

教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫

計畫主持人：

李國偉（中央研究院數學研究所研究員）

共同主持人：

黃文璋（國立高雄大學應用數學系教授）

楊德清（國立嘉義大學數理教育研究所教授）

劉柏宏（國立勤益科技大學通識教育學院教授）

計畫期程：101 年 12 月 1 日至 102 年 11 月 30 日

數學素養向度建議文

一、目的和背景

馬總統在 100 年元旦宣布開始啟動十二年國民基本教育，預定 103 學年高中（職）學生全面免學費、大部分免試入學。同年 3 月 31 日行政院備查《中華民國教育報告書》，其中第一項發展策略即規劃「推動十二年國民基本教育與幼托整合」。於是，教育部訂定「十二年國民基本教育實施計畫」，做為準備實施的依據。該實施計畫的配套措施有 11 項子計畫，共包含 19 個方案。其中第 3 項配套措施為「學生生涯規劃與國民素養提升」，方案 3-6 為「提升國民素養實施方案」。根據此方案成立「國民素養專案計畫辦公室」，主要任務為研討建構素養的核心概念與測量指標，檢視目前所有國民素養相關調查，整合各素養調查，並規劃尚未調查的素養項目。國民「素養」指的是重要的且能帶得走的能力與態度，每位學生都有權力獲得且必須獲得，才可以與時代、社會接軌並滿足生活上解決問題的需求。目前規劃五個領域的素養：語文、數學、科學、數位、教養。

人類社會發展到 21 世紀，進入空前的複雜程度，不僅個人存身的局部環境內容繁複，寰宇各地的關聯也愈形緊密。個人如何理解世界的實況，適應變遷的形勢，都需要具備一些基本的素養。個人做為社會的一份子，如何迎應集體面臨的考驗，例如經濟的平穩成長、環境的永續經營、社會繁榮與公義的兼

顧，也需要具備一定的素養才能作出適當的貢獻。因此，國民核心素養的界定，逐漸成為近 20 年來國際上關注的議題。又因為運用「數」的能力，是一般大眾必然需要也可達成的素養，所以各種與界定素養相關的研究，均不缺乏此項目。

現在是一個不斷拓展數位化的時代，如何從外界擷取有價值的資訊，轉化為合適的模型，並作出合理的決策，光具備計算「數」的能力並不夠用。能適應當代解決問題需求的國民，還需要有捕捉資訊、運用邏輯、甚至是溝通思維等能力，這些就屬於數學素養的範疇。在 12 年國民義務教育的體制下，為應付考試而教育的模式會逐漸淡化，提高學生的數學素養將成為數學教育的主要目的。因此，本研究向度的主要目標，是以 18 歲受完國民義務教育的國民群體為對象，釐清並界定他們都有權力也必須獲得的數學素養。

國際與國內有關界定基本素養時，多包含數學因素，重要例證如下：

（一）自 1990 年代中期之後，「經濟合作與發展組織」（The Organisation for Economic Co-operation and Development，簡稱 OECD）積極關注能力的界定與調查，所執行的「素養的界定與選擇」（The Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations，簡稱 DeSeCo）研究專案，界定出三項核心素養層面：「能使用工具溝通互動」（using tools interactively）、「能在社會異質團體運作」（interacting in socially heterogeneous group）與「能自主行動」（acting autonomously）。在「能互動地使用工具」層面裡包括「使用語言、符號與文本互動的能力」，而所謂「符號」即涵蓋數學思維的運用。

（二）歐盟執委會於 2005 年發表《終身學習與核心素養》（Lifelong Learning and Key Competences for All: Vital Contribution to Prosperity and Social Cohesion），曾提出終身學習八大核心素養，其中涵蓋「數學能力以及基本科技能力」。

（三）洪裕宏等人於 2006~2008 執行國科會計畫《界定與選擇我國國民核心素養之概念參考架構與理論基礎研究》（簡稱台灣 DeSeCo），指出「國民核心素養的目的在界定與選擇一組核心素養，以期讓具備這些素養的個人可以實現成功人生，使社會整體能運作良好。」該研究對應於 OECD 所界定出的三項核心素養層面，提出 20 項台灣的基本素養。在「能使用工具溝通互動」層面的六種素養項目中，第 6 項即為「數的概念與應用：理解數的概念，並應用日常生活，解決問題」。「台灣 DeSeCo」為適應台灣的特殊需要，在 OECD 三項核心素養層面之外，更引入第四層面：「展現人類的整體價值並建構文明的能力」，其內容為「形式的邏輯能力、哲學思想能力，與『生活』相關的邏輯能力、社會正義、

規範相關的邏輯能力、意志價值追求相關的邏輯能力、工具理性」。邏輯思維與方法的基礎也就是數學的基礎。「台灣 DeSeCo」第四子計畫即關注於「國民自然科學素養研究」，該子計畫結案報告附錄有翁秉仁所撰「數學國民核心素養」。其中「數學國民核心素養以三個考量為依歸」，分別為：能解決日常生活的數學問題；能作為科學學習的基礎；作為理性思考的典範。

二、目前狀況

自 1999 年以來，無論是「國際教育學習成就調查委員會」(International Association for the Evaluation of Education Achievement, IEA) 所辦的「國際數學與科學教育成就測驗趨勢研究」(Trend of International Mathematics and Science Study, TIMSS)，或是 OECD 所做的「國際學生評量計劃」(Programme for International Student Assessment, PISA)，台灣學生的數學成就和素養均排名在所有參與國家的前五名。但這兩項調查也顯示，台灣學子對於數學的認同度卻落後於其他國家。

「台灣 DeSeCo」將 OECD 的「DeSeCo」關鍵概念「competence」譯為「素養」，「literacy」譯為「能力」。但是檢視 OECD 的 DeSeCo 計畫，「competence」所指的是一個人特定的情境中，能成功地滿足情境中的複雜要求與挑戰，順利執行生活任務，強調個體在複雜的環境中，如何藉由自我的特質、思考、選擇，及行動，來獲致成功的生活或美好的生活的理想結果。PISA 的測驗在評量擁有「competence」時的「literacy」程度。因此針對數學領域來講的「素養」，應該放置在 PISA 的「literacy」脈絡來理解。

PISA 定義「數學素養」為「個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於了解數學在世界裡扮演的角色，也能幫助未來的公民，做出有所依據且具反思性的判斷與決策」。數學素養內容兼顧數學內容領域（包含：變化與關係、空間與形狀、數量、不確定性與數據）以及數學歷程（包含：形成數學情境；應用數學概念、事實、程序以及推理；詮釋、應用以及評鑑數學結果）。

不過 PISA 測驗的對象是 15 歲的國民，而本計畫的研究對象是完成 12 年國教後的國民。針對 18 歲國民應具有的數學素養，以往研究並不多。2012 年由蔡清田主持的國家教育研究院委託計畫《K-12 一貫課程綱要各教育階段核心素養與各領域課程統整研究》（簡稱 K-12 一貫課程研究），呼應《中華民國教育報告書》培育公民素養，因應「12 年國民教育」課程縱向連貫與橫向統整，作為發

展《K-12 年級一貫課程綱要》與「K-12 年級一貫課程體系指引」的基礎。該計畫訂定三範疇九面向國民核心素養內涵，在核心素養「溝通互動」的具體內涵「語文表達與符號運用」項目中，6 歲有「運用簡單的語文、數理等符號，進行繪圖或記錄」；12 歲有「生活所需的基礎數理知能及應用之素養」；15 歲有「理解數學概念與原理，應用於日常生活情境中」；18 歲有「運用邏輯思考解決問題」。在核心素養「自主行動」的具體內涵「系統思考與問題解決」項目中，各個年齡層都強調「理解並分析生活情境中的數學問題」，並以「系統的思考」及數學的知識與方法解決問題。但是對於數學素養的具體內容，並沒有深入的探討與申論。

「K-12 一貫課程研究」中由林永豐主持的子計畫《高中教育階段核心素養與各領域課程統整研究》，列出的高中數學科核心素養如下：

（一）語文表達與符號運用：具備演算、抽象化、推理、連結、解題、溝通等數學能力，並能運用數學符號進行邏輯思考、分析並解決問題。

（二）資訊科技與媒體素養：具備使用計算工具的能力，藉此處理繁瑣的計算，進行較為複雜的問題解決。

（三）藝術欣賞與環境美學：能欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神與結構嚴謹的特質。

（四）國際理解與多元文化：能將數學知識與具體世界連結，瞭解其在公共事務或不同文化中的形式與意義，並能進行批判性識讀。

以上表達了在 OECD 關於素養的思想脈絡裡，將 PISA 的數學素養向上發展到 18 歲國民的觀點。

為推廣 PISA 評量數學素養的題型，幫助教師製作與數學建模及數學應用相關的題目，林福來帶領團隊出版《臺灣 2011 數學素養評量樣本試題》做為示範，並援引曹亮吉的見解，主張「素養是了解與見解的表現」。

三、願景和目標

DeSeCo 計畫以整體性（holistic）的觀點，將「素養」看為成功地回應特定情境下的複雜問題的能力。它包括使用知識，認知與技能的能力，以及態度、情緒、價值與動機等等。「台灣 DeSeCo」為配合我國國情，在 DeSeCo 核心素養的三維層面之外，增加了第四維「展現人類的整體價值並建構文明的能力」，從而擴張「素養」的定義為「在培養一個人成為一個獨立的個體的過程中，所建立的作為其人格發展的基礎。」因此，在界定數學素養時，不應僅從數學本科知識的立場審視問題，而必須從整體性的視角，釐清相關的核心數學素養，以期成為人格發展的基礎。PISA 對於「數學素養」的定義得到國際上廣泛的採納，以其為基礎並參照國情，可將數學素養內涵更加明確闡述如下：

數學素養的核心內涵應指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

因此提升數學素養的願景是：有效學習數學的思維方式，以便靈活運用數學知識、技能與工具，解決生活中的問題，並成為具備理性反思能力的國民。

做為能反思、能判斷、能決策的國民，必須具備解決問題的能力。如果數學課裡要學生解決的問題，是源自於現實的世界，例如如何規劃學校裡的緊急逃生路線，如何規劃有效使用學校水電資源以配合永續發展，這些影響生活品質的重要問題，便可以提供學習的動機與應用的導引，從而有助於建立國民的一般解決問題的能力。純粹屬於數學本身的專技性問題並非完全不可取，因為精熟數學基本概念的操作演練，才有可能把數學方法靈活運用到與情境相連結的複雜問題。然而為避免形式化的數學教學與學習，教學現場應該經常、反覆並且具有創意地幫助學生把所學的數學與現實世界連結。如此不脫離生活經驗的數學學習，才有可能讓一般國民即使達不到熱愛數學，至少不會排斥數學；即使達不到隨時熟用數學，至少樂於嘗試使用數學。如此，我國的數學教育才會發生根本的改進。

環繞著廣義的解題需求，12 年國民教育提升數學素養的目標如下：

- (1) 學習並發揮數學思維的特長。
- (2) 充實並活用基本的數學知識。
- (3) 建立健康的對待數學的態度。
- (4) 善於利用計算器與數位工具。

(一) 學習並發揮數學思維的特長

思維是個體將心理上所認知的事件，通過表徵、抽象、分析、綜合、判斷、推理等步驟，得以理解事件的性質並獲知其意義。數學思維是運用數學概念、數學方法、數學知識的思考取向和思維特徵。每個人在社會生活中都需要認識事物，分析事物，並作出合理判斷，這些都離不開數學思維的運用，因此數學思維是數學素養最基本的要件。

在培養數學的核心素養時，首先應重視數學思維方式的特色，再求數學知

識的追求。數學思維有三種特色最值得彰顯：

（1） 由繁化簡、以簡馭繁（抽象性）

數學的基本概念來源自生活的世界，但是數學與一般經驗科學有本質上的區別，也就是說數學關注的不是世界裡各種物件的物理或化學性質，而是它們之間的關係。關係由反思實體而生，本身卻不具有形的實體，充其量只是一些符號的表徵，這就是數學抽象性的本質。例如：1、2、3…，一、二、三…，或 one、two、three…只是自然數的不同表徵，它們所代表的概念性的數都是一樣的。然而日常生活裡的數卻總是伴隨著度量單位出現，例如：10 公斤玉米、60 度電、15 個小時。數學在抽象的概念上發展，探索它們之間的相互牽連，從表象分殊的繁複概念裡，逐步抽離出更具統合性的上層精簡概念。然而世界之奇妙在於貌似虛空的思想建構，又往往出其不意並且極其有效地運用到實際的問題上。例如，源於 19 世紀解多項式根的群論，在 20 世紀成為量子論的重要工具。

數學的抽象性更使數學得以充分發揮以簡馭繁的功能，因為每當抽象的層次提高，原來分屬不同領域的知識，就有可能在更高的觀點下得到統一。例如，從古希臘歐幾里得的平面與立體幾何，經歷解析幾何、仿射空間、射影空間、非歐幾何、拓樸空間，人類對於空間的認識隨抽象層次的提升，愈加體認到空間的本質與普遍性。從數學解題的角度來看，抽象性更表現在利用數與形當做模型的思考方式上。

（2） 有條有理的分析與推論（邏輯性）

邏輯學雖然發源於古希臘，在亞理斯多德手中撰成系統著作，但是有條理而能保持真理性的論述方式，各個古代文明均不欠缺。反過來說，如果思想無力表達明晰的前因後果，也不可能建立起輝煌的文明。只是希臘人最早意識到推理的規則，而成就了一門稱為「邏輯」的理性思維基礎的學問。

數學知識的表達通常都是以演繹的方式，說服人接受在一定前提的假設下，必然導出的結論。因此與其他學科相較，最具有明確的邏輯論證脈絡。把數學知識與外在世界連結的重要方法之一，是通過數學模型的建立。在建立繁簡適中、易解好用的模型過程裡，須不斷分析、簡化、歸納真實世界的現象。養成有條有理的思想習慣，才比較容易掌握事物的本質，釐清表象背後的規律性。通過學習數學的實際操作過程，個人思想會受到條理性的陶冶，在潛移默化中便養成思維方式不違背邏輯的良好習慣。邏輯思維的能力與習慣，是培養有反思與溝通能力的現代國民不可或缺的元素。

（3）永續而深刻的創新力

從數學發展的歷史來看，新的概念不斷創發出來。譬如原始數的概念只包含正整數 1, 2, 3, ...，但是經過漫長的掙扎，人類意識到 0 做為數字的意義，又從正數發展出負數，從有理數到實數，進而至複數甚至四元數。至於當代數學更是突飛猛進，各種創新的概念與理論層出不窮。所以數學是一種絕對偏重創造的學科，即使是老舊的內容，也不斷地尋求新的表達方式，或建立與其他領域新的關聯。數學裡的個別領域一旦創造停滯，就必然走上為多數人揚棄的路徑。

在當前快速多變的知識經濟與科技時代，創造力更扮演了極其重要的角色。國家是否具有競爭力，也與國內的人才是否具有創造力素養關係密切。當前學校教育若想加強學生對時代變遷的適應力，就應該重視培養學生的創造力。而活用數學使成為生活化的數學，有利於體認創新的價值，以及尋求創新的動力。

（二）充實並活用基本的數學知識

在數學素養的知識內容層面上，PISA 所梳理出的四大領域，仍然具有重要的參考性。從 PISA 評量的 15 歲國民到 18 歲受完 12 年基本教育的國民，在同樣的四大領域裡，學習的深度有所加深，題材的廣度有所加廣。此外，在 15 到 18 歲之間，學生的性向會發生較明顯的分殊。如果傾向繼續升學方向前進者，可在四大數學知識素養領域內，多一些偏向學術性的訓練。而傾向社會就業路徑邁步者，應增加數學知識與外在世界連結的學習，以便增強應用數學於實務的能力。數學知識包括對於數學概念的理解與運用，以及對於數學演算程序操作的執行。現分述四大數學知識素養領域如下：

1、變化與關係

「關係」是日常生活裡經常使用到的詞語。發生關係的兩端主體，有的是恆常穩定的，譬如親子關係；也有是變動的，譬如油料與油價之間的關係。「變化」則在其前與其後的主體間搭建起一定的關係。生活及科學裡充斥著各式各樣為人所在意的變化與關係。在處理事物時，想要達成有效的成果，常需掌握其間的各種變化與關係。數學的訓練是了解變化與關係本質的極佳途徑。

數學裡的關係，有些是物件先存在，而後人意識到其間的精微的關係，例如二次方程式根與係數的關係，二者知其一便知其二。有些關係是人為賦予定

義，然後在物件間以此關係加以聯繫，例如各種等價關係、對稱關係等。有兩種關係在數學裡特別受到關注：函數關係與邏輯因果關係。簡言之，函數就是一種對應關係，在一定的操作下，將指定物件唯一對應到另一物件。雖然在國民教育階段裡，函數多以某種 $y = f(x)$ 的形式表現出來，但是從數學素養的觀點來看，更應培養學生能從操作對應中去理解函數。至於邏輯因果關係，則是指在某假設或前提下，必然導致某結論成立。有些邏輯因果關係較明顯，如任一偶數的平方仍為偶數，有些則須經歷證明的過程而後得知，例如若某整數各個數字的和為 3 的倍數必可被 3 整除。數學裡由於經常在檢驗邏輯因果關係是否成立，因此使人熟練數學思維方法，也有助於了解生活及科學裡的種種變化與關係。

2、空間與形狀

處理空間與形狀資訊需有良好的空間感。空間感是個人對生活中各種幾何形狀的基本性質、組成、結構、以及形狀間相對關係的一般性理解與認知，從而發展彈性靈活的方法去使用這種理解。與空間感相關的有效的解題策略，是處理生活中所遭遇的圖形和視覺表徵問題的要素。例如地圖的解讀，汽車導航器的使用，在陌生街道裡的自我定位與辨識目標方向，居住空間的規劃，甚至環境的美化，都與良好的空間感息息相關。空間與形狀的素材也可從傳統文化的脈絡中擷取，例如國畫中的「高遠」、「深遠」、「平遠」散點透視法，以及中式建築的鏤頭接合、飛簷曲線等獨具特色的工法或造型。處理空間與形狀的知識主要依賴幾何，幾何經常在其他科學學門中，也發生重要的作用，最明顯的例子是力學，但是即使是生命科學裡，生物的樣態或蛋白質的空間形狀，也都是值得研究的對象。因此，良好的空間感與處理形狀的能力，是現代國民應具備的基本素養。做為幾何基礎知識的歐幾里得平面幾何學，應該在中學課程中受到一定程度的重視。

3、數量

對於數的認識，不僅僅是一種量化的符號，而是生活中經常與度量單位結合產生的數感。數感是個人對數字（帶單位或不帶單位）、運算、以及兩者間產生的情境的一般性理解與認知，以及能夠以彈性靈活的方法去使用這種理解和發展有效的解題策略（包括心算、估算），來處理日常生活中所遭遇與數量有關的問題。在科技快速進步，資訊複雜且多變化的時代裡，一般國民更應具備良好的數感以解決現實生活中所遭遇的數量問題。例如：甲乙兩家餐廳對擁有 9 折貴賓卡的客戶優惠計算方式不同。甲餐廳直接免收 10% 的服務費，乙餐廳則將餐費打 9 折，但須加上原價 10% 的服務費。數感不好的人有可能會誤以為兩種算法有差別。第二例：歡樂加油站的贈品處上寫著「每加滿汽油 500 元贈送科學麵 4 包」，對面的幸福加油站贈品處上寫著「每加滿汽油 750 元贈送科學麵 7 包」。數感好的人若要加 1500 元汽油，就會去幸福加油站，因為可以多拿 2 包

科學麵。然而若要加 1000 元汽油的話，反而會去歡樂加油站，因為可以多拿 1 包科學麵。第三例：行政院國家永續發展委員會在 2007 年成立「電磁波跨部會工作小組」，採納呈現電磁場量測的單位是 mW/cm^2 ($\text{mW} = 0.001\text{W}$ ，其中 mW 為「毫瓦」、 W 為「瓦」、 cm 為「厘米」)，而永續會中有環保團體人士堅持使用量測的單位是 $\mu\text{W}/\text{m}^2$ (其中「微瓦」 $\mu\text{W} = 0.000\,001\text{W}$ 、「米」 $\text{m} = 100\text{cm}$)，使得量出來的數字放大了一千萬倍。這是因為採取較小的量測單位，就會使量測的數值放大。擁有良好的數量素養，才不會因為純粹數字的大小而誤導對於實際數量的研判。

4、不確定性與數據

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。當銅板以自由落體方式落下時，若給定高度，則落地所需時間為定值，這是必然性。但那一面朝上卻未可知，此便屬隨機性。但是隨機性並非全然混亂，隨機性的規律建立在機率理論上。由於生活中充滿著隨機性，使得人們對很多事物常感不確定，因此需做各種預測。有些預測方式，雖然缺乏科學依據，但是即使胡亂猜測，獲得正確答案的機率仍有可能不為零，致使人們難以放棄擲筊算命、求神拜佛等手段。為了做有科學根據的預測，也就是所謂讓數據說話，可利用統計方法，先收集資料，加以整理及分析，然後給出推論。由於預測常不可能百分之百精準，因此在給出預測值之外，通常也要給出誤差大小。對於隨機現象，並無法保證預測的誤差必有多大，只能給出誤差不超過某定值的機率。統計的運用，通常不像數學證明那樣獲取必然的結論，而是給出允許誤差下的機率式保證。並且所能保證的機率，不但不是百分之百，還附帶有誤差。統計的這種特性，常使大眾媒體在解讀數據時發生錯誤，甚至還有刻意誤導的偏差行徑。人們在隨機世界中經常面臨抉擇，或需對現況及未來進行推測與預測。充分了解不確定性，以及具備基本的處理數據與風險評估的能力，應該構成數學素養的一部分。

(三) 建立健康的對待數學的態度

在 TIMSS 或 PISA 這一類國際評量中，我國學生雖然在數學知識的測試上表現優異，但是在關於喜好數學程度、對數學的信心、以及數學是否有用的認知上，都呈現相當負面的態度。這種現象反映出我國的數學教育並未把數學當做「人格發展的基礎」之一環，從而造成學生學習數學時的偏差態度，也無法由數學以簡馭繁的嚴密精神中，獲得精神美感的提升。

我國學生在國際評量中成績優秀，但在情意方面卻令人警惕。也就是教師或許因為學生成績出色而自我感覺良好，但學生卻在內心與精神上感受百般挫折。健康的數學教育應該使學生相信努力會得到對等的收穫，逐步培養出自信

以及良好的工作教養。如果學生能從文明發展的脈絡中，品嚐數學的功能與價值，才會感受到數學是有用的、值得花費時間精力學習的科目。這種學習的目標，不在追求測驗分數的優異，而在內化數學思維與數學知識，使自己成為有反思能力，以及可以適應環境變遷，在職場上更具競爭力的國民。

（四）善於利用計算器與數位科技

傳統的數學工具，例如算盤、計算器、數表、計算尺等，目的多在於簡化數值計算的過程，以節省人力的方式獲得精確或估計的答案。但是當代不斷快速發展的電子計算機，因為軟體的出現，使得與傳統的數學工具大異其趣，功能也遠超出數值計算的範圍，而成為各種資訊的處理器。數位科技強大的計算威力與模擬效果不僅能豐富數學家的想像，也逐漸改變部分數學家思考的模式。在數位工具日漸普及的今天，討論未來世界公民應具備的數學素養時，絕對不能忽略各種數位工具（含試算表、計算機、數學軟體、多媒體、網路、雲端等）與學習數學之間的關係。數位工具可以將數學概念視覺化、可以協助整理和分析資料、可以做正確和更有效率的計算以幫助學生探索數學概念，更聚焦於決策判斷、反思和推理等問題解決的活動。因此數位科技的使用能力，也就構成核心數學素養的一部份。

目前歐美國家，甚至許多亞洲國家，已將數位工具視為數學教學必備的工具之一，也允許在測驗時使用手持計算器。華人社會傳統上比較強調計算能力和抽象思考，對於引入數位科技於數學活動始終比較被動和消極。例如「香港課程發展委員會」在 1985 年的報告中對於計算機的功能仍停留在消除學生對繁複計算的恐懼上面。但到了 2002 年的課程指引則明確指出運用數位科技能力是中小學生共通的數學能力，並定義所謂運用數位科技能力是「使用資訊科技去尋找、分析、處理和介紹各項資料，並做出審慎的判斷、明智的選取能力。資訊科技能幫助和激發學習者按自己的程度學習，養成自學的習慣，令他們終身受惠」。新加坡於 1997 年開始推動第一階段數位科技教育精進計畫，目的是在 2002 年之前所有中小學都能建置適當的數位科技環境，教師也能有效使用數位工具輔助教學。緊接著於 2002 年七月，新加坡繼續推動第二階段數位科技教育精進計畫，其願景是繼續發展以學生為中心的教學活動。而數位工具則協助數學教師發展非程序型、開放性和生活建模等進階思考的課程活動。中國大陸在 2011 年最新的數學課綱中強調「要把現代信息技術作為學生學習數學和解決問題的有力工具，有效地改進教與學的方式，使學生樂意並有可能投入到現實的、探索性的數學活動中去」，並開始計畫性地推動將數位科技落實於數學教學之中。

我國九年一貫課程綱要並沒有將資訊獨立設科，而是包含在自然與科技學

習領域之中，其目的便是希望資訊科技須融入各科教學，且在《中小學資訊教育總藍圖》中建議教師使用資訊科技於教學的時間要佔總教學時數的 20% 以上。雖然在《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》（簡稱國中小 97 課綱）和《普通高級中學課程綱要》（簡稱高中 99 課綱）中也提出資訊科技融入數學教學的必要性，但很明顯的，由於缺乏跨學科的橫向連結，仍停留在強調數位工具可以降低計算複雜度的低階功能。

縱使國際間對於數位工具融入數學教學普遍持正面看法，也積極推廣並開發相關軟硬體工具，但國內對此議題的整合性行動仍不足，宜採行下列措施以開拓新局面：

- 1、認清課程目標與數位工具之間的必要性和關聯性，學習成效調查方式避免僅用紙筆計算，應允許學生在上課與考試時使用計算器。並應加強數位工具融入教學的研究與論述，以及教師的資訊科技訓練。
- 2、充實校園數位工具環境，評估數位工具融入數學教學的成本和可行性，弭平城鄉數位落差。應注重宣導與推廣在數學教學裡活用免費自由軟體，例如 GeoGebra、Maxima 等。
- 3、有計畫性地進行數位工具軟硬體平台整合性的研究，以奠定將資訊科技融入數學教學的理論和實務基礎。

四、數學素養與現行課綱的關聯

國中小 97 數學課綱的基本理念在素質指標上強調「帶著走」的能力，亦即使學生能理解重要的數學概念並加強數學能力，以便在日常生活及職場裡應用。97 數學課綱強調抽象化能力、邏輯思考與推理能力、以及連結數學與其他學習領域的能力發展。數學素養內涵的數學思維與數學知識部分，呼應了 97 數學課綱的基本理念。

97 數學課綱包含四個學習階段：第一階段為國小一、二年級；第二階段為國小三、四年級；第三階段為國小五、六年級；第四階段為國中一至三年級，其課程主要目標在協助學生發展數、量、形的概念。在數方面，能熟練整數、小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識負數與根號數之概念與計算方式。在代數方面則要熟悉常用的函數關係與解方程式的能力。在幾何方面則要學習簡單圖形的基本幾何性質，並能學習簡單的幾何推理。能理解統計與機率的意義，並認識各種簡易的統計方法。97 數學課綱的教學目標即在充實學生數學素養的數學知識部分，並且藉由達成課程目標，希望培養學生具備演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力，也就是習慣於把數學思維的方式用在問題的解決上。

高中 99 數學課綱的目標包括：1、培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。2、培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。3、培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。99 高中數學課綱要培養的核心能力包括：1、演算能力；2、抽象化能力；3、推理能力；4、連結能力；5、解題能力；6、溝通能力；7、使用計算工具的能力。99 高中數學課綱中高一數學的定位為學習與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析時所需要的基礎。高一上處理有關連續量的課題，包括由度量連續量所產生的實數，以及描述量與量關係的基本函數，如多項式函數與指數、對數函數。高一下處理有關離散量的課題，包括數列與級數、排列組合、生活中常見的古典機率，以及其他學科常用到的數據分析等。高二數學的定位為社會組與自然組學生在學習上所應具備的數學知識，其主題為坐標、向量幾何與線性代數。高三數學選修課程在加深加廣必修課程所學內容，並提供大學學習相關學科的基礎知識。

現行高職課綱中提出高職數學教學有三大目標：1.培養學生的基本數學能力，發展科技資訊時代的數學素養。2.用數學基本能力，解決相關課程之表達、溝通設計等問題。3.培養數學的思考、推理分析與批判以及創造之能力。培養數學素養列入第一目標，雖然缺乏較細緻的闡述，似乎隱含強調數位科技應用於教學之意。在課綱「教學方法」中說明「可配合多媒體教學，使之生動活潑，增加學習意願」，但仍未具體指明計算器和數學軟體的使用。此外，課綱未對課程內容作數學知識領域的區分，各年級章節之間欠缺結構性的聯繫，也沒有提出一個高職數學教育的高觀點，足以適應高職生就業發展十分多元的特性。高職課綱第三項目標與前述數學思維的邏輯性及創造性相符。課綱雖呼籲「教材之編寫應由易而難，由簡到繁，由具體到抽象」，但因高職教育以實務取向，所以沒有特別標示數學本質上的「抽象性」。然而學習基礎數學用以建立模型的重要性需加說明，否則所謂「應儘量以日常生活的實例，引起學生的學習動機，並隨時顧及日常生活上的實際應用，使數學與日常生活緊密結合」，容易被理解為只要學習初階的數學知識，便足以應付交易買賣之需。

以現行高中及高職的數學課綱來看，在培養數學素養方面，高中課綱比較有良好的呼應。而高職數學教學的方式，比較侷限於發揮數學工具性的單一角度。提升數學素養的教育，是把數學教育視為國民建立人格發展的基礎，因此 16 至 18 歲的國民，雖然性向分殊志趣不同，但是在基礎的數學素養上，仍須有效地獲得，成為帶得走的重要能力與態度。

五、建議：政策形成方向

（一）行動方案原則

1、培養數學直觀，提升推理能力，連結情境脈絡

抽象性是數學思維的一種主要特色，但是需要長時間與循序漸進的學習，才能體認抽象性的必要與重要。經由邏輯上嚴謹的程序推得直觀上貌似顯然的事實，雖然在知識的組織上簡潔，但是在學習的認知方面可能使很多學生產生困惑。18 歲以前，學生具有的現實世界經驗還不夠豐富，傳統上數學教學盡量從本科的內在理路發展，迴避掉抽象觀念如何從經驗世界剝離出來的動機與歷程，也較少把數學概念世界裡層層創新的產物反饋到具體的應用，這種教學方法難以滿足培養 21 世紀國民的需求。

提升國民數學素養的方法，首要在減輕形式化的數學教學與學習，應將學生學習的數學內容與現實世界的情境脈絡連結，從而豐富了學生對於數學概念的直觀掌握。這方面自然科學與社會科學都會提供許多學習的素材，而且數學與其他學科的良好互動，可以促進雙方素養的提升。為了強化學生邏輯推理的能力，應同時提升閱讀素養，並促進數學教科書的中文書寫水準。數學與語言系統具有許多相似的特點，因此閱讀能力低落會影響數學的學習，而數學文本的書寫不夠精緻細密，則會造成表述的概念含混。若要培養數學思維的推理能力，不能只在形式邏輯的範圍內打轉，應該在平時閱讀文本中便學習梳理清楚思路。

2、活化教學模組，使得在必要的共同基礎知識上，能有適性發展的空間

未來的社會必然更加多元化，而其變遷也將日益加速。在接受 12 年國民教育的後期，學生應該會為日後的生涯發展預作準備。在四大數學知識素養領域裡，雖然基本的部分是所有學生都應具備的，但是並非所有的人都要學習一樣的知識內容。數學教學的內容可以進行模組化設計，在基本的共同部分之外，可以讓學生自由選擇想學習的數學知識，使得不同的人數學上有不同的成長軌跡。此外，也可試辦與職業性課程協同教學，例如可與建築或測量課程協同講授三角函數，使得學生更容易把數學概念與情境相連結。

3、將數位科技有效融入數學教學，提升學生探索與解決問題的能力

數位科技融入數學教學大致上可以分為以下三個層次：

（1）數位科技做為程序處理工具：學生能利用計算機處理牽涉到大量或複雜數據的問題；利用試算表將統計數據轉換為長條圖、折線圖、圓形圖等各式統計

圖表以了解數量間的變化關係；透過繪圖軟體了解基本平面幾何圖形的結構與特性。

(2) 數位科技做為認知學習工具：學生能利用計算機檢驗數值間的關係並發現規律；透過試算表、繪圖計算機、繪圖軟體探索並認識平面幾何和函數圖形的特徵與數學結構。

(3) 數位科技做為問題探索工具：學生能利用計算機發現數值間的規律並建立假設和進一步證明；處理數學建模問題時能透過網際網路搜尋相關資料，再配合試算表、繪圖計算機、繪圖軟體建立數學模型並測試驗證。

以上三種層次並非各自獨立，與課程難易度也無絕對關係，教師可以根據授課單元和問題特性，適當地將這三個層次融入問題解決活動之中。此外，隨著平板電腦的普及和各式 App 程式的開發，以及雲端科技的突飛猛進，也須關心數位遊戲學習在數學學習方面的發展、趨勢與效益。

4、體會數學創造歷程，加深認識數學的人文價值。

數學的理論體系具有人類知識裡最嚴謹的結構，在推導過程中能完全保證真理的傳遞。但是一部至少三千年的人類數學發展史，卻充滿了曲折、挫敗、迷茫等等失敗事蹟。經過精雕細琢而展現出來的當代數學風貌，往往掩飾與阻礙了學習者貼近數學知識發展的真實歷程。在提升國民數學素養的方式上，除了傳統的將完備的數學內容灌輸給學生，讓學生照著演練與解題之外，應給予學生機會嘗試感受數學的創造歷程，例如鼓勵學生運用實例逐步澄清概念，大膽猜想結果，或保留可繼續思考的開放性問題。這種在教學中融入數學文化素材的方法，可以提升學生的學習興趣，豐富學生對數學的認識，感受數學在人類歷史上的貢獻，及其文化魅力和人文價值。

5、建立數學素養教育在師資培育方面的配套措施

提升數學素養的理念，必須通過教師現場教學的落實，才能體現到學生身上。師資培育的配套措施，首先是提升教師本身的數學素養程度。在教師的養成過程中，應注意其開放性的態度，主動尋求認識社會上各行各業或其他學科所需用的數學，以便將來提供學生做參考。厚實教師對於閱讀與溝通的能力，並且能適當運用數學史的材料。在教師鑑定的方式上，除了知識面的測驗，也應重視素養的表現。

6、規劃建立追蹤輔導機制

針對國民教育的進程，研議學生在 9、12、15、18 歲時，分別應達到的數

學素養基本水準，並規劃設計追蹤學生數學素養成長狀況的機制，在學生有困難達成最低基準時，能啟動相關的輔導工作，以期盡量有效降低在數學素養上有落差的學生比率。為使 12 年國教能順利啟動，初期可考慮將現行補救教學、差異化教學與提昇素養整合辦理。

（二）行動方案評鑑

1、在學習者方面

可預見未來在對學習者成效的調查上，會增加電腦與網路等數位工具的使用。對於個別的受測者，測驗的方式會更多元、更能適性變化。因此數學學習成效的調查應平衡傳統紙筆測驗的形式，充分利用數位工具提供的方便性，給予學生較大的空間與時間。例如，在每個單元教學完畢後，學生可以使用網路來檢視自己的學習成效。學習成效調查題目裡的具體數據，能由電腦自動更換，題目的難易也可設計成遊戲過關方式。學生得以反覆的接受測驗，直到能充分解決一組題目後，再進入下一階段的題目。學生的成就感將取決於自我的進步經驗，也就淡化了同儕在集體考試中分高下的挫折感。數位工具還可以協助合作性的解題，更能培養現代國民的良性互動，並且在心智的互動激盪探索中，品味出數學世界的美與和諧。

在推行數學素養教育之後，學生在學習數學的過程中，所表現的學習態度、課堂反應、參與的積極性、在團隊解決問題時候的貢獻程度，都不是一次性測驗能充分反映。而這些過程，對學生的數學素養培養相當重要，所以未來的學習成效調查機制應該包含學習過程的檢查。

2、在學校方面

評鑑學校提升數學素養的成效時，不應只重視該校學生在各種測試的分數，而應重視學校是否啟發學生在生活環境中，發覺與數學相關的情事；是否舉辦鼓勵學生嘗試數學創新的活動，特別是觀察與猜想的活動；是否讓學生參與數學擬題與寫作以及合作發展數學實驗；是否培養學生能不脫離人文與美學脈絡來鑑賞數學，認識到數學做為人類文化重要成分的價值。此外，也應評鑑學校是否提供教師研發與實驗提升數學素養教育的設備、資源與機制，並且評鑑教師執行數學素養教育的成效。