黃俊瑋（2015）。
和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義。
臺灣數學教育期刊，2（1），41-68。
doi: 10.6278/tjme.20150313.001

和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義

黃俊瑋
國立臺灣師範大學數學系

本研究考察江戶時期重要關流和算家的著作，分析從傍書法發展、過渡至點竄符號系統的過程中，和算家用以表示分式的表徵與符號，並探討相關特色與概念上的意義。研究中發現，分式表徵的發展過程中，共出現了五種表示分式的方式：1.以文字記錄乘除法操作、2.分開記錄被除式與除式、3.將除法運算記於「｜」右邊、4.將除法運算記於「｜」左邊、5.籌式符號「｜」的左右側皆為式或數，左側作為分母、右側作為分子，此分式形成一個數學物件，並可對其執行運算與操作。和算的分式表徵與符號的發展，主要從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至數學物件「分式」，即操作性的程序面向先於結構性的物件面向。特別地，分式表徵與符號的發展歷程並非線性，出現了多元的表徵方式，且和算家在分式表徵的使用上，也反應出數學概念具有「程序－物件」二元性並存的特色。而本文釐清了和算家在分式符號使用上的流變，對於判定文本作者、抄寫者或者成書時期，可以當成一項重要的依據。

關鍵詞：分式、和算、符號發展、數學史、點竄

通訊作者：黃俊瑋，e-mail：austin1119@gmail.com
收稿：2014 年 7 月 31 日；
接受刊登：2015 年 3 月 13 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Huang, J. W. (2015).
The Development, Transition and Conceptual Meanings of the Symbolic Representations about Fractions in the Seki School of Wasan.
Taiwan Journal of Mathematics Education, 2(1), 41-68.
doi: 10.6278/tjme.20150313.001

The Development, Transition and Conceptual Meanings of the Dymbolic Representations about Fractions in the Seki School of *Wasan*

Jyun-Wei Huang
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

In this paper, I investigate the contents of the important texts by authors in the Seki school in the Japan's Edo period and analyze the symbolic representations of fractions that *Wasan* mathematicians used in the process of the development and transition from *Bōshohō* (傍書法) to *tenzan* (點竄), and their related conceptual meanings. Through the analysis, I find that there are five different ways used to represent fractions in the process of the development of symbolic representations: 1.recording the division operation by words; 2.recording the divisor and the dividend separately; 3. recording the division operation on the right hand side of '|'; 4. recording the division operation on the left hand side of '|'; 5. the left hand side and right hand side of '|' being both numbers or rod expressions, where the left hand side indicates the denominator and the right the numerator. By this way, the fraction becomes a mathematical object which can be operated and manipulated. The symbolic representations of the fraction are developed and transited, from the rhetorical mathematical expressions and the kind of division with procedural and operational features, to the structural mathematical object "fraction", and thus the operational process precedes the structural object. In particular, the development of the symbols of the fraction is not linear, and multiple representations emerged during the process. The symbols of the fraction that *Wasan* mathematicians used reveal the duality of mathematical conceptions. Finally, the clarification of the development and the shift about the symbols of the fraction used by the *Wasan* mathematicians turns into an important evidence for modern scholars to determine the author, scriber and the date of a text.

Keywords: fraction, *Wasan*, development of symbols, history of mathematics, *tenzan*

Corresponding author：Jyun-Wei Huang，e-mail：austin1119@gmail.com
Received：31 July 2014;
Accepted：13 March 2015.

壹、前言

中國傳統天元術隨朱世傑《算學啟蒙》傳日後，[1]經江戶時期日本和算家的吸收與推廣，逐漸發展出新的符號系統。首先，關孝和（Seki Takakazu，?-1708）創立了傍書法，得以表示出多元高次多項式，除了突破中算天元術乃至四元術的限制，也使得十七世紀和算家得以解決各類涉及高次方程組的難題或代數式幾何問題。傍書法之符號系統可表示出兩式的和、差與積，但無法表示出兩式之商。

因此，到了十七世紀末期，日本數學家可以處理下列代數方程式，例如 Chikara（1999）所舉的例子：

$$a - bx + cx^2 - dx^3 = 0 \text{ 與 } 3y^3 + 5xy^2 - 8x^2y + 4x^3 = 0$$

分別可以表示成下列的型式：[2]

|	甲	|	甲再 三
ł	乙	|	甲巾 五
|	丙	ł	甲 八
ł	丁	|	四

後來，經十八世紀關流和算家的發展，松永良弼（Matsunaga Yoshisuke，?-1744）進一步發展出更具一般性、可表示出分式與分數的新符號系統－點竄。後來，經由有馬賴僮（Arima Yoriyuki，1714-1783）所編刊刻的《拾璣算法》一書，當時關流祕傳的「點竄」定則方公諸於世。

上述關孝和所發明傍書法、松永良弼推廣至點竄、有馬賴僮《拾璣算法》公佈點竄的歷程是過去數學史界的共識。再者，可以處理兩式或數之商，以及分式符號的發明，是點竄比諸傍書法最大的差異與突破。然而，就過去研究與相關論述來看，數學史家們偏重於傍書法與點竄這兩套符號的「成品」，對於十七世紀關孝和所發明的傍書法，如何演變進而發展出十八世紀和算家所使用的點竄符號系統，並無太多著墨。特別是和算家對於分式表徵和符號的發展、過渡與變革，以及當時數學家對於分式符號的使用情況，是本研究中深感興趣的問題：和算家如何表示兩式之商乃至形成分式的符號？相關表徵如何演化？再者，此發展與過渡的歷程中，他們所使用的符號系統呈現出什麼樣的特色？另一個有意思的問題是，和算的符號系統源於中算，

---

[1]《算學啟蒙》作者朱世傑，生卒年不可考，據現傳資料推知大約是 1279 年前後 30 年間，著有《算學啟蒙》（1299）與《四元玉鑑》。前書成書後於中國失傳，現存最早版本為 15 世紀李朝世宗時期的銅活字本。而《算學啟蒙》在江戶初期傳入日本後，對當時日本數學的發展影響深遠，基本上，和算家是透過《算學啟蒙》學習天元術。

[2]筆者將原籌式中的「甲再巾」改成「甲再」，一般而言，和算家會以「甲再」表示甲 3，以「甲巾」表示甲 2，但不會出現「甲再巾」的用法。例如直式的左式指的是下列方程式：「$甲 - 乙x + 丙x^2 - 丁x^3 = 0$」。而直式的右式指的是下列方程式：「$3甲^3 + 5甲^2x - 8甲x^2 + 4x^3 = 0$」，而原籌式中的「三、五、八、四」為係數，置於「|」的右側，而 x 是主變數，不在籌式中出現。

然而，為什麼中算家反而沒有發展出分式籌式符號？[3]又是什麼樣的需求或因素，促使和算家發展進而完備分式的籌式表示法？筆者期待透過文本的考察能回答這些問題。

另一方面，Sfard（1991）透過對數學概念發展過程的歷史分析與概念分析，提出數（如正整數、有理數、實數、複數）、對稱性或者函數等抽象數學概念，可藉由兩種方式理解與認知，包含結構性的靜態數學「物件」（object），或者操作性的動態數學「程序」（process）。而此「程序-物件」二元性正為數學概念的一體兩面。他也認為對數學概念的認知過程，一般是程序操作面向先於結構物件面向，吾人透過對低階數學物件或具體實物的操作過程，認知新的數學概念，例如對實物進行數數進而理解正整數的概念；又或者對自然數進行除法操作，而慢慢理解分數的概念。因此，分數的概念起先是一種實際的除法操作，接著慢慢將此操作過程「內化」成內心概念上的操作，最後，進入「物化」階段，此時，分數形成了一個結構性的靜態的數學物件，可對其進行操作與運算。因此，本研究中筆者亦進一步以此觀點切入，探討和算家的「分式」概念發展。

本研究中除了參考過去研究成果外，主要透過文本分析與歷史分析的方式，貼近一手和算文本，考察十七世紀末至十八世紀中葉《拾璣算法》刊刻期間，關流和算家著作中的代數符號系統以及兩式之商、分式相關的表徵，探討此時期關流分式符號表徵的過渡與發展，以及此符號系統的重要特色與限制。首先，將從關孝和的傍書法談起，接著從文本中歸納、整理出過渡時期所呈現出的分式相關表徵與符號，最後，綜合評述相關特色以及概念與認知上的意義。

貳、十八世紀中葉之前的重要關流和算家與著作

關孝和又稱關新助，是十七世紀日本江戶時期最重要的數學家，據《寬政重修諸家書》可知，關孝和出生於上野藤岡（今群馬縣藤岡市）的一個武士家庭。1676 年，關孝和世襲武士並仕於甲府藩德川綱重，德川綱重歿後，又仕於其子德川綱豐，擔任與會計有關的勘定吟味工作。1704 年，綱豐成為五代將軍德川綱吉的世子，遷居江戶城西丸，關孝和隨行，遂成為幕府直屬武士，擔任御納戶組頭，負責將軍家的金銀、服飾、調度的出納等工作。1706 年，辭職而後轉為小普請，負責管理工程和技工（徐澤林，2008），而上述相關工作皆與「算」有關。關孝和病歿於 1708 年，生前僅刊刻《發微算法》一書，該書與《三部抄》、[4]《七部書》展現了他在代數符號與方程理論上的創新發展。另外《括要算法》則包含了他在招差、垛積、諸約之法，以及角法、圓周率、球體積及弧長等幾何問題上的研究成果。除了數學上的成就之外，他所創立了關流，更是江戶時期最大也影響最深遠的和算流派。

[3]為求表達上的一致，本文以下以「分式」簡稱「分式（數）」。

[4]關孝和的《三部抄》成書於 1680 年代，由〈解見題之法〉、〈解隱題之法〉與〈解伏題之法〉三個部份組成，並且以抄本形式在門派內流傳。

關孝和創立關流之後，從他的《三部抄》、《括要算法》等著作，我們得以了解他所發明與使用的符號系統－傍書法。也因為當時和算知識仍屬於秘傳時期，這些重要著作主要僅在流派內流傳。師承關孝和的建部賢弘（Takebe Katahiro，1664-1739），曾與關孝和以及其兄建部賢明合著《大成算經》，此為關流初期最重要的集大成之作，後又著述《綴術算經》奉獻給當時的德川吉宗將軍，並深受吉宗將軍信任，得居高位，除了擔任幕府天文顧問外，亦於 1719 年受命測繪日本全國地圖（徐澤林，2008）。

除了前述兩本重要著作外，建部早年的數學學習生涯，共刊刻了三本書，其中，1685 年所著的《發微算法演段諺解》以及 1690 年所著的《算學啟蒙諺解大成》，分別為關孝和的《發微算法》以及朱世傑《算學啟蒙》作諺解，由此可知他熟悉中算天元術以及關孝和的傍書法。他在《發微算法演段諺解》詳細解說了關孝和的《發微算法》書中的術文來由，過程中大量使用關氏創造的符號系統列多元方程多項式與方程式，最終求得一元高次方程式，進而利用開方法求得數值解。不過，無論是關孝和或者建部賢弘的著作中，皆未出現表示分式的符號。一直得到十八世紀中葉，貴為久留米藩藩主的有馬賴徸，托名豐田文景刊刻《拾璣算法》一書，收集當時重要算題，並公開了關流祕傳的知識，當中包含關流重要的點竄符號系統與相關運算法則，此書裡，關孝和的傍書法已被推廣至可以表示分式的符號。

建部賢弘之後，松永良弼與久留島義太（Kurushima Yoshihiro，?-1757）是十八世紀前期關流最活躍的數學家，相較起關孝和與建部賢弘，他們本為浪人，社會地位較低，後皆因數學上的才華，加上磐城平藩的藩主內藤政樹本身愛好數學之故，松永與久留島受聘於該藩中教授算學，並且身份晉升成為武士。

徐澤林（2008）提到《山路君樹先生茶談》一書記載了許多久留島義太的趣事，包含和其他關流數學家之間的交遊情形、講課時總拿著酒、好酒丟官、又將自己的數學著作裁剪糊燈籠等事蹟，可看出久留島義太是個性散漫不拘的人。也因此，他的著作皆未出版，多以稿本形式流傳。松永良弼是關孝和的孫弟子，著作豐富並且系統地整理了關流傳書，是關流重要建設者，並繼承了建部賢弘在圓理上的研究成果，他著作的《立圓率》、《方圓算經》、《方圓雜算》等書，是圓理研究上的重要代表作。

他們兩個人的著作中，出現了多種表示分式的符號，而松永良弼晚期的著作與他的弟子山路主住（Yamaji Nushisumi，1704-1773）的著作，皆已經使用了成熟的分式符號。換言之，自關孝和發明傍書法至有馬賴徸刊刻《拾璣算法》之間，對分式符號發展有所貢獻的關流和算家主要為久留島義太與松永良弼，到了山路主住時期則已經發展完備。綜合上述，本文中將主要以關孝和、建部賢弘、松永良弼、久留島義太、有馬賴徸等和算家的著作為一手文本，考察他們所使用的數學符號，特別是分式表徵的部份。其中，所欲考察的文本包含關孝和的《發微算

法》、《三部抄》與《括要算法》、建部賢弘的《發微算法演段諺解》、井關知辰的《算法發揮》、久留島義太的《久氏弧背草》、松永良弼的《立圓率》、《方圓算經》、《方圓雜算》、山路主住的重要著作，以及有馬賴僮的《拾璣算法》等書。至於本研究所參考一手文本的版本，包含徐澤林《和算選粹》以及《和算選粹補編》所收錄的徐譯版，以及東北大學附屬圖書館電子資料庫收藏的版本。[5]以下，先從關孝和發明的傍書法談起，接著，考察關流分式符號發展並過渡至點竄符號的歷程，最後，提出進一步的討論與結論。

參、關孝和之傍書法

關孝和主要是透過中算書《算學啟蒙》習得天元術（馮立昇，2009），1674 年，他為解答《古今算法記》書中所遺留的 15 個問題，著作了生平唯一刊刻的《發微算法》，從該書術文內容可推知，關孝和已理解中算天元術，並結合其自創的符號系統「傍書法」來解答這 15 個問題。其中的傍書法，使用了漢字及其偏旁部首或日文假名作為簡字代數符號，藉以表示代數方程或代數式，是一種具東方特色的符號代數（徐澤林，2008）。

關孝和所使用的符號主要為「文字式」的符號，其中，他使用「十天干」、「十二地支」與「二十八星宿」等文字作為代數符號。[6]從該書內容來看，第 13 個問題用到的代數符號多達 20 個。而關氏也能熟練地執行變數代換、符號操作以及消元等代數運算，最終由問題條件與圖形相關性質，可推導出一元高次方程式，進而以開方法求得方程式的數值解。例如，第 13 個問題的術文，最終可導出 72 次多項方程式，而第 14 個問題最終所得的方程式更高達 1458 次，代數運算之複雜可見一斑。也由於推導過程繁瑣，關孝和在書中僅以文字略述之。儘管該書實際上並未出現「傍書」符號，但無論傳統中算天元術或者四元術，皆無法表示具這麼多未知數的方程式，因此可斷定，關孝和早在 1674 年之前，已經創立並能熟練地使用「傍書法」以及相關代數符號系統，才得以解前人之難題並完成此書。

不過，關孝和並未在該書中詳細記錄代數操作的過程，僅在各問題的「術曰」裡，留下可求得該問題答案的術文－程序性的演算法，並未寫下推導出這些結果的過程與來由，使得一般讀者難以理解，也因此關氏受到當時其他數學家的批評。後來，關孝和的弟子建部賢弘於 1685 年刊刻《發微算法演段諺解》，目的為了解說《發微算法》書中各術文的來由，這也使得關流所用符號與解方程的方法公諸於世。而建部賢弘（1685）也以「**此演段，和漢算者所未發明也，誠可謂師之新意妙旨，冠絕古今也。**」稱讚、歸功於其師關孝和。此書共分成元、亨、利、貞

[5]東北大學附屬圖書館電子資料庫網址如下：
http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G9200001CROSS

[6]包含甲、乙、丙、丁、…、癸等十天干。子、丑、寅、卯、…、亥等十二地支。角、亢、心、房、…、軫等二十八星宿。

四卷，其中的〈元卷〉羅列《發微算法》當中的 15 個問題與「術文」，其它三卷則是求解這 15 個問題的代數運算過程。值得一提的是，第 12 問與第 13 問的代數運算過程，分別占了 34 頁與 43 頁的篇幅，其中，解第 12 個問題所出現，最龐雜的單一代數式，竟橫跨了 6 頁的篇幅才得以表示。[7]

除了《發微算法演段諺解》公佈了關流早期所用的符號外，事實上，關孝和於 1683 年所著作的〈解見題之法〉，應屬最早出現「傍書法」籌式的和算文本。〈解見題之法〉書中提到：「**合者，依術意，圖正負與段數，而傍書加、減相乘者名，宜分之合之。**」這裡指的便是利用「籌式」來表示代數式的「正負與係數」，並在籌式的右邊置上相對應的代數式。包含「籌式」與「代數符號」即成為一組「傍書式」。[8]同一組「傍書式」之中，相鄰的兩個符號代表相乘關係，放在左右的多組「傍書式」之間則為加減關係，至於是加或減則依其籌式之正負來決定。

若以關孝和在書中所給的例子「**分術。置甲，以乙相乘，得二段右積　|甲乙**」來看，當中的「**|甲乙**」指的便是 1 倍的甲乘乙。另外，「**合術。置乙，加入丙，共得數以甲相乘　|甲丙 |甲乙，折半之，得積。**」當中出現的籌式「**|甲丙 |甲乙**」，指的便是 1 甲・丙＋1 甲・乙。依據這些規則，單一傍書式可表示出未知數之正整數冪次（即單項式）以及若干個單項式之積。多個傍書式左右或上下擺放則可表示出它們之和、差與線性組合。又例如下述式子：「**假如 |斜巾 |方巾，添之|||方巾**」所指的是正方形的對角線長度的平方加上邊長長度的平方等於邊長長度平方的三倍。其中，關孝和除了以簡字「巾」表示某式（數）的平方之外，[9]他也利用「再」表示某式（數）的「三次方」、以「三」表示某式（數）的「四次方」等等。於是，關孝和所創的「傍書法」符號，可表示出係數帶有文字項的多項式，例如，可將「甲+乙子+丙子^2+丁子^3」表示成：

|甲 |乙子 |丙子巾 |丁子再

關孝和的代數符號並不局限於「傍書法」，在列方程式的過程中更融合了中算「天元術」的傳統與特色，以上下位置代表「所求未知數」的不同冪次項，將多項式或方程式的各項，由上往下作升冪的排列，同一列裡的傍書式則為該項的係數。例如，若以子為主變數，那麼「|甲 |乙子 |丙子巾 |丁子再」可進一步表示成：

|甲
|乙
|丙
|丁

---

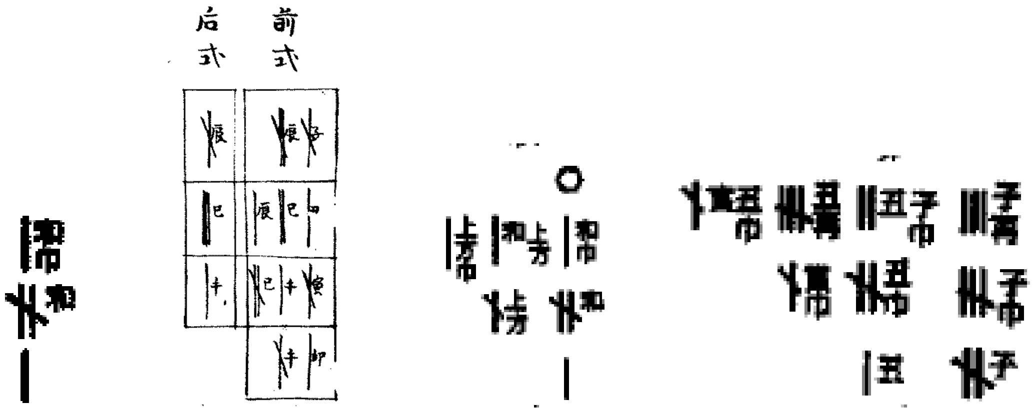
[7]解這 15 個問題的演段過程中，所出現的複雜代數式，往往需要 5~6 頁的篇幅才得以表示。

[8]一般和算書中，史家們將關孝和的代數系統稱為「傍書法」，即是依此而得名。在此，筆者進一步將關孝和的符號代數式稱為「傍書式」。

[9]「巾」即冪的簡寫。

又例如圖 1 中，關孝和《解伏題之法》出現的天元傍書式，其中，圖 1（a）所列的式子指的便是「 $\text{和}^2-2\text{和}x+x^2$ 」。以下，筆者將此融合天元術與傍書法的代數式稱為「天元傍書式」。

再以圖 1（b）看來，此式同樣為《解伏題之法》之中所出現的天元傍書式，以圖中的後式為例，該式代表的是方程式「$-\text{辰}+2\,\text{巳}x+\text{午}x^2=0$」。又如圖 1（c）的代數式即為多項式「$1x^3+\left(-1\,\text{上方}-2\,\text{和}\right)x^2+\left(1\text{上方}^2+1\,\text{和}\cdot\text{上方}+\text{和}^2\right)x$」。圖 1（d）所表示的多項式則是「$\left(1\,\text{丑}-2\,\text{子}\right)x^2+\left(-1\text{寅}^2-2\text{丑}^2-3\text{子}^2\right)x+\left(-1\text{寅丑}^2-3\text{丑}^3+2\text{丑子}^2+3\text{子}^3\right)$」。一般而言，和算家若無特別指明，該籌式為多項或方程式，需由前後文脈絡才能判斷。



（a）　（b）　（c）　（d）

圖 1　關孝和《解伏題之法》中的天元傍書式。引自「**和算選粹**（頁 120）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

綜合上述例子，關孝和在《解見題之法》與《解伏題之法》之中所使用的天元傍書式，是以其獨創的傍書法，融合了傳統天元術的特色，一方面以「縱向位置」表示主要未知數的冪次，並透過「文字符號」的引入，解放了原本四元術利用上下左右等不同「方位」表示不同未知數的方式。如此，和算家可以在沒有「加減符號」的情況下，表示出含文字符號的一般多項式與多項方程式，亦可推廣至表達多元高次多項式或方程式的情況。此外，關孝和利用巾、再、三、四等文字來表示數與式的冪次，這種表示法相當於以「甲巾」記錄「甲的平方」；以「甲再」記錄「甲的三次方」；以「甲三」記錄「甲的四次方」等；[10]因此，廣義來看，巾、再、三、四等文字可看成代表指數的符號。關孝和並利用上下位置來表示多項式或方程式的不同冪次項，但他並未發展出可以表示「分式」與「負冪次」的符號。

[10]「甲三」即甲再乘上三個甲，亦即甲的四次方。

肆、分式符號的過渡

十七世紀末期，和算家所用的傍書法，僅利用籌式符號「｜」的右側位置，記錄相關的代數符號，其中包含單項式或單項式之乘積作為一個「傍書式」，並可表示出傍書式的和、差與積或係數乘積：

以　|甲 |乙　　表示甲＋乙
以　|甲⺅乙　　表示甲－乙
以　|甲乙　　表示甲・乙
以　-‖甲或 |$\overset{十}{二}$甲　　表示 12 甲

但並未出現分式的表示法。一直到《拾璣算法》書中的「點竄」定則，才明白地指出如何表示分式以及相關運算法則。換言之，關孝和所發明的傍書法與十八世紀中葉關流和算家所用「點竄」，之間最大的差別在於「分式符號的使用」。另一方面，李冶（1192-1279）於《益古演段》或《測圓海鏡》所列的天元式裡，[11]常數項的下一位為x^{-1}項，而再下一位為x^{-2}等依此類推，如此得以表示出未知數的負冪次，意即可以表示出形如$ax^3+bx^2+cx+d+ex^{-1}+fx^{-2}$的式子（郭書春、李兆華，2010）。但傳入日本的天元術則否，關孝和的天元術是習自朱世傑的《算學啟蒙》，常數項的下一位為「商」，即$\sqrt{x}$項，如圖 2 所示為江戶時期算家所用的算盤圖，作為江戶時期數學家從事數學知識活動時，用以計算的表面。當時數學家便是在畫有此格子狀的算盤上擺弄算籌，進行開方解方程式。[12]由上往下依序為商、實（常數項）、方（一次項）、廉（二次項）等，當中並不包含負冪次項。因此，早期和算家列方程式的過程中，並不表示出負冪次項，也未發展出負冪次項的列式法。然而，基於和算家求解問題與列式過程等種種需求，和算家們勢必得發展出能表示分式的方法。

---

[11]李冶為金元數學家，其於 1248 年著《測圓海鏡》，1259 年著《益古演段》，目前《測圓海鏡》是有關天元術最早的也是最重要的第一手資料（郭書春、李兆華，2010）。

[12]《算法新書》作為幕末重要和算教科書，因此收錄此圖作為教學演示用。作者千葉胤秀在 19 世紀初期在一關藩一帶開設算學道場，門徒號稱三千。其死後，他的子孫繼續在一關教授算學，承繼算學道場，使得算學成為千葉一家之家學，數代相傳，。也由於千葉一家的耕耘與貢獻，使得一關一帶成為和算最隆盛的地區之一。而圖二所指的算盤，不一定是製成木板的形式，當時的數學家會將此算盤與方格畫在紙上，方便數學家隨身攜帶，以利進行解方程式與計算所需。

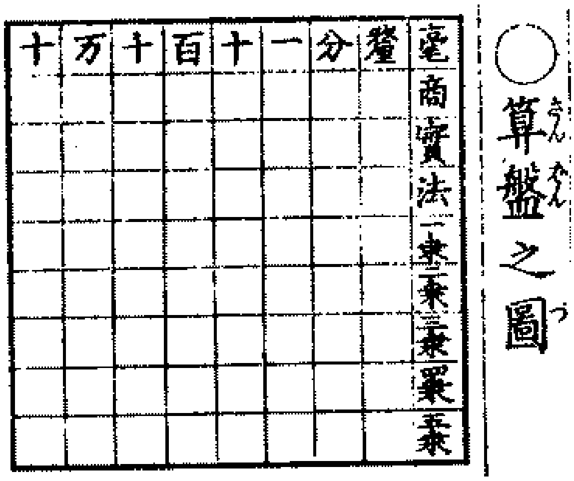


圖 2　江戶時期用以計算的表面－算盤之圖。引自「**算法新書**〈卷三〉天元術」，千葉胤秀，1830。

關孝和的傍書法主要利用了「｜」的右側空間記錄未知數或相關變數，因此空下了左側的空間，部份和算家（例如井關知辰與久留島義太）都曾利用左側空間記錄新變數名稱，經輾轉演變後始利用左側空間記錄「除法」操作。

首先，非關流數學家井關知辰於 1690 年所著作的《算法發揮》，開始利用「|」的左邊空間，然而，他所用的符號並無表示分式的意義。圖 3 為《算法發揮》中所用的符號，他將「| 何巾一正」、「|一算負」等項，[13]分別重新令作新變數「㋑、㋩、㋥、㋭」等，並置於「|」左側，亦即籌「|」左側的「㋑」便是用來代表「何巾一正」的新變數。換句話說，「|」的左側空間，井關知辰僅是用來記錄新的「變數符號」。

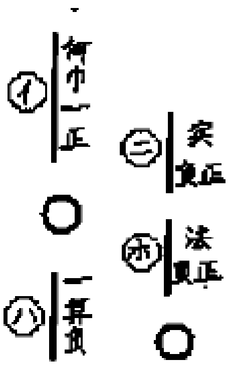


圖 3　井關知辰《算法發揮》所使用的符號。引自「**和算選粹**（頁 317）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

---

[13]「| 何巾一正」的意思為「+ 1．何 ^{2}」、而「|一算負」的意思即為「-1」，它表示負項的方式較特別，是在該式「|」的右側加上「負」，而非在符號「|」上畫一斜線，形成「ł」的方式。而井關知辰在文本中，為了方便說明以及簡單的目的，他利用符號「㋑」來代表、指稱式子中所出現的「| 何巾一正」一項，這相當於令了新變數，作了變數代換的動作，以簡單的新變數來指稱原本較複雜的項。文本中，他處理其它複雜文字項時亦同。

到了十八世紀，關流和算家松永良弼與久留島義太等人，則進一步利用「|」左側空間，將前述傍書符號推廣，逐漸發展出可以用來表示分式的符號。從相關文本的考察，我們歸納整理了十八世紀和算家們用以表示兩式（數）之商與分式的表徵與符號，從中可發現相關表徵非常多元，主要包含五種方式，以下各作說明與討論。

一、以文字記錄乘除

和算數學著作，主要承襲中算的傳統，主要包含題、答、術，其中題為問題；答為問題的答案，早期問題多是求數值解；術則是公式或演算法。一般而言，將問題中的已知數或量，代入術文中的演算法，經程序性、機械性的代數操作或數值運算後，可求得問題的答案。在此傳統背景之下，早期和算家尚未發展出「分式」符號時，文本中處理分式的方式，主要是透過文字描述的方式來說明或記錄「乘除的動作」。

例如當他們在表示$\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{甲}{2}$的概念時，是透過「以二約之」、「折半之」、「法二」、「二除」、「二而一」等方式記錄將某式（數）除以二的除法運算，取代分數「二分之一」或者分式「二分之甲」等概念。又或者以「a乘b除」的程序性操作，來表示分數$\dfrac{a}{b}$或表示某數乘上$\dfrac{a}{b}$。這種分式（數）表徵，往往依附在程序性的術文中，以文字方式呈現，而非獨立的數學物件。

以關孝和（1683）的《三部抄》當中的〈解見題之法〉為例，「分術」的術文中出現「**二積相并，折半之**」；而求「方錐」體積的術文出現「**得數，以三約之**」。又或者建部賢弘（1722）的《綴術算經》第四個問題的術文，出現了「**底面乘之，六而一，得積也**」。都是以文字呈現或記錄除的動作，取代分數或分式。

二、另記被除式與除式

許多場合裡，和算家也沿用中算家的習慣用法，利用「實」與「法」分別記錄被除式（數）與除式（數）或者分式的分子與分母，並以之表示將實之式（數）除以法之式（數）後，得所求分式。例如，松永良弼早期的著作《立圓率》一書，便是以實與法來表示分式的分子與分母（如圖 4 所示），其中的實相當於球體積公式的分子項，而法則為球體積公式的分母項。又如關孝和《括要算法》當中的問題：「**今有原一十個，逐增六分，問極數幾何？**」此問題的意思是有一個首項$a=10$、公比為 0.6 的無窮等比級數，求此無窮等比級數之和。《括要算法》書中所給術文為：「**置一內減六分，餘四個為法，以原一十個為實，實如法而一，得極數，合問。**」若以現代的符號來表示，此公式即$S=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{10}{1-0.6}=25$，然而，當時的和算家並無法表示出分數，故他先計算出分母$1-r=1-0.6=0.4$，將此值記為法，再以首項 10 為實，實除以法的結果可得

25，即為此無窮等比級數之和。

除了以實法分別記錄分子與分母外，和算家也會利用「周三徑一」或「周率三五五、徑率一一三」的方式來記錄圓周率＝$\dfrac{圓周}{直徑} \approx \dfrac{355}{113}$這個近似比值的分子與分母。

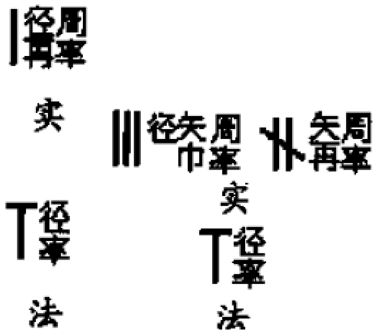


圖 4　松永良弼《立圓率》以實與法來表示分式的分子與分母。引自「**和算選粹**（頁 401）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

又如關孝和《括要算法》「衰垜原數圖」的分式表示法，他利用在該行最下面的空間，另外記錄「原數法二」與「原數法三」，分別表示該式的分母為 2 與 3 等（如圖 5 所示）。同一著作中的「衰垜級數圖」裡，則是在該行的最下面另記「約法二」與「約法六」等，同樣分別表示該式分母為 2 與 6 等。因此，在無法表示分式籌式的情況下，關孝和列出各分式之後，另行記錄「法」或「約法」，來表示需將該分式除以「法」或「約法」方能得所求式。而此方法類似於前述分記「實」與「法」的表示法。

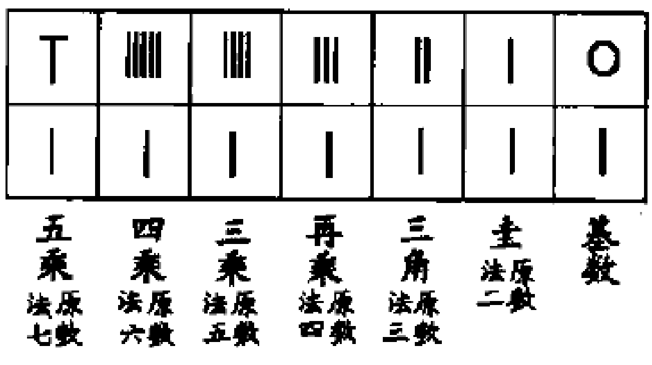


圖 5　關孝和《括要算法》衰垜原數圖。引自「**和算選粹**（頁 179）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

另一方面，從關孝和《括要算法》的方垛式圖來看（如圖 6 所示），由於當時並無表示分數或分式的符號，因此，他在表格中以籌式記錄各式的分子，並將各列籌式的「公分母」或共同的「除數」提出，記於該列的最左側。例如圖中左側的「取二分之一為加」、「取三十分之一為減」分別代表該列各項需同乘 $\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{1}{30}$。又如他在各行最下面記錄的「原法二」、「原法三」等，表示該行的分母同為 2 與 3。而這種在最左側記錄該列「公分母」或共同「除數」的習慣，也一直延續到十八世紀末（例如安島直圓的著作）。

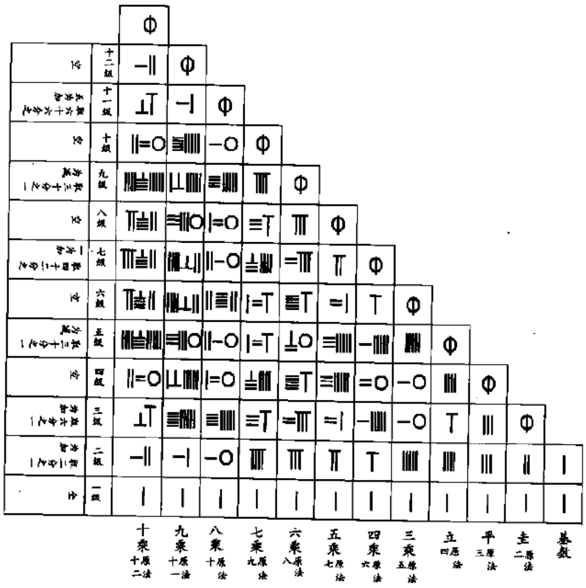


圖 6　關孝和《括要算法》的方垛式圖。引自「**和算選粹**（頁 175）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

另外，松永良弼於 1739 年著作的《方圓算經》一書，則是在籌式左側以「除法」一欄來記錄該分式之分母。例如圖 7 中「除法」一行的功能，即為記錄除式或記錄分式之分母。雖然此一表示法屬於另記除式的方式，不過這種將除式並排於被除式左邊空間的表徵，可能是促使他發展出「乙除｜甲」或「乙｜甲」等表徵的重要過渡方式。

此時期，和算家的分式表徵仍非一個數學物件，可視為兩個數學式經除法操作所得的結果。

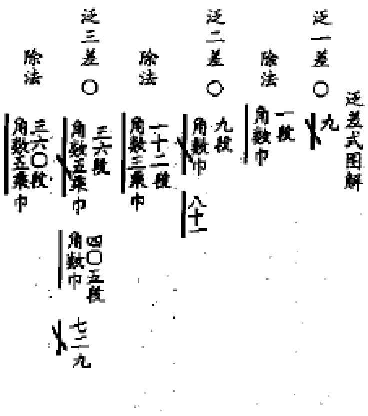


圖 7　松永良弼《方圓算經》中出現的分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 427）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

三、將除法操作記於「|」右側

和算家久留島義太的著作《久氏弧背草》書中，將除法操作（分式的分母）記於籌式「|」的右側，他利用「| 四除」、「| 四除之」、「| 徑二除」等方式記錄除法操作或作為分式的表示法，分別代表了$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{徑^3}$。

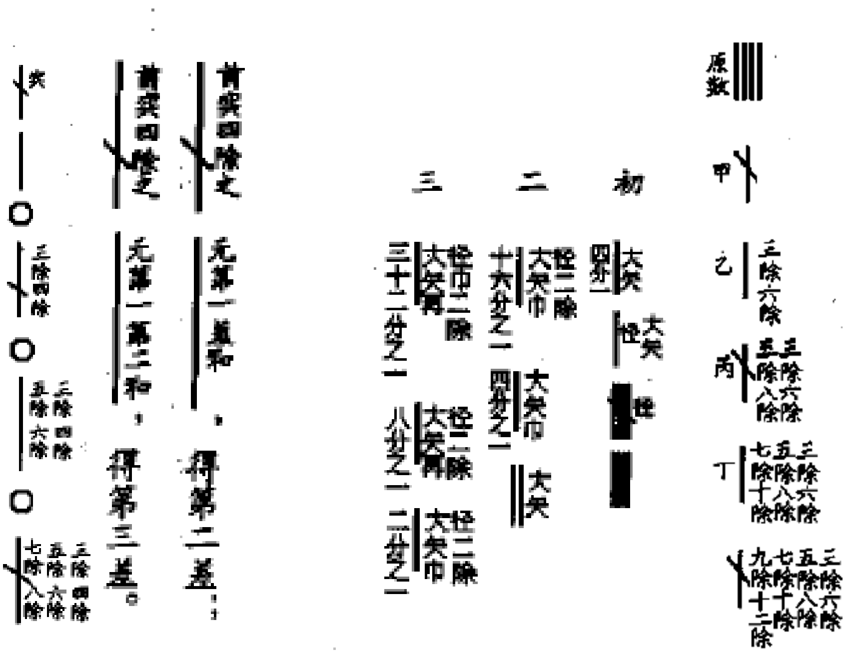
以圖 8（a）為例，此為久留島義太的著作《久氏弧背草》所出現的分式籌式，他在畫式「|」的右邊記錄「三除四除」等除法動作。因此，若以現代符號表示，該式相當於$-1+x-\frac{1}{3\cdot 4}x^3-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^5-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^7$。又如圖 8（b）所示，他同樣在「|」的右邊記

錄

了「**前實四除之**」的除法操作。至於圖 8（c）當中，久留島義太則是在「|」的右側以「**徑二除**」、「**徑巾二除**」的方式記錄「除以 2」的操作。

值得注意的是，同一本著作中，久留島義太也開始利用「|」的左邊空間（如圖 8（c）與（d）所示）。其中，圖 8（d）之中「|」左邊的甲、乙、丙、丁並非表示該分式的分母，而是以甲、乙、丙與丁等新變數表示圖中甲、乙、丙、丁右側之「項」。意義同於前述非關流和算家井關知辰的用

法。此圖中的甲代表了「-1」，乙代表的則是「$\frac{1}{3\cdot 6}$」。由此可看出，久留島義太在分式符號使用上相當混亂且隨性，即便同一部作中的表徵亦不統一。例如圖 8（c）中的式子，除了在「|」右側記錄「徑二除」之外，同時也在「|」的左側記錄了「四分一」與「四分之一」等。



（a）　　（b）　　（c）　　（d）

圖 8　久留島義太著作《久氏弧背草》中出的四個分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 352-367）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

四、記於 | 之左邊

除了前述三類表示法之外，久留島義太與松永良弼的著作中，也開始利用籌式符號「｜」的左側來記錄除的操作。如圖 8（c），久留島義太利用、「四分一| 大矢」、「四分之一| 大矢巾」等方式，表示出該分式的分母為 4，並分別表示了 $\frac{大矢}{4}$ 與 $\frac{大矢^2}{4}$。亦即他除了利用了「|」的右側描述除法運算外，也開始利用「|」左側的空間來表徵「分母為 4」以及乘上「四分之一」等運算。又如圖 9 松永良弼《方圓算經》中所出現的分式符號，他透過在「|」的左側記錄「十二除」、「三十除」等方式來表示該分式的分母包含 12 以及 30 等因數。然而，就這類表示法來看，將「十二除」、「三十除」等置於「|」左側主要作為紀錄程序性運算的功能，並非數或式等「數學物件」。另一方面，將「四分之一」置於「|」左側也非一般分式符號之分母作為除數或除式的意義，亦無法將整個籌式視為「|」左右兩數或兩式之比值。

總之，諸如「四除|甲、四分一|甲」等，將「除」的操作記錄在「|」左邊的方式，雖已類似於較完整的分式表示法「四|甲」，然仍舊帶有「除」、「分」等程序操作的意義。因此，這些表示法之下的分式，尚不能視為一個獨立而完整的數學物件。因此，到了 1739 年松永良弼著《方圓算經》之時，尚未發展出完備的分式符號。至於第五種方式則是「點竄」所用的分式符號，以下繼續討論。

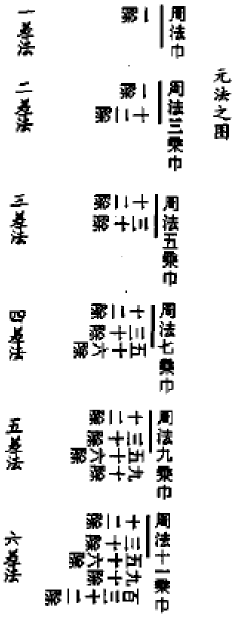


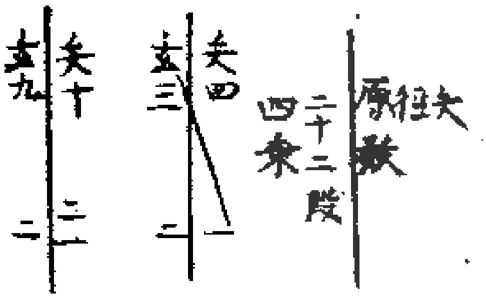
圖 9　松永良弼《方圓算經》中出現的分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 448）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

伍、完整的分式符號

一、1750 年松永良弼晚年所用的符號

第肆節當中所述的四類分式表徵，皆非完整的分式概念。就和算文本的考察來看，一直到 1739 年松永良弼《方圓算經》所用籌式符號「|」的左側，主要仍作為「以文字記錄除法運算」的功能，而非作為數學物件功能的「數」或「式」。得等到松永良弼（年代不詳）《方圓雜算》一書，始出現較為完備而類似於現代分式的符號。原書為漢文，成書年代不詳但據其使用的符號以及所得圓周近似值來看，應為松永晚年作品（林建宏，2013）。例如，他以「四|乙」或「徑｜弦」分別表示「$\frac{乙}{4}$」以及「$\frac{弦}{徑}$」。這也意味著他將「數或式」等數學物件，置於籌式符號「|」的左側，用以表示該分式的分母。《方圓雜算》一書，便是以「二｜弦」來表示「$\frac{弦}{2}$」，又松永良弼也將「$\frac{弦}{一}$」、「$\frac{弦}{二}$」」、「$\frac{弦}{四}$」置於「｜」的左側，分別表示該分式的分母為「弦 ^{1}」、「弦 ^{3}」、「弦 ^{5}」等。圖 10 為出現在《方圓雜算》一書中的分式，其中，松永良弼以圖 10（a）的左式來表示「$\frac{21\cdot矢^{11}}{2\cdot弦^{10}}$」，而圖 10（a）的右式則代表「$-\frac{1\cdot矢^{5}}{2\cdot弦^{4}}$」。

雖然松永良弼《方圓雜算》一書中出現了成熟的分式符號，但同一本書裡，卻也混雜地出現了包含程序操作的分式表徵。例如圖 10（b）的籌式，該式「|」的左側包含了「四乘」與「二十二段」，其中的「四乘」表示執行乘法運算，而「二十二段」則有「二十二倍」之意，意即此式左側所置並非單純的數字，而是包含了「乘」法運算的程序與言辭，因此，整個分式並非一個數或式，顯示出較不成熟的分式特色。



（a）　　　　　（b）

圖 10　松永良弼《方圓雜算》一書中出現的籌式。引自「**方圓雜算**」**，**松永良弼，年代不詳。

不過，總體而言，松永良弼晚年的《方圓雜算》以及其弟子山路主住的著作中，都已經使用了具現代意義的分式符號，例如，圖 11 裡的籌式出現在山路主住的《算法弧背詳解》裡，可明顯看出該分式的符號「|」左側位置所放皆為數字與式，而不像圖 10（b）當中所放的「四除」，而「四除」代表的是和算家以文字來描述程序性操作，它本身並非一個數字。

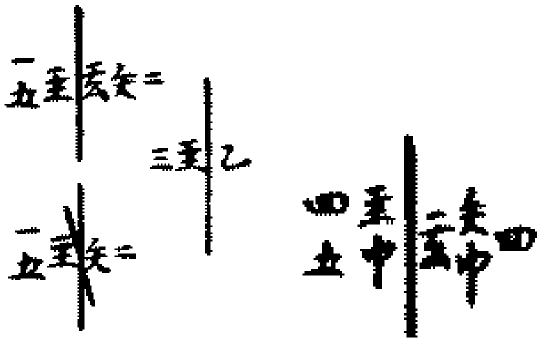


圖 11　山路主住《算法弧背詳解》一書中出現的籌式。引自「**算法弧背詳解**」**，**山路主住，年代不詳。

再者，筆者利用東北大學附屬圖書館電子資料庫搜尋的結果，書名與「點竄」有關，且署名松永良弼編，山路主住校的和算文本，包含了《絳老余算単伏点竄》、《一百好絳老余算点竄》、《絳老余算点竄》、《鉤股弦再乗和点竄》等書，經考察前三本書中皆使用了成熟的分式符號，然第四本書則未見分式符號。

至此，關流和算家所用符號已能表示出分母為「單項式」類型的代數式。[14]若將此符號對比於現代數學以「－」這個符號的上下，分別表示分式的分子與分母，可發現的數式符號「$\dfrac{b}{a}$」相當於和算家所用的「$a|b$」。其中，和算家沿用了中國傳統直式書寫的形式，並將「代數式」與係數置於「|」的左右。不過，依此表示法，分母並無法表示複雜的分式，例如當分母為二個以上數或式相加時，必需進一步「括之」，作變數變換，引入新代數符號，方能表示出較分母較複雜的分式。[15]

二、《拾璣算法》書中的點竄定則

分式符號在松永良弼晚年與山路主住時期已發展成熟，有馬賴徸在吸收了山路主住的傳書之後，於 1767 年所著的《拾璣算法》〈點竄〉定則裡，完整地公開了關流祕傳的籌式使用法則，此時關流和算家對於「分數」與「分式」的表示已臻於完備。他也在該書的〈點竄〉裡，提出關流所用的符號法則。

首先「**以所命一筭傍書者，固虛數也**」，意即在算籌符號「|」的右側傍書相關未知式。例如以「$|a$」表示「$1\cdot a$」。[16]接著提出加減的符號法則「**加減者隨意施於上下級或同級**」，即將加式與減式置於被加式與被減式的左右或上下，例如$a+b$可表示成「$|a|b$」或「$\begin{array}{l}|a\\ |b\end{array}$」，$a-b$可表示成「$|a\nmid b$」或「$\begin{array}{l}|\,a\\ \nmid b\end{array}$」接著，他提出乘法的符號法則「**因者，用右傍書**」，例如，若將「$|a$」乘上b時，則可將b置於籌式符號「|」的右側，表示成「$|ab$」。另一方面，「**除者，用左傍書，一件則直用除數，若二件以上者，括之用號**」，即若將「$|a$」除以b時，則可將b置於籌式符號「|」的左側，表示成「$b|a$」。但分母包含兩單項式之和時，必需特別處理，否則當分母為「$|b|c$」時，若將此式置於$|a$的左側會形成「$|b|c|a$」，此式容易產生混淆，無法判別真正的分母。因此，若欲以「$|a$」除以「$|b|c$」時，需先令一個新變數$x=b+c$，再將x置於籌式的左側表示成「$x|a$」。依上述法則，和算家可以表示出一般的「分式」，若分母為單項式時，直接置於「|」符號的左側即可；若分母為多項式時，則先「括之」作變數代換，再將新變數置於「|」符號的左側。

除了「分式」的表示法之法，《拾璣算法》書中也提出「分數」的表示法，例如書中提到「**又有分母子數者，假如五分之三者**」可將此分數表示成「五｜三」。又「**二十五個八分之三者**」可

[14]這裡的單項式為多元單項式，其為常數係數與若干未知數之乘冪與積。
[15]請參考「二、《拾璣算法》書中的點竄定則」裡的說明
[16]這裡我們利用英文字母 a、b、c 等代替原書中的勾、股、弦等中文。

表示成「｜二十五八｜三」，[17]此式相當於 $1 \cdot 25 + \frac{3}{8}$，亦相當於現代數學符號中的 $25\frac{3}{8}$。如此，從《拾璣算法》〈點竄〉定則，我們可以發現關流和算家所用分式與分數記號已成熟。最後，筆者整理了《拾璣算法》〈點竄〉定則中，與四則運算相關的符號表示法（參見表 1）。

表 1

《拾璣算法》〈點竄〉定則整理

文字描述	點竄標記法		現代符號標記法
列 a 加入 b	$\vert a$ $\vert b$	$\vert a \vert b$	$a+b$
以 a 減 b 列 b 以減 a	$\vert a$ $\nmid b$	$\vert a \nmid b$	$a-b$
列 a 乘 b	$\vert ab$		$a \cdot b$
a 除以 b	$b \vert a$		$\frac{a}{b}$
列 a，b、c 和除之	括之：$\vert b \vert c = x \ \ \rightarrow x \vert a$		$\frac{a}{b+c}$

最後簡單整理「點竄」符號系統所具有的特色：

1. 關孝和發明的傍書法符號系統能表示出「單一傍書式」－即多元單項式（$a(x_1)^{n_1}(x_2)^{n_2}\cdots(x_k)^{n_k}$）－以及單一傍書式的和、差、與積，然無法表示出其商（即分式），而松永良弼晚年的點竄法則，已推廣至可以表示分式的情況。

2.對於單一傍書式而言，「|」符號的左右邊皆為「數學物件」即「數」與「式」，而不再是「記錄」程序性除法運算的「數學程序」，亦即從帶有「除」字的「四除 ｜ 甲」，[18]演變成具現代分數意義的「四 ｜ 甲」。

3.籌式「|」符號的右側等價於分式的分子，「|」的左側等價於分式的分母。此可類比於現代符號「－」的上下位置。

4.一般而言，以籌式符號「|」（表正項）或「$\nmid$」（表負項）分隔分式的分子與分母，然有些場合，也會出現「|||」、「||」等具有數字意義的籌式代替符號「|」。

5.和算的符號系統並無加、減等運算符號，他們以左右並列或上下排列的方式來表示不同

[17]請讀者注意，這裡的「**二十五個八分之三者**」指的並非 25 倍的$\frac{3}{8}$，其中的 25 個指的是整數部份為 25，再加上分數部份的$\frac{3}{8}$。

[18]若以現代符號表示，此式即$\frac{\text{甲}}{\text{除以 }4}$，此示的分數記錄了將甲「除以四」的運算乘序，而不是指「$\frac{\text{甲}}{4}$」這個數。

傍書式的和，依據各傍書式之籌式符號決定該項之正負。

6.此系統裡所用的指數符號為文辭式的，以符號「巾」表示與記錄二次方、以「再或二」表示與記錄三次方、以「三」表示或記錄四次方、以「四」表示或記錄五次方等，並可依此類推。

7.由於並無括號符號，因此，若分式之分母較為複雜或包含多項之和時，必需先「括之」令其為一新變數，再將新變數置於「|」符號的左側，作為分式之分母。

8.多項式的表示法沿用中算天元術的傳統，為直式書寫形式，與現代的橫式不同。並且由上至下的位置依序升冪代表主變數的不同冪次項。儘管，點竄定則裡使用「｜」分隔分式的分子與分母，但關流數學家所用的「｜」，意義上不全然同於現代符號裡的分式橫槓「－」，有時尚具有「數字」的意義（例如：「|||甲」即「|三甲」亦為「3 甲」或者以 $b \| a$ 表示 $\frac{2a}{b}$ 等）。對比於此，非關流數學家井關知辰著作中所用的「|」，主要作為「符號」之用，而非籌式數字。

陸、綜合討論與符號再論

十七世紀末，出現於關孝和《三部抄》的傍書法，突破了中算天元術與四元術的限制，可用以表示出包含更多變數的籌式，有助於和算家列出更多元且複雜的方程式，利於求解更複雜數學問題。此外，當時關流和算家所用的代數符號主要包含三類，一是帶有實值意義的「積」、「徑」、「弦」、「和」、「又云」等符號，這些符號分別用來指稱題目給定的「某區域面積」、「某圓之直徑」、「勾股形的斜邊（弦長）」、「某些幾何量之總和」以及題目條件所提及「又云某幾何量若干」之數，因此具有言辭式的特色。再者，他們也利用「責」、「玄」、「圣」等較為簡化的「簡字」符號，來表示原本的面「積」、「弦」長、直「徑」長等幾何量。除了上述帶有意義的符號之外，和算書中也大量利用了天干「甲、乙、丙、…、癸」與地支「子、丑、寅、…、亥」或者平假名「イ、ホ、ニ、ハ」等沒有實值意義的字，作為抽象的代數符號。[19]

如此，有了傍書法加上符號，當時和算家可表示出複雜的「多元多項式」，但也由於缺少了代表加、減運算與「次方」等符號，故他們令變數符號左右擺放為乘（例如 |||甲乙 ＝3 甲‧乙），傍書式左右或上下擺放為和（例如 |||甲 ||乙 ＝3 甲 ＋2 乙），不過，此符號系統並無法表示除與分式。繼關孝和之後，從十八世紀的和算家久留島義太與松永良弼的著述可發現，傍書法慢慢被推廣，並衍生出可以表示分式的方法，整個符號演化與變革的過程中，也出現了多樣性的表

[19]十九世紀末德國史家 Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann（1811-1881） 曾經提出一個『三階段說』，亦即：文辭代數（rhetoric algebra）、簡字代數（syncopated algebra）與符號代數 （symbolic algebra），並以此來刻畫西方代數學（含阿拉伯數學）的發展風貌。此階段說並無法適用於中算與和算脈絡中所使用的符號。以和算為例，此三者同時並存。

徵。

早期他們在表示 $\frac{1}{2}$ 甲的概念時，必需透過「以二約之、折半之、法二、二除」等方式，透過文字來記錄對某個數學物件（數或式）執行「除以二」的除法運算。又或者利用「以 a 乘 b 除」來表示某式（數）的 $\frac{a}{b}$ 倍。許多場合裡，和算家也沿用中算的用法，利用「實」與「法」來記錄被除式（數）與除式（數）或者分式的分子與分母，蘊涵將實之式（數）除以法之式（數）後，可得所求分式。他們也利用「周率 355」與「徑率 113」來記錄 $\frac{\text{圓周}}{\text{直徑}}=\frac{355}{113}$ 此一圓周率近似值的分子與分母。

後來，他們也漸發展出新的表徵方式，包含利用籌式符號「｜」的右側記錄除的操作，例如：「｜四除」、「｜四除之」與「｜甲四除」分別指的是 $\frac{1}{4}$ 、$\frac{1}{4}$ 與 $\frac{\text{甲}}{4}$ 。更普遍的表徵則是利用籌式符號「｜」的左側記錄除的操作，例如「四除｜」與「四分一｜甲」分別指的是 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{\text{甲}}{4}$ 。儘管將「除」的操作記錄在左邊的方式，已經類似於「點竄定則」中較完整的分式表示法「四 |甲」，但它仍帶有「除」與「分」等程序操作的意義。意即分式的意義離不開「對數學物件（式或數）執行除法運算」。

綜言之，早期關孝和創造的傍書式僅能表示多項式或多項方程式，和算家主要透過文字記錄「除法」的操作、另記「實」與「法」或另記「除式（分母）」等方式，取代分式以及負冪次。後來的過渡階段則發展出利用「|」的右邊記錄除法程序，而後更普遍地在「|」左側記錄除法程序。最後的成熟階段，和算家則是在「|」之左邊放置「數學物件」，真正使「乙|甲」成為完備的分式符號，代表「$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$」之意。

另值得一提的是，和算家在同一本著作中所用的符號常常不一致，甚至偶爾穿插使用了較不成熟的表示法。例如，久留島義太使用的符號有時相當隨性且不統一，於同一本書中同時使用了「|」的左、右側來記錄除法操作。至於松永良弼，他一開始主要透過文字記錄除法運算、使用中算概念下的「實」與「法」以及另外記錄除式等方式來表徵分式。後來，他也開始以「|」左側記錄除法操作，將單一籌式推廣至得以表示「分式」的情況。不過，1739 年《方圓算經》書中仍未出現「乙｜甲」形式的分式符號，一直得到他的《方圓雜算》一書，始以「|」左側放置除式（數），使得「乙｜甲」具有現代分式的意義，至此，和算家的分式符號才算發展成熟。不過，由於松永卒於 1744 年，因此《方圓雜算》很可能是他晚年最後一批著作（林建宏，2013）。相關分式籌式符號除了可見於松永良弼的《方圓雜算》外，亦被其弟子山路主住使用。最後，

得益於有馬賴徸刊刻《拾璣算法》，公開並介紹了關流密傳的點竄符號與相關符號運算法則，使得一般人有機會一窺關流所發展的籌式符號法則。

再回到前言所提出的問題：和算的符號系統源於中算，然而，為什麼中算家反而沒有發展出分式籌式符號？又是什麼樣的需求或因素，促使和算家發展進而完備分式的籌式表示法？以下筆者簡單作一說明。

首先，天元術是在宋、元時期發展成熟的中國傳統算學，並以中算學家李冶的《測圓海鏡》與《益古演段》二書為代表性著作。然而，李冶的天元術，到了明朝中葉已無人能曉，而天元術與四元術的失傳，這也使得明朝與清初時期，中國符號代數的發展，無以為繼。再者，1723-1840 年間的學術風氣上，西學中源說盛行，此時的中算家是依著「借根方」來進行校注算書，[20]解天元術的工作。蘇俊鴻（2013）與林倉億（2001）提到，此時的中算家所理解的天元術，是帶著借根方知識內涵的天元術。一直到 1797 年，中算家李銳（1769-1817）重新校算李冶的《測圓海鏡》與《益古演段》二書時，才重現天元術的原貌。然在此之前，和算家的分式符號系統早已發展完備。

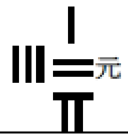
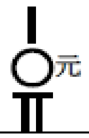
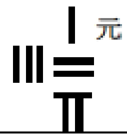
無論是中算家所用的借根方式或天元術，都發展出表示分式的方法。首先，借根方當中，以「根」代表未知數，並得以表示出未知數的不同冪次項。然而，借根方的表示法中，並沒有負數次方，而是以文字形式的「一根之一百四十」，來表示現代符號下的「$\frac{140}{x}$」，又如「一根之一百四十寸自乘、再乘」表示的是「$\frac{140}{x}$」的三次方，最終求得的結果「一立方之二百七十四萬四千」，亦即現代符號裡的「$\frac{2744000}{x^3}$」（林倉億，2001）。

除了源於西學的借根方之外，無論是傳統中算的天元術或四元術，都是利用相對位置來表徵不同的符號與意義。其中，天元術是利用上下擺放的籌式，來表示未知數不同冪次項的係數，例如二次項下面的是一次項、一次項之下是常數項、常數項以下是負一次項等。如表二所示，為天元術的籌算表示法，從中可看出如何表示出$\frac{7}{x}$項，該表示法裡，以常數項下一列的位置來表示負一次項，[21]而該位置上擺放的籌式，則是該項的數字係數，並且無法表示出符號係數，且空間使用上頗受限制。另外，中算家所發明的四元術，其籌式擺放則利用了上、下、左、右四個方位，來表示出四個未知數，並且利用其它各方位來表示這些未知數的組合，不難想見其空間使用上更不具彈性。

[20]借根方是十七世紀末期，由傳教士傳入中國，並教授康熙的西方代數學知識。
[21]元所在位置為 x 的一次項，元的下一列為常數項，再下一列即為負一次項。

表 **2**

天元術的籌算表示法與今日表示法對照表

籌算的表示法				
今日的表示法	$x^2+32x+7$	x^2+7	$x^2+32+\frac{7}{x}$	$x^2+(-32)x+7$

修改自「**中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術**（未出版碩士論文）（頁 32）」，林倉億，2001，國立臺灣師範大學，臺北市。

無論是借根方或是天元術都發展出用來表示 x^{-1} 項的方式，並為中算家所使用。然而，當中算家熟悉了借根方中，以文字形式來表示「一根之一百四十」的方式，或者天元術中，以常數項下一列的「位置」來表示負冪次之後，分式籌式符號的需求不再。再者，無論是天元術或四元術，所相應使用的計算器為籌算，在不同位置上所擺放的籌式各有不同意義，在各位置上附加新符號或記號易產生混淆，也難以外加文字，且它們分別只能表示一個未知數與四個未知數的多項式，無形中也限制了符號的發展性。加以中算書中的問題，所涉未知數往往不多，同樣未帶來符號發展的需求。因而，中算家終未發展出具現代性的分式符號。而這也說明了計算工具－制式算籌的擺放與位置－的局限，以及所解問題類型的局限，影響了數學概念與符號的發展。[22]

另一方面，十七世紀中期過後，和算家所處理的數學問題，往往涉及了多個未知量，或者他們是以抽象的方式解決問題。因此，只能表示一個未知數的天元術與傳統的籌算已明顯不敷使用，在此需求下，新的符號系統於是誕生。到了關孝和時期，他所發明的傍書法，將未知數從天元術中的各個「位置」解放，成為真正的符號，一方面得以利用不同的符號，表示出多個未知數，增加了未知數使用上的數量與彈性，也增加了空間使用上的可能性。多個「實質符號」同時使用時，勢必無法再利用傳統的算籌等計算器來進行符號運算與操作，因此，筆算得以發展。同時，畫式記號「|」的使用，使得單一籌式的左側空間得以被利用，進而如本文所述，逐漸發展出代表不同意義的新表示法。再者，筆算也促進了外加符號與記號的便利性，使得籌式可與文字相結合，文字脈絡中表示除法的運算程序，可被轉移記載至籌式「｜」的左右側，而後固定於左側，最後，和算家籌式中帶程序性的「四除」，成為數學物件「四」，且可再將此數字置換成抽象的符號，終形成具現代性的分數（式），使得分式符號得以完備。

[22]這裡筆者以一現代例子作類比，例如以計算機執行除法運算固然便利，然而，計算機並無法表示出分數，更遑論促進分數概念或符號的發展與學習。

再從前述分式表徵的發展歷程來看，和算家的分式概念具「程序」與「物件」的二元特色，且操作性的程序面向先於結構性的物件面向，他們透過對「式與數」的除法操作，最終發展出分式符號與分式概念，並將分式視為一數學物件，可進一步對其進行操作與運算。再者，後期和算家使用成熟的分式符號「乙｜甲」之餘，偶爾仍會混雜地使用了較不成熟的符號（例如：乙‖甲，其中的「‖」被用來表示籌式中的 2，亦即它尚有表示數字 2 之意，而非單純作為畫分分子與分母的符號。同時，其左邊的乙表示的是分母，右邊的甲，表示的是分子，因此，該籌式符號之意，即為現代分式符號裡的 $\frac{2甲}{乙}$ ）或具程序操作的表徵，例如以「乙除|甲」來表示 $\frac{甲}{乙}$ ，這恰反應出分式概念對某些和算家而言，具有「程序－物件」二元性同時存在的特色，分式符號一方面表徵了數學物件，也表徵涉及了乘除法的程序操作或演算法，這正呼應了 Sfard（1991）有關數學概念二元性的觀點與論述。

此外，和算的分式符號發展，除了可作為印證 Sfard 對於數學概念「程序─物件」二元性之論述的歷史證據外，和算分式發展的過程，亦可佐證 Sfard 的論點：透過具體操作可將之內化成概念操作，進而物化成數學物件，得以進行運算操作，在此，筆者以一個簡單的一般性例子進行說明。早期和算文本的術文中，出現的演算法「置甲，四除之，合問」，代表著利用算籌或筆算，透過具體的「置甲」以及「四除」等操作，可得所求。到了十七世紀初期，上述演算與操作，開始被濃縮成「四除｜甲」之類的分式表徵，象徵著原本的演算法已逐漸被內化成概念上的操作，意即以符號「四除｜甲」濃縮並內化了原欲執行的「將甲除以四」之運算，而不再進行實際操作或提及操作上的細節，但它仍帶有程序操作的面向。一直到十八世紀中期，「點竄法則」的出現象徵著分式符號與相關運算法則已發展成熟，這也代表和算家眼中的「置甲，四除之」，已完全從程序性的具體操作，物化成「四｜甲」之類的數學物件－分數（式），並可再將它置於新的演算法脈絡裡，對此數學物件進行運算或操作。換言之，透過對數或式進行動態而具體的運算與操作，最終形成了靜態的概念結構關係與新數學物件－分數（式），乘除運算相關的演算法，被物化成分式符號後，這些分式亦再成為新演算法的程序裡所操作的數學物件。[23]

儘管傍書法發展至點竄分式符號的過程中，出現了各式各樣的表徵，不過，有馬賴僮公開了點竄定則之後，此表示法也為關流與一般和算家所接受。從另一個角度來看，許多十八世紀的和算著作，其刊刻或成書時間乃至抄寫者皆不詳，但數學家慣用的符號系統，特別是和算家對於「分式」符號的使用情況，就像筆跡或者慣用詞語一般，可作為判定作者、抄寫者或者成書時期的重要依據。

例如，某書中所使用的是較不成熟的分式符號，或者可使用卻未使用分式符號，我們當可

[23]事實上，和算裡的術文（演算法）發展，同樣具有類似的特色，不過礙於篇幅與主題，不在此多作說明。

推定成書時間應為 1740 年代之前，或該數學家尚未習得此符號。倘若書中使用了較成熟的分式符號，那麼此書的成書年代當可後推，或可推定該版本非早期和算家的手稿，亦可能是後代數學家的傳抄版。例如，從徐澤林（2009）《和算選粹補編》一書所收錄的《久留島極數》來看，「解義」裡所用的成熟分式符號，與久留島義太慣用的符號並不一致，且久留島義太其它著作並不使用「解義」一詞，因此可推斷應非久留島義太本人所寫，可能為後世傳抄版或是後人的諺解版。而現存的《久留島先生答術之論》一書中，同樣使用了成熟的分式符號，不過此書署名為安島直圓於 1773 年所編寫的版本，這也佐證了後人在抄寫過程中，可能修改了原書中所用的符號，改用較成熟的符號。[24]

又如建部賢弘的《圓理弧背術》一書，由於該書屬秘傳而未刊刻，故成書年代不詳，一方面日本學士院（1956）主編的《明治前日本數學史》認為此書是建部賢弘作品，但徐澤林則指出此書的作者問題，是和算史上無法考證的謎團（徐澤林，2013）。不過，若據書中署名建部不休撰，以及關流和算家本多利明（Honda Rimei，1743-1821）於該書的書誌中所述，此書原作者應為建部無誤（徐澤林，2013）。但筆者考察了目前可及的版本後發現，該書中使用了「四｜矢」等「點竄」式的成熟分式符號（如圖 12 所示），這裡衍生兩種可能性，其一，此版本為建部弟子傳抄本，傳抄者增修了建部賢弘原書中的符號，並使用了十八世紀中後期和算家慣用的符號。其二，倘若此版本真出於建部之筆，或傳抄者未增改書中的符號，那麼將傍書法推廣至可表示分式之功，建部賢弘應居其中。特別是松永良弼 1739 年的《方圓算經》，尚未出現完備的分式符號，而建部賢弘歿於 1739 年，若此版《圓理弧背術》的確為建部賢弘手稿，那麼和算分式符號的發明者，應是建部賢弘才是，這也推翻了過去數學史界的定論。

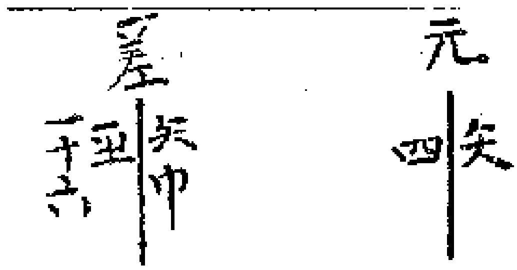


圖 12　建部賢弘《圓理綴術－圓理弧背術》書中的符號。引自” Japanese Mathematics in the Edo Period 1600-1868: A study of the works of Seki Takakazu (?-1708) and Takebe Katahiro (1664-1739) (p. 289),” by H. Annick, 2010, Birkhäuser: Basel, CH.

另一方面，Ogawa（2001）引松永良弼的《圓中三原適等》一書中所使用的分式符號（如圖 13 所示），說明松永良弼將關孝和的傍書法推廣至可以表示分式的「點竄術」。不過，事實上《圓中三原適等》的刊刻時間不詳，且據徐澤林（2008）所述，他認為《圓中三原適等》應

[24] 參考的版本主要為東北大學附屬圖書館收藏版本：http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G0000002wasan_4100001787

是松永良弼於享保元年至十年間的作品，即約是 1715~1725 年間的著作。然而，此圖中出現的成熟分式符號與松永早年使用的分式表徵不並相符，再者，此書中多次出現了「形」、[25]「布算」等字，並且大量使用了「、」等符號皆非松永良弼其它著作中具有的特色，加上圖十三中的分式符號，是出現在該書的「解義」裡，但觀松永其它的著作，皆不曾出現「解義」一詞，其用詞皆為「解曰」。綜合上述原因，筆者認為此版本可能是後人傳抄版，而非出自松永之筆，若以此論斷松永發明了分式符號，有失偏頗。

圖 13　松永良弼《圓中三原適等》書中的符號。引自"A review of the history of Japanese mathematics," by T. Ogawa, 2001, *Revue d'histoire des mathématiques*, *7*(1), p.140.

總之，筆者考察松永良弼現存的著作後發現，在他的諸多著作中，僅著作時間不明的《方圓雜算》一書，真正使用了成熟的分式符號，其它著作則否。過去學者引以為證，說明松永為「點竄」發明者的相關著作，事實上要不是尚未發展出完備的分式符號，不然就是非出自松永良弼之筆。

柒、結論

在和算數學文化之下，題與術是算學研究的主要核心，其中的術文除了表示某些公式之外，一般為程序性的機械演算法。早期尚未發展出成熟的分式符號時，和算家的分式概念皆蘊含了與「除法」相關的程序操作，並以文字來描述除法操作流程，意即和算家的分式概念為一運算程序，並偏向操作性面向。

和算分式表徵的發展過程中，共出現了五種表示分（數）式的方式：1.以文字記錄乘除法操作、2.分開記錄被除式與除式、3.將除法運算記於｜右邊、4.將除法運算記於｜左邊、5.籌式符號「｜」的左右側皆為式或數，左側作為分母、右側作為分子，「乙|甲」形成一完備的分式符號。由此來看，和算分式相關表徵與符號的發展，主要從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至概念、結構面向的數學物件－分式。

和算家的符號系統雖源於中算的天元術，然與和算同一時期的中算家們，他們習慣於借根

[25]書中常將「形」置於傍書式之前。

方或天元術的代數表示法，前者是利用文字形式表示未知數的負冪次，後者，則是利用常數項下方一列的位置來表示負一次方。而天元術受空間相對位置的限制，乃至計算方法與工具─籌算與算籌─的限制，阻礙了新符號的發展。加上，中算家所處理的問題，並不涉及太多未知數與符號，對於符號的發展與分式籌式而言，並沒有直接的使用需求，因此，中算並未發展出分式符號系統。然而，和算家所處理的問題較為複雜，且涉及較多的未知數，同時，他們傾向以抽象的方式解決問題，因此，帶來了符號改革上的需求。傍書法的發明，解放了天元術與籌算的位置限制，加以筆算系統的使用，便於增修新符號與記號於舊有籌式，進而促進了分式符號的發展與最終的完備。

再從十八世紀初期重要和算家的符號使用來看，分式表徵與符號的發展歷程並非線性，過渡時期出現了多元的表徵方式，同時，有些文本中的表示法並不一致，多種符號或表示法並存。例如，個性上不拘而散慢的久留島義太，他在符號使用上也紊亂不統一，甚至《久氏弧背草》一書出現多種表徵共存的情況。此外，該書編排與體例上也較隨意，再再反應出數學著述的特色與數學家本身的個性有關。

另一方面，從松永良弼早期的著作來看，並無分式的使用，主要以文字描述除法、另記實與法或另記分母等方式來表示分式。慢慢地，他的著作中也開始利用籌式符號「|」的左側記錄除的程序，然至 1739 年《方圓算經》其仍未發展出完備的分式符號。歷經上述過渡時期，一直到松永良弼《方圓雜算》一書，才出現「$\begin{smallmatrix}\text{弦}\\\text{一}\end{smallmatrix}\big|\begin{smallmatrix}\text{矢}\\\text{巾}\end{smallmatrix}$」之類較為成熟的分式符號。至此，籌式符號「|」的左右皆為「數」與「式」等「數學物件」，同時「乙｜甲」亦形成一個新數學物件，代表現代意義下的分式「$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$」，並可以對此符號進行加、減、乘等運算與操作。此時，分式已被視為一數學物件，而非帶有除法面向的程序操作過程。

特別地，部份和算家在使用成熟的分式符號「乙｜甲」之餘，偶爾仍會混雜地使用了較不成熟的符號或具程序操作性的表徵（如：$\begin{smallmatrix}\text{乙}\\\text{除}\end{smallmatrix}$｜甲），恰反應出分式概念具有「操作程序－結構物件」二元性並存的特色，這也呼應 Sfard 提出數學概念二元性的觀點。再就和算分式符號與概念的發展來看，亦是操作性的程序面向先於結構性的物件面向。並且，透過具體的乘除法操作與運算，動態的演算法被內化成概念操作，最後物化成數學物件－分式，得以進行運算操作。

最後，筆者也認為，釐清了和算家在分式符號使用上的流變後，利用符號表徵，特別是分式符號的使用情況輔以書中的「慣用詞語」，對於判定文本作者、抄寫者或者成書時期，皆可以當成一項重要的依據。使用了不成熟分式符號的和算文本，應屬於該和算家的早期著作，又一些使用了完備分式符號的和算文本，應當是後代和算家的傳抄本，而非原作者之手稿才是。本研究在引入概念發展、認知與符號演化的觀點，並重新考察關孝和傍書法至十八世紀點竄之間，發展出的各種分式符號表徵後，對過去和算史相關論述，提出新的觀點與看法。

參考文獻

日本學士院（主編）（1956）。**明治前日本數學史**。東京：岩波書店。

林建宏（2013）。**松永良弼《方圓雜算》之內容分析**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

林倉億（2001），**中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

徐澤林（2008）。**和算選粹**。北京：科學出版社。

徐澤林（2009）。**和算選粹補編**。北京：科學出版社。

徐澤林（2013）。**和算中源-和算算法及其中算源流**。上海交通：大學出版社。

郭書春、李兆華（主編）（2010）。**中國科學技術史，數學卷**。北京：科學出版社。

馮立昇（2009）。**中日數學關係史**。山東：山東教育出版社。

蘇俊鴻（2013），**中國近代數學發展（1607-1905）：一個數學社會史的進路**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

Annick, H. (2010).*Japanese Mathematics in the Edo Period 1600-1868: A study of the works of Seki Takakazu (?-1708) and Takebe Katahiro (1664-1739)*. Birkhäuser: Basel, CH.

Chikara, S. (1999).The French and Japanese schools of algebra in the seventeenth century: A comparative study.*Historia Scientiarum*, *9*(1), 17-26.

Ogawa, T. (2001). A review of the history of Japanese mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, *7*(1), 137-155.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.*Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715