一困境，應該也算是教學有所活化，值得鼓勵。」

**研究者：**「那麼提升學習成就的部分呢？」

**資深教師：**「其實要提升學習成就也可以用填鴨式的精熟學習來達成啊，可是學生在這樣的學習環境下會感到很痛苦，學習興趣缺缺。若能讓學生可以在上課時學得很快樂，學習成就也有所提升，這樣才算是活化教學的用意吧！」

**研究者：**「謝謝您的說明。」

**研究者：**「有老師提到：時代在變動，課程也不斷編修，學生的組成更是世代不同，教師的教學方式與評量技巧也該有所改變。那麼到底應該要怎麼做才不會淪入『為變而變』的口號式改革呢？您對此有何看法？」

**資深教師：**「課綱中宣示發展以生活為中心的課程，教師要能適時組織數學的素材，培養學生的探究思考能力，並透過觀察學生與周遭人、事、物的互動，蒐集學生的學習資料。比起傳統的講述式教學，教師必須發展更多教學的專業技巧，還要依照課堂活動隨時修正教學方法，會比較辛苦一點，如果可以與其他教師們組成學習團體，彼此關照共同討論，對於減輕教學負擔會更有幫助。」

**研究者：**「那麼如何評量才能師生雙贏呢？」

**資深教師：**「評量要能反映學生的學習過程，例如興趣、學習內容與特質、遇到的困難、成長的證據等，善用學習工具，常讓學生動手操作，自然就能在教學的過程留下許多學習資料，老師不用特意蒐集，學生也不至於害怕考試，從師生互動之中輕鬆達成評量的目的。」

**研究者：**「感謝老師的說明。」

## 肆、研究結果

### 一、教師認為推動數學活化教學有其重要性，也願意嘗試投入改變

臺灣學生對於喜歡數學與否的看法有偏向負面的趨勢，面對數學學習相當缺乏自信心，在數學的評價上與國際平均的差異甚大。數學教學現場的情況是高成就的學生經由課後補習的管道早已超前進度許多，若沒有更具挑戰性的教學活動很難激起這些學生的學習興趣；低成就的學生則是因為許多因素，例如個人、家庭、社會等等，已在數學學習上荒廢許久，要引導這群學生願意去學則需要由淺入深和活潑有趣的教學。

靜師：看到學生在數學課堂的無力學習狀況，我覺得教學的活化或許能帶給學生不同的學習體驗，進而在數學學習上體會到一些樂趣，重新找到持續學習的動力。

敏師：我認為活化教學不只是侷限在課程是否為課內課外、教學有無靜動態活動之分，其應著重在增加師生的互動、提高學生對課程的參與度、主動性、並能夠顧及不同程度的學生，將課本上的抽象知識應用在生活情境中

捷師：教學是不斷地在改變，所以身為一個老師，我覺得必須隨著當時的狀況來調整或改變自己的教學，因為教學本來就是不可能一成不變，然後你也不可能說一套講義或者是一套題目這樣一直教個十年二十年的，應該會隨著學生的程度不一樣，或者是整個課室的狀況不同，需要做調整。

由以上教師的訪談內容看來，教師要能營造一個可以活用知識、團隊合作與樂在學習的環境，帶動學生願意投入學習，能夠主動地去探索知識、挖掘新知，比之單向講述來得有效許多，推動活化教學就像愛爾蘭詩人葉慈曾說：「教育不是填補一個桶子，而是點燃一把火。」

### 二、教師認為推動數學活化教學可由教學活潑化、教材生活化、學習感官化著手

現在大多數學生都很習慣也喜歡在多媒體之教學環境下進行學習，且在多媒體之教學環境下更能促進數學學習時的師生互動，達成教學活潑化、多元化的目標。善用市面上各類教具也能夠讓許多抽象的數學概念經由具體的操作來呈現，學生較容易體會其奧妙之處。甚至戲劇表演融入數學史的教學，將整個數學思想的演進脈絡展演出來，學生也能從準備的過程中得到樂趣，進而願意深入地了解其中的數學知識。電視節目裡的魔術表演經常吸引觀眾的目光，其中的精髓也常隱藏著數學的知識，若能在課堂上應用也是吸引學生學習的好方法。課前所花的準備功夫雖然辛苦，但是看到學生在課堂上學習時的發光眼神，這一切都是值得的。如果能組織校內或校外的教師學習團體來共享每個人的教學想法或準備，也許更有利推動活化教學的成長。

靜師：曾經嘗試讓學生分組蒐集資料作報告，過程中我看到一些學生原本對枯燥的理論課程不感興趣，但是卻能在分組工作中找到自己可以努力的點，進而在後續的工作中獲得一點樂趣。

敏師：將電腦裡的小遊戲—踩地雷，改版成具體化教具，嘗試將國三數學課程內的邏輯推理單元透過此踩地雷活動將抽象觀念活化成具體操作活動。

捷師：例如生活上的數學、撲克牌、魔術，或許會覺得一、兩堂課玩遊戲只為了帶入一個觀念，可是這個觀念若在孩子們的心裡面經過實際操作或者是跟同學小組合作，會有更多架構在他內心的部分，或許在黑板上十分鐘就可講完，但在孩子們的心裡其實是不長久的，用不同的方式建構孩子們的能力，在小組互動上孩子們會學到更多，包括怎樣與人合作，包括發表，這都是綜合能力的培養。

由以上原案內容可知，利用實作去瞭解幾何圖形，採取師生動手做的過程或科技 3C 的動態影像播放，加深學生的數學抽象概念，例如將數列的概念用撲克牌，排列出各項數列規則等等，都是活化教學的表現方式，也可說採用多元而生動的方式，有助於數學活化教學的推行。

### 三、教師認為推動數學活化教學的評量可以朝向運用多元的評量方式

「成就測驗」的目的在測量個體學習或訓練後獲得之知識和技能的程度，故成就測驗在學校教育中扮演很重要的角色。在教學上，成就測驗可以幫助教師了解學生學習的情形，作為調整教材和教法的依據（盧雪梅，2004）。在「考試領導教學」的現實下，也許無法單純用紙筆測驗中考出能力，考慮數學的學習是希望學生在獲得數學知識的同時還能養成數學能力，則應講究「怎樣的評量內容能讓老師重視並進行學生能力培養的教學活動」。有關於此，PISA 臺灣的研究內容或許能提供教師參考。

靜師：修改課本和習作中的問題，讓題目的答案是開放的或多種可能性的，還有設計不同難度的問題可讓學生回答，譬如說簡單的就指定程度弱的學生回答，讓他加分提升自信；再來難一點的就可以開放給程度好的同學來說明，製造他挑戰的機會。這樣人人有事做，加分機會統統有，上課也就減少無聊的時間。

敏師：將同組的同學形成一個討論的小組，一起解決問題的團隊，在組內積極討論、設計佈題來考驗他組，足見同學能掌握設置地雷的條件，進而透過邏輯推理進行解題與佈題。

捷師：利用自評、同儕互評、教師給分這三個面向來評量，例如以組為單位將學生分組來介紹數學家，請各組蒐集資料製作簡報、上台報告，訓練學生資料分析、呈現、上台報告的能力，請同組的同學相互給分，自評後再對別組的同學給分，老師分別對每位同學的狀況給分，評量結果就比較客觀一點。

由以上談話分享可知，除了紙筆測驗的運用外，運用分組活動的形式來觀察學生的表現，或讓學生口頭發表，或重新設計佈題讓其他同學來解，讓學生在不同面向達到不同的學習成就感，提高學習力，也更能給那些不善於紙筆測驗的學生一個表現自己的機會。當老師蒐集愈多的評量資料時，他們就愈能因應學生的需要來修正其教學方法。

## 伍、結論與建議

- 一、本研究中的三位教師有感於時代的快速變遷，12 年國教的推動勢在必行，預見自身教學方法的精進有其重要性與急迫性，為了追求更高的教學品質以解決更多學子的學習困境，在活化教學議題的推動上深表認同，但在實質推動上仍需加入更多助力。如靜師在教學專業的成長上表現積極，但一個人單打獨鬥的摸索難免挫折重重，亟欲尋求組織教師成長團體，期以群體的力量在教學的活化上更省力、更集思廣益，也因此當教育部亮點基地計畫徵求參與學校時，靜師即邀請幾位志同道合的同仁組成小團體來參與計畫，也從中獲得更多教學上的支援，尤其是精神層面的支持；部分班級也因教學者的授課異於傳統，課堂氣氛顯得熱絡許多，且上台發表井然有序。
- 二、本研究中的三位教師對於活化教學議題的意涵都有初步的概念，但因個人教學特質的不同，有可能採取不一樣的活化教學方式，例如對於新科技產品有研究的教師較能掌握科技融入教學的要領；善於肢體表達的教師則傾向於魔術或紙牌遊戲之類的融入教學；而喜歡說故事的教師在數學史融入教學的方面也比較能得心應手。總之，只要有心要在教學專業上精進的教師都能找到適合自己的活化教學方式。如捷師善於傾聽，數理資優班的學生都非常有想法，有時想法跳躍需要教師的引導來完整表達意思，有時是在題目的看法上彼此針鋒相對需要排解，無論是哪種情況，捷師始終耐心地站在輔佐的地位指引方向，並不深刻介入，其認為學生是學習的主角，教學者只需適時地推學生一把，剩下的就交給學生自己去發現，這才是學習的樂趣。
- 三、考試領導教學，紙筆測驗仍屬必要，教師若能深入瞭解學習成就評量指標測驗的要領，就能精準地掌握學生的數學學習困難並給予協助，另可依 PISA 測驗方式設計結合生活情境與貼近學生生活經驗的題目，或分組活動參酌討論思考的過程、口頭發表的呈現、學生參與的認真程度，引導教師的教學朝向解決真實情境問題的方向，降低反覆的精熟練習，重新引動學生的學習意願，並培養學生願思考、可論述、能發表的能力，也就是帶得走的能力。如敏師善用數學日誌的方式，請學生將每堂課的所學所思以自己的詮釋方式寫下，教師可以很快了解學生的學習困難以及上課所得，甚至更驚豔於某些學生的不同想法及其他才能的展現，對於掌握多數學生的學習進度、調配教學方法具有極大幫助。

本研究主要發現指出教師藉由專業成長團體的參與，如教育部亮點計畫，可以強化教師活化教學的能量，透過彼此之間教學經驗的交流與集思廣益，可以增強教師活用不同的教學策略，如善用不同的科技、魔術或紙牌遊戲融入教學中，鼓勵與引導學生發表與溝通，或適時的使用數學日誌，以隨時掌握學生的學習狀況。上述發現顯示活化教學有其必要性，而透過教師參與教師專業發展的過程，是強化教師活化教學能力主要途徑之一。

根據上述討論，本研究有以下幾點建議：

- 一、激發教師不斷追求專業成長與活化教學，是確保學生學習的最核心工作。建議各校組織國中數學教師專業發展社群，在活化教學議題的推動上採取團隊合作，透過傾聽、對話、行動、反思的對話實踐歷程，提高活化教學的感染力與成效。
- 二、建議國中數學教師應瞭解個人的教學特質，持開放的心胸，積極汲取新知，隨時彈性調整自身的觀念和作法，去面對時代的變遷與學生的世代交替，協助學生樂於學習、敢於追夢，真正讓學生上課有感覺。
- 三、建議國中數學教師在精進教學策略的同時，也能對評量方法有更多的研究，以利隨時藉由評量結果得知學生的學習狀況，加以修正活化教學的細節，讓教學可以不斷創新進而得以活化。

建議未來研究能夠透過較大規模的教師專業發展以強化教師活化教學的能力，並進一步檢驗教師專業發展的成效，以做為未來師資培育之參考依據。

## 參考文獻

- 天下雜誌編輯部（2011，4月）。天下 2010 中學生科學教育大調查。天下雜誌，460。取自 <http://m.cw.com.tw/article/article.action?id=5008245>
- 王如哲（1998）。教育行政學。臺北：五南。
- 何琦瑜、賓靜蓀、張澣文（2012，4月）。十二年國教新挑戰：搶救「無動力世代」。親子天下，33。取自 <http://www.parenting.com.tw/article/article.action?id=5031634>
- 吳明清（1994）。教育研究：基本觀念與方法之分析。臺北：五南。
- 吳清山（2014）。善用活化教學提升學生學習效能。師友月刊，559，31-35。
- 吳麗玲、楊德清（2007）。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題呈現與知識屬性差異之研究。國立編譯館館刊，35（1），27-40。
- 李國偉（2013）。TIMSS 2011 耐人尋味的問題。科學人，132，25。
- 林素微（2000）。數學科評量的新願景：談多元評量。研習資訊，17（3），31-42。
- 林福來、黃敏晃（1993）。分數啟蒙課程的分析、批判與辯證。科學教育學刊，1（1），1-27。
- 高松景（2012）。「全方位」專業教師—北政「全人學習」的活化教學。教師天地，177，59-62。
- 教育部（2011）。十二年國民基本教育實施計畫核定本。臺北：作者。

- 黃瑞琴 (1994)。質的教育研究方法 (第 2 版)。臺北：心理。
- 劉金山 (2014, 1 月)。教育的真諦是所有人一起學習。新北市教育電子報, 135。取自 <http://epaper.ntpc.edu.tw/index/EpaSubShow.aspx?CDE=EPS20140103110143R9N&e=EPA2013121020185425Q>
- 盧雪梅 (2004)。從技術面談九年一貫課程能力指標建構：美國學習標準建構的啟示。教育研究資訊, 12 (2), 3-34。
- 謝豐瑞 (1997)。國中數學新課程精神與特色。科學教育月刊, 197, 45-55。
- Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) (2007). *PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world, Volume 1: Analysis*. Paris, France: Author.
- Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142.

## 論壇

### 論壇 1：數學教師的挑戰：數學探究教學

作者 | 左台益（國立臺灣師範大學數學系教授）

無論在數學教育的研究或教學現場的實務面向，均朝向以學習者為中心，能提供學生主動探索的機會來發展數學知識，已成為近來數學教學的共識。因而數學探究教學，亦即，鼓勵學習者能如同數學專業人員般進行數學探究活動的教學也被引進於數學課室。數學探究教學期望學習者在探索的活動中，經驗多樣的數學思維與溝通表達技能，進而從中發展數學知識。然而以探索取向進行教學，對數學教師卻是極大的挑戰，因其不僅是教學策略的改變，更牽涉數學教學信念的調整、數學教師本身的數學專業素養以及經營探究活動所需形成的社會與數學規範。如何讓中小學數學教師瞭解探究教學的意涵與實踐準則，以使教師能安心地進行數學探究教學，本身即是需要審慎思考研究的主题。

由林勇吉、秦爾聰與段曉林（2014）共同發表之文章〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉，即嘗試說明數學探究的意義與實施探究教學的架構。此文從數學本質、師生互動、擬題、課程標準與建模五個觀點概論數學探究的意涵，作者們總結「數學探究」為「數學知識發展的過程與方法，在這個構念底下，學生猶如數學家在探索知識，過程中充滿不確定性和衝突性（頁7）」。數學探究教學，「在課室中，教師主要的工作是引起學生討論與論證，而學生應論述自己的想法，挑戰其他同學的思維（頁7）」。這對一般傳統以講述法為主的數學教師可能在教學信念上是一大挑戰，他們要相信學生可以如同數學家般進行數學探索，而且能從此探索中發展數學知識。數學教師要能引起學生討論且願意容忍學生可能的發散性思考，這些教學信念的調適或許需要時間的磨合及成功案例的鼓勵。

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉一文參考 Siegel、Borasi 與 Fonzi（1998）四個階段的數學探究環，認為「數學探究教學起始於（1）問題、（2）接著學生開始推理與論證對問題的猜測、（3）再與同學間進行討論，並比較不同的策略、（4）最後總結整個學習，發展較精緻的想法」做為數學探究教學架構。因此，透過情境問題激發學生啟動數學探究活動的關鍵。教師如何佈置有趣且具挑戰性的問題激發學生進行探究，對教師而言可能也是一大挑戰，事實上，一個有趣且具挑戰性的問題本身也是推動學生對數學產生興趣方法之一。這需要教師對數學專業的素養。進行數學探究教學時，教師思考問題情境不僅在發展問題，更重要的是如何發展學生的能力來尋找一個好問題，亦即，「教師利用學生的觀察結果與『提問』，與學生共同溝通，『創造一些新的問題』，引發學生的探究（頁8）」。

林勇吉等人（2014）在文章中提供相關研究文獻的教學案例，分別為國小階段的奇數與偶數的定義，國中階段的黑白棋與高中階段的三角探究。他們主張國小階段重點在體驗探究過程，國中階段重點在透過探究過程來學習數學知識，而高中階段讓學生擁有更開放的探究過程；而

老師的介入程度而小學到高中逐漸降低。從這三個案例均可以理解學生的積極參與且遵守討論批判的規範是數學探究教學的關鍵。這也是教師進行探究教學的挑戰，教師介入的時機與程度以及如何建立學生探究社群組織與探索文化的社會規範均有待教師長期的經營。成功探究教學案例是支持教師願意投入探究教學的動機。歐盟近來進行大規模跨國計畫，在歐盟跨國間推動中小學數學與科學探究，也發展出一些教學材料，並將這些素材放在網路上免費提供使用 ([www.primas-project.eu](http://www.primas-project.eu))，或許有興趣的教師可從此收尋有用資料。

### 參考文獻

- 林勇吉、秦爾聰、段曉林 (2014)。數學探究之意義初探與教學設計實例。臺灣數學教師，35 (2)，1-18。
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.





## 論壇 2：關於〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉一文之評述

作者 | 英家銘（臺北醫學大學通識教育中心助理教授）

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉這篇論文從「數學探究」的不同觀點出發，向讀者介紹數學探究的意義與其可能的操作模式。接下來，作者整理文獻，說明數學探究的其中一類教學模式，依照「準備與聚焦探究」、「執行探究」、「綜合與溝通」、「評估與延伸」這樣的探究循環進行。最後，作者舉出了算術、代數與幾何教學的三個實例，可分別適用於小學、國中與高中階段的探究教學。整篇論文結構與理路清楚，並且在最後以實例讓讀者理解數學探究的操作方式，使得對此有興趣的現場教師，有可能依照文中的模式進行教學，甚至發展出適合自己的教學方法。從實務的角度來說，這的確是一篇值得稱讚的好文章。

對於文中提到的三個探究實例，作者認為在小學階段重點在體驗探究過程，在學習成果上需要教師大量的協助，而國中與高中則可以有較開放的探究過程，年紀越大，教師的介入程度越低。原則上來說，這是頗為正確的思考。然而，教師的「介入」，很多時候不見得是要幫助同學達到「正確」的結果，而比較是把探究的過程釐清頭緒，形成未來繼續探究的方向或是結論，無論這些方向或結論是否與教學目標相同，或是這個結論是否夠形式化。任何一種非傳統教學法的介入，都會招致「影響上課進度」這一類的批評。因此在實務上，除了傳統的進度與成績，我們對教學實驗的目標或許可以更開放。當老師讓孩子的探究空間放得更寬，得到各種不同的有趣結果，那麼「數學探究」這個教學方法可能就更有說服力。

舉例來說，本文舉例中大多數的互動過程，都是同學分享加上教師總結與引導，或是老師在綜合與溝通階段給出關鍵問題，引導同學得到正確的解答。這當然是有助於達到原本設定的教學目標。但如果教師能讓同學在發表之後，由其他同學對原本報告的同學提出質疑，也可以同時培養同學的「批判思考」能力。讓不同組的同學「交相問難」，此時教師的功能就變成協助同學「把話說清楚」的「形式化」功能。在目前社會普遍對國文作文教學太注重文采而不重邏輯的不滿之下，數學教學對批判思維的幫助，或許是我們更重要的貢獻。

另外，同學的某些「錯誤」答案，其實也可能是更多學習機會的出現。文中第三例的三角探究，原本的目標是餘弦定理的應用。題目給定三角形土地的三邊長，問如何將之平分。事實上，這是一個極為開放的問題，中線不是唯一的答案。教師在操作數學探究時，必須去預期學生可能提出的不同方法。學生可能直接計算面積，然後在三角形中做出數個長方形總和為其面積的一半。這個方法不漂亮，但是切割成小長方形其實是積分的根本概念。又比如說，作者指出的「學生可能會取（三角形兩邊的）中點，因為誤認面積相等」。取兩邊中點連線，分割出來的小三角形的確只有原來三角形的  $1/4$ ，而我們知道這個答案的原因是因為學生必須已經有「相似形」的基本概念。如果是這樣的話，那麼這個「錯誤」加上相似形的先備知識就可以引申到更有趣的探究，那就是：如果我們要做底邊平行線將三角形平分，那麼這條線的高度為何？探究這個問題的難度不見得比使用餘弦定理困難，但是它不是傳統問題，而且更有趣。

綜上所述，「數學探究」這樣的教學法卻是容易進行的，因為學生不見得能達到我們設定

好的目標。然而，如果教師有充分的準備，而且能夠用各種方式鼓勵同學參與探究及討論的話，這個方法能夠達到的效果，或許會比原本的設定更豐富更多元。



## 論壇 3：〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉之我見

作者 | 蘇惠玉（臺北市立西松高中教師）

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉這篇文章從文獻回顧出發，探討「數學探究」這樣的教學徑路之意義、架構方法與目標，並提供在文獻中已經過檢驗的教學範例。在此僅就此篇文章所提的教學範例，根據個人的教學經驗，提供一點意見：

### （1）國小階段：奇數與偶數的意義

此活動以提出這樣問題：「6 因為可分成 2 堆（3+3），也可分成 3 堆（2+2+2），所以是偶數也是奇數」來造成認知衝突並進行討論。不過在「準備與聚焦」階段時，老師一開始告訴學生何謂奇數與偶數時的說法其實相當重要，如果教學目標是要發展出奇偶數的定義，那麼一開始似乎只能說「像 1, 3, 5, 7, … 這樣的數叫做奇數，2, 4, 6, 8, … 這樣的數叫做偶數。」之後教師評量學生給的例子時要如何評量？僅回答對錯嗎？如果學生僅能從這些數字例中去自行歸納出奇偶數的特性時，恐怕不能體會分成 2 堆與分成 3 堆的差別；其實教師可以從給出的數字例以及學生的例子中，先讓學生討論（探究）歸納奇偶數的特性（偶數可以平分成兩堆，奇數不行）之後，再提出問題，並總結與引導溝通。

### （2）國中階段：黑白棋

此活動將數學探索的方法用在解題上，教學目標為利用符號將問題與解法一般化。在此範例中，教師在準備階段展示的問題（酒精與水互換），相對來說學生反而較難理解，因為液體是連續的量，學生無法直接數出量的多寡後進一步看出數量的關係，反而是學生探究活動中的問題較能從視覺上或實地操作中獲得兩數量的關係。一般在教學活動的設計中，可以先利用簡單的問題讓學生真正理解問題的意義，還有利於直覺觀察其模式；或是以較難問題引起動機，在學生自行探究出方法之後，回過頭來解決這個較難的問題。另外，此探究活動的教學目標在於讓學生理解符號的便利性，以及利用符號進行一般化後可將問題延伸，此範例中的探究問題（黑白棋的個數）學生反而容易利用舉例的方式得出結論，進而失去使用符號的正當性。建議可將老師準備的問題與探究的問題對調。另外，在問題的呈現上，盡量不要讓學生迷惑在文字或名詞的使用上，例如用甲、乙杯來稱呼，而不是用水杯、酒精杯等等。

### （3）高中階段：三角探究

此活動藉由探究三角形中線長的求法，引出餘弦定理並引伸到餘弦定理的證明。此教學範例中先讓學生閱讀課本並從中尋找可用的公式，學生可能利用舊經驗「畢氏定理」，也可能從課本中找到所謂的餘弦定理來利用。這個探究活動很像現在流行的教學法「翻轉教室」的使用模式：先讓學生自行學習，然後花時間在學生問題的討論與解決上。不過與「翻轉」不同的是此活動讓學生同步在課堂上自行閱讀後找出可能的公式；然而台灣目前的教育現況是大部分的高中生都已經先在補習班學習過了，他們不需要去找就知道用餘弦定理求中線長度，因此失去此探究活動的意義。同時，在目前課程的編排中，求中線長的問題通常被當成是餘弦定理的應用，此活動設計容易變成在已經學習過餘弦定理的情形下，再回頭發展餘弦定理的證明。若我們的

教學目標為讓學生探究學習餘弦定理的證明方式，那麼可以直接從探究出畢氏定理求中線長的方法後，直接再讓學生繼續發展討論餘弦定理的證明，並讓學生自主發現其與畢氏定理的連結。

我們在各階段的數學教學過程中，不管是在明意識或潛意識，每位教師心中對數學知識的本質與學習法都有所「信仰」。在推廣某一種教學徑路時，如果不先改變教師的「信仰」，任何教學法最終都只會淪為文獻中論述的方法而已。不管如何，教學的最終目標都是讓學生學好數學，在教學現場，第一線教師在時間、進度與成績的三重壓力下，勢必得考慮每一次活動設計在階段教學過程中的重要性，以及能夠達成的目標效果。如果設計一次解題的探索活動，一節課下來的教學成果只是學生自主學會解決這個問題，或是延伸出的問題或觀念在銜接的課程中又沒有進一步探究或利用，那麼這樣的教學範例將很難說服現場教師去使用。不過如果教師認同數學探索這樣的教學徑路，倒不妨可以試著在合適的主題上設計與使用這樣的方法，至少可以在一片死水的傳統數學學習中，帶來一縷清新的微風，造成一些足以促進生長的漣漪。



## 《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
  - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
  - 三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 伍、文稿請以中文撰寫，以8,000字為上限（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：[tjmeassistant@gmail.com](mailto:tjmeassistant@gmail.com)

### 《臺灣數學教師》投稿基本資料表

<b>篇名</b>	(中文)		
	(英文)		
<b>總字數</b>	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
<b>關鍵詞</b> <small>(最多五個)</small>	(中文)		
	(英文)		
<b>頁首短題</b> <small>(running head)</small>	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
<b>通訊作者資料</b>	<b>姓名</b>	(中文)	(英文)
	<b>職稱</b>		
	<b>服務單位</b> <small>(或就讀校系)</small>	(中文)	(英文)
	<b>E-mail</b>		
	<b>通訊地址</b>		
	<b>電話</b>	辦公室：( )	分機
		行動電話：	
<small>如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</small>			
<b>共同著作人</b>	<b>姓名</b>	<b>服務單位</b> <small>(或就讀校系)</small>	<b>職稱</b>
<b>第一作者</b> <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>第二作者</b> <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>第三作者</b> <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
<b>作者註</b> <small>(可複選)</small>	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教師》。 填表人：_____ 填表日期：_____年_____月_____日			

## 《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日



**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
Taiwan Association for Mathematics Education

**Editorial Board**

**Chief Editor** | Tai-Yih Tso (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)  
**Vice Chief Editor** | Chao-Jung Wu (Department of Educational Psychology and Counseling,  
National Taiwan Normal University)  
**Editorial Panel** | Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)  
Li-Yu Hung (Department of Special Education, National Taiwan Normal University)  
Yuan Yuan (Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University)  
Hsin-Mei Huang (Department of Learning and Materials Design,  
University of Taipei)  
Chih-Chien Yang (Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics,  
National Taichung University of Education)  
Der-Ching Yang (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Chiayi University)  
Po-Hung Liu (College of General Education,  
National Chin-Yi University of Technology)  
Man-Li Liu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Pingtung University of Education)  
Yuan-Chen Liu (Graduate School of Educational Communications and Technology,  
National Taipei University of Education)  
Wen-Huan Tsai (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Hsinchu University of Educational)  
Feng-Jui Hsieh (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)  
Hak-Ping Tam (Graduate Institute of Science Education,  
National Taiwan Normal University)

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
*"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"*  
**TEL** | 886-2-7734-6576  
**FAX** | 886-2-2933-2342  
**E-mail** | tjmeassistant@gmail.com  
**Website** | <http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74>

---

1 數學探究之意義初探與教學設計實例

／林勇吉、秦爾聰、段曉林

Mathematical Inquiry and Its Teaching Examples

／ Yung-Chi Lin, Erh-Tsung Chin, Hsiao-Lin Tuan

19 從活化教學議題談國中數學教學

／王茂源、楊德清

The Activated Teaching Issues in Junior High School Mathematics Teaching

／ Mao-Yuan Wang, Der-Ching Yang

31 論壇

／左台益、英家銘、蘇惠玉

Forum

／ Tai-Yih Tso, Jia-Ming Ying, Hui-Yu Su

