

國家教育研究院課程及教學研究中心

十二年國民基本教育數學領域課程綱要研修中區座談會-國小組會議紀錄

時間：104年3月7日（星期六）上午10時

地點：臺中教育大學數學樓205室

主席：張鎮華教授

記錄：高怡群助理

出席人員：詳見簽到單

列席人員：詳見簽到單

請假人員：詳見簽到單

壹、宣布開會

貳、主席報告：略

參、業務報告：略

肆、討論事項

案由一：數學課綱能力指標與分年細目的增、刪、修訂建議。

諮詢意見：

一、基本理念：

1. 基本理念中，敘述可再清楚。例如數學能力之說明不清楚。希望數學能力的發展能重新認真思考並詳細說解，讓編教科書能有所依循而納入教科書的編著。藉以發展學生的重要數學能力。希望把數學能力轉化為過程指標，學生要透過開會過程來學習數學。	蔡文煥教授
2. 十二年國民基本教育重視學生「素養」的培養，應重新思考當今課程綱要中「基本理念」的論述，避免過於偏重計算與格式，而輕忽了其他能力的培養。	游自達教授

二、能力指標：

1. 能力主軸之說明為演算能力、抽象能力、及推論能力，在說明時針對演算能力有說明，但其他並沒有說明，但又突然出現數學溝通能力的說明。在第24頁倒數第3行，有把溝通能力加進來。希望在發展學生能力的內涵，希望有數學教育研究理論作為基礎。	蔡文煥教授
2. 能力的說明和能力指標發展，沒有很清楚的交待，能力指標為連結，其間之交待不清楚。內部連結強調問題解決，外部強調生活之中特點，和認識其它學科間的關係。從和前面所述的能力內涵資料說明的關連在那裡。	蔡文煥教授
3. 連結能力指標在數學學習領域均沒有說明，希望加入說明。	蔡文煥教授
4. 課程綱要中各能力指標之安排與發展，應考量數學知識產生邏輯（尤其是第一、二、三學習階段）。由學生的經驗與數學知識發展的面向出發，逐步引導其成長。	游自達教授
5. 就「素養」的目標而言，學生的估算能力(數感、量感…)培養更是重要，應在未來的課綱中應予以正視，加重比重。	游自達教授
6. 12年國教能力指標強調數學素養的培養，唯現今之教學現場及能力指標內容無法涵蓋及達成，建議12國教綱要可參考CCSSM之principle to action之八大指標進行設計，以結合理論與實務。	陳嘉皇教授
7. 五大領域(Domains)與能力指標之間是否有群集以聯絡各個指標。	劉祥通教授，詳如附件2

三、分年細目：

數與量(n)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 各條指標內之「直式計算」改成「計算」，開放計算的紀錄格式。例如：2-n-04「能熟練二位數加減直式計算。」→「能熟練二位數加減計算。」 2. 直式不用「熟練」而以「應用理解」等，不強迫性的動詞為佳。 3. 在小學一、二年級不要過度強調直式算則，對學生的數的概念發展不利，也讓限制了教學的方式。 4. 計算可與經驗上結合，如用交換律及分配律，故建議直式計算不限定為單一種方式，可用多種方式講解。 5. 直式計算的結構及其精美在目前的教學中沒有被顯現出來，只是將數學背後的意義連結好。直式的發展歷程中，可以有很多種可能性，讓學生探究以了解直式計算的結構。 	<p>林宜城校長， 詳如附件1</p> <p>魏麗枝主任</p> <p>楊清德教授</p> <p>陳嘉皇教授</p> <p>許慧玉教授</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 6. 2-n-07 能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。刪除此指標內細目的說明「在進行分裝和平分的活動時，應將乘法和除法的關係連結起來。」 3-n-05 能理解除法的意義，運用\div、$=$做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。刪除此指標內細目的說明「教師應避免使用連減法來解決除法問題，初期的「分裝」或「平分」問題可直接在較小數字範圍中操作解題，並引導到如何利用倍數觀念和乘法連結。」 	<p>林宜城校長， 詳如附件1</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 7. 2-n-08 能理解九九乘法。修改為「理解十十乘法」。 	<p>林宜城校長， 詳如附件1</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 8. 2-n-16 建議移到三年級，或在說明中建議於二下教學。二年級部分學生還沒有容量保留概念，無論怎麼教學都無法達到目標。 	<p>謝閨如教授</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 9. 數概念與加減法： 3-n-01能認識10000以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。 3-n-02能熟練加減直式計算(四位數以內，< 10000，含多重退位)。 細目說明增補：四位數加減分成(< 2000)和(< 10000)於上下學期達成。 	<p>林宜城校長， 詳如附件1</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 10. 「3-n-03能用併式記錄加減兩步驟的問題。」修為「3-n-03能在具體情境中，解決加減兩步驟的問題。」刪除「併式記錄」。 11. 3-n-03 併式當接觸連減問題時，侷限只能用連減(無括號的算式)。 12. 在能力指標中「併式紀錄」，即先列出兩步驟算式後，教師引導學生紀錄成併式，但是在教學現場，有些教師誤解意義，讓學生直接寫出併式，教學上可提醒教師注意。 	<p>林宜城校長， 詳如附件1</p> <p>魏麗枝主任</p> <p>陳嘉皇教授</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 13. 3-n-07 說明的最後一例「小朋友排隊…」應為植樹問題，建議刪除。 14. 3-n-07 的最後一個例子，「小朋友排隊…」這 	<p>謝閨如教授</p> <p>魏士軒教授</p>

	<p>樣的問題似乎可以歸納為”植樹問題”，但在三年級的課綱出現，可能不適合。</p> <p>15. 在下列指標內用括弧補充分數情境範圍的提示，引導教科書編寫內容的完整性。</p> <p>3-n-11 能在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。</p> <p>4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並(能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份，)進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。</p> <p>5-n-07 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。</p> <p>5-n-08 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。</p> <p>5-n-09 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。</p> <p>6-n-04 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。</p>	<p>林宜城校長，詳如附件1</p>
	<p>16. 4-n-07 整數相除的意涵解釋應不為 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$，而是 $\frac{2}{3} = 2 \div 3$。且說明中的例子均可用部份整體即可解決，無需用除法。</p>	<p>謝閻如教授</p>
	<p>17. 能力指標4-n-10能將簡單分數標記在數線上，在5-n-13能將分數、小數標記在數線上，是否可在低年級即提供整數的數線標記，增加學生整數單位的認識，及強化整數序數的觀念(配合1-n-03能力指標)。</p> <p>18. 低年級學生較難理解整數數線的意義，容易與測量單位(公分)混淆，不建議從低年級整數就開始教授數線。</p>	<p>陳嘉皇教授</p> <p>謝閻如教授</p>
	<p>19. 「6-n-03能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數」此內容之兩陳述並無關連，建議分開。</p> <p>20. 異分母分數的運算，課綱尚未有建議利用約分或擴分，但現場的老師似乎仍是強調，要求應找個最小公分母。在六年級(6-n-03)要求將分數代為最簡分數似乎並不是最主要的問題。</p>	<p>陳嘉皇教授</p> <p>魏士軒教授</p>
	<p>21. 6-n-04 分數的除法、小數的除法的說明，不要讓教學者以為必需用擴分的方式(如 $3.24 \div 1.2 = \frac{324}{100} \div \frac{120}{100} = 324 \div 120$)此方法對於求餘數的問題會有影響。</p> <p>22. 在分數除法的部分可增加生活情境問題，並且引入算則前多讓學生思考，也應培養教師接受不同的解題想法。</p> <p>23. 建議能力指標放入「教師能使用各類表徵處理</p>	<p>謝閻如教授</p> <p>楊清德教授</p> <p>陳嘉皇教授</p>

	整數、分數及小數之四則運算問題」。	
	24. 關於分數、小數的四則運算，於六年級細目僅有兩步驟計算之理解及練習，無後續之多步驟及分數、小數、整數混合計算內容。	魏麗枝主任
代數(a)	<p>1. 恢復及微修90課綱代數之下列指標：</p> <p>2-a-02 能將具體情境中單步驟的加、減(修為加數未知、減數未知)問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係。</p> <p>3-a-01 能將具體情境中單步驟的乘、除(修為加、減、乘、除)問題列成算式填充題，並能解釋式子與原問題情境的關係。</p> <p>4-a-02 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係。</p> <p>5-a-03 能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解。</p> <p>6-a-02*能使用未知數符號，將具體情境中的問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解。</p> <p>2. 學生代數能力的培養上，高年級須能以符號代表未知數，但整體的能力發展出現斷層，並無相關活動培養列式的能力，建議納入「算式填充題」相關活動。</p> <p>3. 數學奠基的概念應適度的放入課程綱要，並思考各個指標能力的關連性，以避免刪除對之後的教學會產生影響，如「算式填充題」等。</p>	<p>林宜城校長，詳如附件1</p> <p>游自達教授</p> <p>饒世妙校長</p>
	4. 2-a-04 細目詮釋 運用於驗算→二年級學生無法達成。 運用於解題→第五點說明之算式填充題題型，已於課綱刪除。	魏麗枝主任
	5. 「4-a-02能在四則混合計算中，應用數的運算性質」與「5-a-03能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算」於說明處宜區別其差異，並界定清楚，若有順序之分，應用較熟練困難，前者與後者應相反。	陳嘉皇教授
統計與機率(d)	<p>1. 統計與機率的指標略少，7、8年級沒有，9年級太簡單，將造成淺化機率教材之可能。</p> <p>2. 現行國小、國中的統計課程設計只用數學思維就可以計算，不確定性或統計推理的意涵著墨較少，尤其國中放在三年級下學期，教學上近似於補充性的教材，建議修改。</p> <p>3. 統計與機率主題在國中小教授的課程皆未談到重點概念，與高中無法銜接，課程難度相差太大。十二年國教可增加不確定性及變異性的概念，讓學生對統計有感並了解其意義。</p> <p>4. 國內課綱於統計與機率這個面向，第一次接觸為三年級，但只有簡單的報讀表格，而在四年級也只有簡單的報讀長條圖和折線圖。總而言之，在五、七、八年級完全沒有統計與機率的能力指</p>	<p>劉祥通教授，詳如附件2</p> <p>許慧玉教授</p> <p>林原宏教授</p> <p>魏士軒教授</p>

	標，而在九年級，便又開始討論統計圖形相關的表格。一直標榜著統計與機率，但機率這主題似乎並沒有真正深入去探討(只有在9-d-05)。	
其他建議	1. 四、五、六年級數學的時數不足，指標細目詮釋可以修改或減少。 2. 增加生活情境應用，提昇學生學習興趣。	饒世妙校長 饒世妙校長

回應意見：

- 一、會持續爭取數學上課時數，希望五到九年級能增加為5堂課。
- 二、課程綱要研修以編寫新課程綱要為主，現行課程綱要為參考，若有不合需求的內容則不寫入或修正，並增加教學的說明或考試的規範事項等。
- 三、課綱委員中有幾位統計專家委員正在做十二年課程的整體規劃及建議，讓統計主題能有清楚的脈絡依循，以利教學及學習。
- 四、若課程綱要的詮釋說明太多，容易造成教科書編寫及教師教學的限制，且在某些內容敘述，課綱委員的想法與教科書編者及教師的理解不同，教學上內容會有很大的差異，容易造成教學的困擾。
- 五、課程生活化是現在的一種趨勢，在低年級剛接觸學習時確實有效果，但是在觀念逐漸抽象化時，容易造成學生抽象能力無法建立，如何引導學生學習，此時教師的教學能力十分重要。

案由二：數學課綱實施的配套措施建議。

諮詢意見：

一、計算機使用：

1. 計算工具已是十分普及，是學生生活中不可或缺的一環，且適度使用計算工具亦可培養學生的數感。建議思考計算工具在12年國民基本教育數學課程中的定位，並予以適度納入。	游自達教授
2. 利用計算器做為後設監控的工具，發展數感並做為驗證的利器，例如「先乘除後加減」，利用計算器協助理解此算法。	陳嘉皇教授

二、教學建議：

1. 現有教學目標不夠具體，無法達成望文生義，以引導教學活動的設計。	劉祥通教授， 詳如附件2
2. 是否條列教學標準？學生練習標準課程評鑑標準？以闡述教學理想，提昇學習品質。	劉祥通教授， 詳如附件2

回應意見：

- 一、編寫課程綱要會盡量避免過度僵化的敘述，但是也要加強培訓教師的能力，讓教師能彈性應用課程內容，活化教學方式。
- 二、現行課綱已有提到計算機教學的敘述，但或許是考試不能使用，或是細目詮釋無特別說明，所以現在課堂上使用不多，故在研修時，已建議適度編寫在條文中，並且與考試中心交涉讓計算機進入考試，也希望教學上能建立學生正確使用計算機的觀念。
- 三、建議教育部補救教學在課堂時間實施，以避免課後執行效果不彰。
- 四、教育部現在很重視補救教學，到高中時再補救已來不及，今天與會收穫良多，了解不少學生的問題點，皆可做為參考。
- 五、各領域若需要補救教學可以使用彈性教學時間，在上課時間內能做補救教學。

伍、散會（下午1時）

數學課綱能力指標與分年細目的增、刪、修訂建議

南投縣國教輔導團數學領域國小組召集人：南投市漳興國小校長林宜城

建議一：

各條指標內之「直式計算」改成「計算」，開放計算的紀錄格式。例如：2-n-04

「能熟練二位數加減直式計算。」→「能熟練二位數加減計算。」

說明：

直式算則造成學習障礙，原因：

一、脫離生活：

生活上，身上有 42 元買 15 元的東西。用錢方式的習慣，會先拿十元的方式來付錢，不會先拿一元的不夠再向十元借的方式來付錢。

二、忽略兒童心理發展：

兒童數概念的運思發展順序是從序列性合成運思→累進性合成運思(從又一→又十→多階)→「部分-整體」運思→測量運思→比的運思，他們的發展有一定的順序，也有時間、背景的個別差異性。統一以直式算則來進行計算教學，直接跳到「部分-整體」運思(多階關係)，忽略小朋友的心理發展，也未考慮小朋友的個別差異，對許多無法理解的小朋友形成障礙，讓他們失去學習數學的信心與興趣，變成了教室的客人。

三、不利數概念與關係的發展：

直式算則雖是多單位的運用，但對一、二、三年級學童而言，他們尚未發展多階單位，只能依賴「十進一」、「借一當十」的口訣機械操作多位數加減，停留在 20 以內以「一」為單位的使用，欠缺「十」與「百」、「百」與「千」等多單位關係的思考，影響學童大數感覺的發展。

四、個人在任職學校實驗不用直式計算，成效良好，並推廣到偏鄉學校，在南投縣的檢測表現也優於其他學校。所以建議指標不必明列直式計算，並能在細目說明中加註不宜太早引用直式。

※直式算則與四則的使用(台大數學系 朱建正教授)

直式算則的教學想法是最具有爭議性的。基本上，它反映 Skemp 所說的，工具性了解相對於關係性了解。直式算則是以九九加法表及九九乘法表為工具，將兩個多位數擺在定位板上，由右而左地運用遞迴程序，完成加減乘的計算。至於除法則需從高位做起。因此，抱持工具性了解的師生，認為模仿加練習是不二法門。抱持關係性了解的師生，認為需透過多單位系統的概念，將遞迴程序做合理的解釋，Skemp 所指出的 faux amis，即老師、學童、安親班和家長如果理念不同，就會產生嚴重摩擦，影響教學。更由於乘除的關係性的解釋歷程並不唯一，而且還有點難度，更增加成人中，專家與大眾之間溝通的困難。此外，有些孩子並不喜歡想，而模仿背誦能力偏強，初期表現反而比某些有較佳數學傾向的學童好。當然這種爭議也表現在 90 暫綱及 94 正綱中。台灣社會大眾對品質的認識不清，有人標榜有品質其實沒品質，反過來，

真正有品質的卻不會行銷。數學教學端賴有品質的教師。以目前來看，抱著折衷妥協的心態，且戰且走，教師盡量視學童素質，調整教學方式。所以這裡我們僅扼要地處理算則教學的歷程。

建議二：

數概念與加減法：

3-n-01 能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。

3-n-02 能熟練加減直式計算(四位數以內， <10000 ，含多重退位)。

*細目說明增補：四位數加減分成(<2000)和(<10000)於上下學期達成

說明：

數概念的發展是逐步漸進的，此能力指標應是三年級一學年的目標，但教科書的編輯常常一個指標對應一個單元來編寫，因為指標是 3-n-01、3-n-02 所以「10000 以內的數」、「四位數加減(<10000)」就編在第一、二單元。剛從二年級升上三年級的小朋友，心智發展稚嫩在生活上也欠缺大數的生活經驗，10000 以內的加減造成相當大的負擔。他們在教科書及傳統教學的要求下，只能機械式的操作「一」和「十」的直式算則，不利他們數概念與關係的發展。非直式算則的運算，思考中必須累千、累百、累十，就顯得負擔很大。

建議三：

「3-n-03 能用併式記錄加減兩步驟的問題。」修為「3-n-03 能在具體情境中，解決加減兩步驟的問題。」刪除「併式記錄」

說明：

- 一、 此細目的說明「讓學童學習將兩步驟的算式記為一個加減混合的算式，並據以計算。」併式後的計算必須逐次減項來完成，逐次減項是四年級的課程，此時學童並未具備這個先備能力，所以會造成無謂的困難。並且此時多數學童尚無法了解等號對稱性的意義，他們對兩個算式相等的了解是依賴結果來判斷，無法直接判斷兩則算式的相等，所以逐次減項只能依賴老師強力灌輸，學童無法理解，產生困擾。
- 二、 此時教材的設計僅限於連加和連減的情境，同時也僅限於連加和連減的紀錄，將會僵化學童的思考。學童面對如：「工廠裡生產 9860 顆的糖果，其中牛奶糖有 3105 顆，水果糖 2347 顆，剩下的都是沙士糖，沙士糖有幾顆？」學童以生活經驗思考，多數學童都先將牛奶糖 3105 顆和水果糖 2347 顆合起來，再用總數減去合成的數，此時兩步驟能順利解題，但要併式就會有困難，也只能模仿連減併式記錄，記錄與解題思維並不一致。如圖：

(2) 工廠裡生產 9860 顆糖果，其中牛奶糖有 3105 顆，水果糖有 2347 顆，剩下的都是沙士糖，沙士糖有幾顆？

$$\begin{aligned} &9860 - 2347 - 3105 \\ &= 5452 - 9860 \\ &= 4408 \end{aligned}$$

4408 顆

三、 指標「**4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。**」，在四年級引入括號後再進行併式記錄，同時等號意義也延伸到對稱性的理解再逐次減項計算，學童學習將更順利。所以三年級可以修改為「**3-n-03 能在具體情境中，解決加減兩步驟的問題。**」

建議四：

恢復及微修 90 課綱代數之下列指標：

- 2-a-02 能將具體情境中單步驟的加、減(**修為加數未知、減數未知**)問題列成算式填充題，並解釋式子與原問題情境的關係。
- 3-a-01 能將具體情境中單步驟的乘、除(**修為加、減、乘、除**)問題列成算式填充題，並能解釋式子與原問題情境的關係。
- 4-a-02 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係。
- 5-a-03 能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解。
- 6-a-02* 能使用未知數符號，將具體情境中的問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解。

說明：

課綱微調刪除以上指標的原因：(引自課綱微修說明)

許多現場教師將溝通工具之算式填充題，上升為形式之代數工具，並做過分嚴格之評量，造成許多困擾，故予以刪除。

教學現場發現困擾的主因：

教材編寫算式填充題未考慮學生心理發展，教科書將被加數、被減數未知的問題編在二年級上學期，由於小朋友此時並未具備部分整體運思的能力，無法理解被加數、被減數未知的形式解題方式，所以造成嚴重的困擾。一、二年級面對加數未知、減數未知的問題，運用又十又一的類進運思就能順利解題，並且有利於述概念的流暢。

刪除後的影響：(教學現場老師的反應)

現行課綱在五年級才列入此指標「**5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。**」由於小朋友在二、三、四年級已被直接要求任何情境問題的未知數都列在等號右邊，欠缺列於等號左邊的經驗，所以到了五年級，很多小朋友無法依問題情境將未知數列於適當的位置，造成老師進行符號表示未知數及等量公理兩單元的教學困擾，同時也影響國中一元一次方程式之學習。

建議五：

- 2-n-08 能理解九九乘法。**修改為「理解十十乘法」。**

說明：

有利於多位數的乘法運算，也有利於除法的估商能力。

建議六：

2-n-07 能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。

刪除此指標內細目的說明「在進行分裝和平分的活動時，應將乘法和除法的關係連結起來。」

3-n-05 能理解除法的意義，運用 \div 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。

刪除此指標內細目的說明「教師應避免使用連減法來解決除法問題，初期的「分裝」或「平分」問題可直接在較小數字範圍中操作解題，並引導到如何利用倍數觀念和乘法連結。」

說明：

二年級、三年級的乘法概念發展尚未穩定，此時除法情境問題就和乘法連結，容易造成小朋友的乘除混淆，他們無法分辨乘除情境，只能憑自己的經驗形成一種不良的解題習慣「本單元是乘法所有的問題都用乘法解題」，「本單元是除法就都用除法解題」，並且除法在直式算則中異於加減乘的從右算起，所以傳統教學讓很多小朋友失敗於除法問題，又是變成教室客人的一波。

生活上解決「分裝」或「平分」的問題，基本上會直接用加法或減法的思考來解決，但當面臨有餘數時，仍需透過減法才能完整解決問題，所以用減法引入除法算式的認識，是每個小朋友可以理解的方法；當理解除法算式意義之後再逐步發展乘減的工具來解決，如此可以讓每個孩子都能順利學習成功。

建議七：

在下列指標內用括弧補充分數情境範圍的提示，引導教科書編寫內容的完整性。

3-n-11 能在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。

4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並(能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份，)進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。

5-n-07 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

5-n-08 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

5-n-09 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

6-n-04 在具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

說明：

小朋友在數學學習中，有關分數概念與運算的問題出現最嚴重的失敗與挫折，因教科書編寫的內容常局限於連續量的情境，欠缺離散量情境中兩階層次的分割。在離散量情境中，小朋友能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份時，他們面對分數加減乘除的情境問題，可以運用具體操作來解決問題，可以讓更多的小朋友理解分數加減乘除的意義。指標內補充分數情境範圍的提示，將可以引導教科書編寫內容的完整性，有助小朋友在分數概念的完整發展。

數學課綱與能力指標

劉祥通(shiangtungliu@gmail.com)

嘉義大學數理教育所

國民教育數學課程的目標，須能 反映下列理念：

- (1) 數學能力是國民素質的一個重要指標；
- (2) 培養學生正向的數學態度，瞭解數學是推進人類文明的要素；
- (3) 數學教學應配合學童不同階段的需求，協助學童數學智能的發展；
- (4) 數學作為基礎科學的工具性特質。



數學課室氛圍的轉移

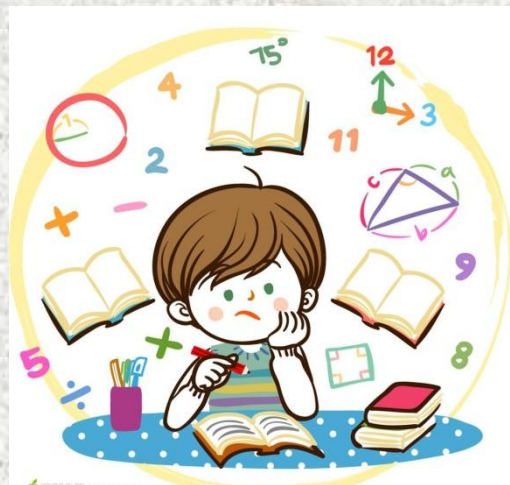
1. 課室當作學習的社群
2. 以邏輯與數學證據當作驗證
3. 以數學當作推理活動
4. 導引臆測、調查、創造與解題等活動
5. 連結數學的觀念與應用

數學教學實踐(mathematics teaching practices)的8個標準(NCTM, 2014)

1. 設定數學的目標，以聚焦學習(establish math goals to focus learning)。
2. 安排問題情境，以促進推理與解題
(Implement tasks that promote reasoning and problem solving)。
3. 使用與連結數學表徵(use and connect mathematical representation)。
4. 促進有意義的數學對話 (Facilitate meaningful mathematical discourses)。

數學教育的目標 (NCTM, 1989)

1. 學習重視數學，
2. 對自己的能力有信心，
3. 成為數學解題者，
4. 學習以數學溝通，
5. 學習以數學推理。



數學教學實踐(mathematics teaching practices)的8個標準(NCTM, 2014)

5. 問出有目的的提問 (Pose purposeful questions)。
6. 從概念的理解以建立程序的流暢 (Build procedure fluency from conceptual understanding)。
7. 學習數學時支持學生有生產性的奮鬥 (Support productive struggle in learning mathematics)。
8. 引導與利用學生的思考(Elicit and use of student thinking)。

學生從事數學練習(practices)時的 8 個標準(CCSS02010, pp. 6-8)

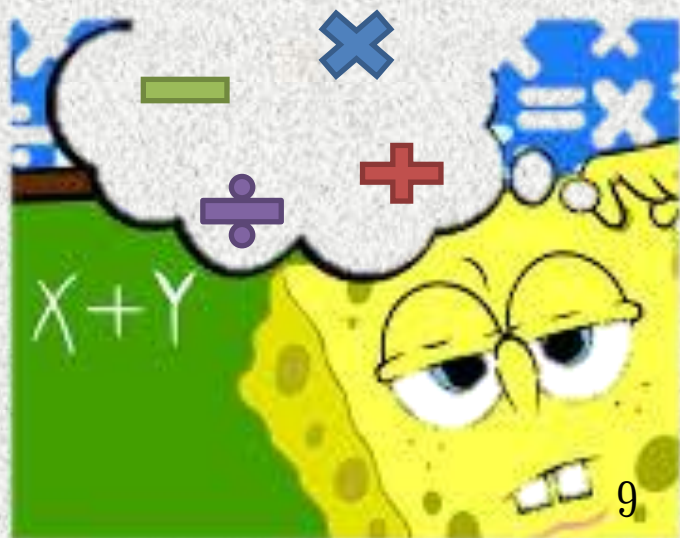
1. 意義化問題與保留(persevere)以解決它。
2. 抽象(abstractly)與量化性(quantitatively)推理。
3. 建構可行的論證(viable arguments)與批評(critique)其他的推理。
4. 以數學方式進行模型化 (model with mathematics)。

學生從事數學練習(practices)時的 8個標準(CCSS02010, pp. 6-8)

5. 策略性地用適當的工具 (use appropriate tool strategically)。
6. 達到精確 (attend to precision)。
7. 尋找與使用結構 (look for and make sense of structure)。
8. 重複性推理脈絡中尋找與表徵出規律性 (look for and express regularity in repeated reasoning)。

數學化的過程

1. 解題 (problem solving)
2. 溝通 (communication)
3. 推理 (Reasoning)
4. 連結 (Connection)
5. 表徵 (Representation)



Common Core Format

- K-8

High school

Grade

Conceptual category

- Domain

Domain

- Cluster

Cluster (簇、叢集)

- Standards

Standards (能力指標)

-

- (There are no preK Common Core Standards)

Grade Level Overview

Mathematics | Grade 2

In Grade 2, instructional time should focus on four critical areas: (1) extending understanding of base-ten notation; (2) building fluency with addition and subtraction; (3) using standard units of measure; and (4) describing and analyzing shapes.

(1) Students extend their understanding of the base-ten system. This includes ideas of counting in fives, tens, and multiples of hundreds, tens, and ones, as well as number relationships involving these units, including comparing. Students understand multi-digit numbers (up to 1000) written in base-ten notation, recognizing that the digits in each place represent amounts of thousands, hundreds, tens, or ones (e.g., 853 is 8 hundreds + 5 tens + 3 ones).

(2) Students use their understanding of addition to develop fluency with addition and subtraction within 100. They solve problems within 1000

Critical Areas –
similar to
NCTM's
Curriculum
Focal Points

Format of K-8 Standards

Grade Level

Operations and Algebraic Thinking

1.OA

Represent and solve problems involving addition and subtraction.

1. Use addition and subtraction within 20 to solve word problems involving situations of adding to, taking from, putting together, taking apart, and comparing, with unknowns in all positions, e.g., by using objects, drawings, and equations with a symbol for the unknown number to represent the problem.²
2. Solve word problems that call for addition of three whole numbers whose sum is less than or equal to 20, e.g., by using objects, drawings, and equations with a symbol for the unknown number to represent the problem.

Domain

Understand and apply properties of operations and the relationship between addition and subtraction.

3. Apply properties of operations as strategies to add and subtract.³ *Examples: If $8 + 3 = 11$ is known, then $3 + 8 = 11$ is also known. (Commutative property of addition.) To add $2 + 6 + 4$, the second two numbers can be added to make a ten, so $2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12$. (Associative property of addition.)*
4. Understand subtraction as an unknown-addend problem. *For example, subtract $10 - 8$ by finding the number that makes 10 when added to 8.*

Format of K-8 Standards

Operations and Algebraic Thinking

1.OA

Represent and solve problems involving addition and subtraction.

1. Use addition and subtraction within 20 to solve word problems involving situations of adding to, taking from, putting together, taking apart, and comparing, with unknowns in all positions, e.g., by using objects, drawings, and equations with a symbol for the unknown number to represent the problem.²
2. Solve word problems that call for addition of three whole numbers whose sum is less than or equal to 20, e.g., by using objects, drawings, and equations with a symbol for the unknown number to represent the problem.

Standard

Cluster

Understand and apply properties of operations and the relationship between addition and subtraction.

3. Apply properties of operations as strategies to add and subtract.³ *Examples: If $8 + 3 = 11$ is known, then $3 + 8 = 11$ is also known. (Commutative property of addition.) To add $2 + 6 + 4$, the second two numbers can be added to make a ten, so $2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12$. (Associative property of addition.)*
4. Understand subtraction as an unknown-addend problem. *For example, subtract $10 - 8$ by finding the number that makes 10 when added to 8.*

Standard

Cluster

Format of High School

Seeing Structure in Expressions

A-SSE

Domain

Interpret the structure of expressions

1. Interpret expressions that represent a quantity in terms of its context.*
 - a. Interpret parts of an expression, such as terms, factors, and coefficients.
 - b. Interpret complicated expressions by viewing one or more of their parts as a single entity. *For example, interpret $P(1+r)^n$ as the product of P and a factor not depending on P .*
2. Use the structure of an expression to identify ways to rewrite it. *For example, see $x^4 - y^4$ as $(x^2)^2 - (y^2)^2$, thus recognizing it as a difference of squares that can be factored as $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.*

Standard

Cluster

Major Shift

- **Focus** is narrowed in order to maximize depth of learning
- **Coherence(相關、凝聚):** Think across grades, and **link** to major topics within grades
- **Rigor(嚴密):** In major topics pursue **conceptual understanding**, procedural skill and **fluency**, and **application** with equal intensity

第二階段(國小三至四年級)

1. 在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。
2. 在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。
3. 幾何上則慢慢發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。

第三階段(國小五至六年級)：

- 1. 在小學畢業前，應能熟練小數與分數的四則計算；
- 2. 能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；
- 3. 能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算；
- 4. 能製作簡單的統計圖形。

第四階段(國中一至三年級)

- 在數方面，能認識負數與根號數之概念與計算方式，並理解坐標表示的意義。
- 代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式，並熟悉常用的函數關係。
- 幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質，認識線對稱與圖形縮放的概念，並能學習簡單的幾何推理。
- 能理解統計與機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

高年級代數

- A-3-02 能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。(N-3-18)
- A-3-03 能認識等量公理。
- A-3-05 能解決用未知數列式之單步驟問題。
- A-3-06 能用符號表示簡單的常用公式。

高年級數與計算

- N-3-08 能認識多位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
- N-3-16 能認識導出單位(Units derived from SI units)並做簡單的應用。
- N-3-17 能理解速度的概念與應用，認識速度的常用單位及換算，並處理相關的計算問題。

我們希望課程目標的達成

可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力 及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力。

統計與機率(高年級、國中)

- D-3-01 能整理生活中的資料，並製成長條圖、折線圖或圓形圖。
- D-4-01 能利用統計量，例如：平均數、中位數及眾數等，來認識資料集中的位置。
- D-4-02 能利用統計量，例如：全距、四分位距等，來認識資料分散的情形。
- D-4-03 能以中位數、四分位數、百分位數，來認識資料在群體中的相對位置。
- D-4-04 能在具體情境中認識機率的概念。

統計與機率評論

- 評論
- 1. 中年級讀圖表
- 2. 高年級製作圖表
- 3. 七、八年級沒有統計與機率指標
- 4. 階段指標、分年細目沒有看到樣本空間的介紹。
- 5. 9-d-05 能在具體情境中認識機率的觀念。
此細目過於統攬、有淺化機率教材之可能。

解題

1. 利用解題方法調查與了解數學內容。
2. 從日常生活與數學情境形成問題
(formulate problems)。
3. 發展與應用策略以解決多樣的問題。
4. 能從原問題，驗證與解釋答案。
5. 意義化數學的過程中獲得信心。

推理

1. 利用模型、已知的事實(facts)、性質、與關係已解釋他們的想法。
2. 驗證他們的答案與解決方案的過程(solution processes)。
3. 使用類型與關係以分析數學情境。
4. 相信數學是意義化(make sense)的學科。

連結

1. 聯絡概念性與程序性知識
2. 連結不同的概念表徵
3. 認識不同題材(幾何、代數等)的關係
4. 運用數學在其他學科
5. 運用數學在日常生活



表徵

1. 表徵是用來翻譯與分析一個字句問題 (verbal problem)，使問題更清楚。
2. 表徵也是轉譯一個問題，或一個觀念，到一個新的形式 (form)。
3. 表徵包括轉譯圖形 (diagram) 或具體模型 (physical model) 為符號或文字。

溝通

1. 建立數學觀念與具體的材料、圖畫 (pictures)、與圖形(diagrams)的關聯。
2. 能澄清與反思關於數學觀念與情境的想法。
3. 建立數學語言、符號與日常用語的關聯。
4. 體認到數學表徵、討論、閱讀、寫作、與傾聽，對於學習數學與使用數學都是很重要的。

A scenic landscape featuring a calm lake in the foreground, reflecting the sky and the surrounding environment. In the middle ground, there are forested mountains and a small island with a prominent rocky peak. The trees on the island and the surrounding hills show some autumnal colors, including reds and oranges, mixed with green. The sky is a clear, pale blue with a few wispy white clouds. The overall scene is peaceful and picturesque.

The End

Thanks for your attention