李俊賢、譚曉雯、李政德（2015）。
創新數學教具教學法：幾何九九乘法表。
臺灣數學教師，**36**（2），1-12。

創新數學教具教學法：幾何九九乘法表

李俊賢[1]　譚曉雯[2]　李政德[3]
[1]臺北市立大學數學系
[2]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
[3]中國文化大學國際貿易學系

本文旨在強調應用數學教具輔助數學教學之重要性。創新之處為提出「幾何九九乘法表」之製作與運用，以供數學教師於課堂中使用。「幾何九九乘法表」不僅能將抽象的數學概念具體化，更能激勵學童具體的數學思維。除了指出代數與幾何之關聯性，我們更說明代數與立方體的關聯。

關鍵詞：幾何九九乘法表、數學教具、數學教學法

通訊作者：李政德，e-mail：lzd4@faculty.pccu.edu.tw
收稿：2015 年 3 月 4 日；接受刊登：2015 年 6 月 22 日。

壹、前言

數學是人類最重要的資產之一且被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手。數學結構之精美，不但體現在科學理論的內在結構中及各文明之建築、工技與藝術作品上，自身亦呈現一種獨特的美感。在進入 21 世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力，前述論點請參閱教育部（2008）。不但如此，Devlin（2011）、Devlin and Lorden（2007）與 Shaw（2002）一語道出數學是一種國際性語言，數學知識及數學能力能夠解決日常生活中所遭遇的問題，更顯示出數學的重要性。然而，卻有一些研究指出在國小數學的學習過程中，不僅有許多學童在一開始學數學時便產生害怕與恐懼的現象，而且隨著年級越高此一現象越加嚴重，最後甚至排斥數學或放棄數學，例如：Freer（2006）、Hadley and Doward（2011）與 Ojose and Sexton（2009）。因此，如何大幅提升幼兒與國小學童數學的學習興趣，乃是一件刻不容緩的重要議題。

有鑑於此，教育部（2008）於「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」中明白揭示並強調：要把每一位學生都帶上來，是九年一貫及國家教育政策既有的理念。在數學教育裡，強調每個學生都有權利要求受到良好的數學訓練，並充分認識重要的數學概念及提升厚實數學能力。教育應提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的核心數學題材，因為這些重要的數學概念和精熟的演算能力，是九年一貫所強調「帶著走」的能力。此外，面對 21 世紀劇變之「知識經濟時代」的來臨，教育部（2002）於「創造力教育白皮書」中提及：創新可視為一系列知識生產、知識利用以及知識擴散的歷程，而創造力就是創新的火苗。因此創造力與創新能力之培育，不僅是提昇國民素質之關鍵，亦為發展知識經濟之前提，所以創造力教育也就成為未來教育工作之推動重點。綜合上述所言，我們發現如何將創造力與創新能力之培育落實於老師的數學教學中，是一件勢在必行且需迫切執行的工作，相信對於每位老師而言，這項工作必定是一個相當棘手的問題。

子曰：「知之者不如好之者，好之者不如樂之者。」因此，如何讓孩子們對於學科（尤其是數學科目）的學習能夠陶醉在其中而樂此不疲，將是本文所欲探討的主題。透過創新數學教具教學法（innovatory mathematics manipulatives teaching method），我們首先提出「幾何九九乘法表」（geometric 99 multiplication table）的概念，設計做中學（learning by doing）與玩數學的數學教室，讓學童們對於「學數學」一事能樂在其中，進而大幅提升學習數學之興趣；更在做中學的過程中，經由實物操作的訓練，使得學童們具備「帶著走」的數學能力。最後，冀希藉由「幾何九九乘法表」的概念對於創新教育以及創造力與創新能力之培育略盡棉薄之力；相信唯有每位數學老師皆發揮創意教學的理念，則必能達成把每一位學生都帶上來的教育目標。

本文行文如下：第貳節為文獻探討；第參節針對創新數學教具教學法—幾何九九乘法表之設計理念加以分析與討論；第肆節則為結論與建議。

貳、文獻探討

何謂數學教具（mathematics manipulatives）？許多學者紛紛定義數學教具的意涵，舉凡看的見、摸得著，有形的具體實物若能應用於數學教學中，並將抽象的數學觀念具體化或簡單化者，皆可視為數學教具，如：Boggan et al.（2010）、Bujak et al.（2013）、Glenn and Carpenter（2007）、Heddens（2005）與 Swan and Marshall（2010）。目前常被數學老師應用於教學中的數學教具，包括：塑膠代幣、七巧板、扣條、積木…等。一般而言，教具之使用能夠提高學童的專注力也有助於學童們對於抽象數學觀念的理解，不但提高學習興趣與意願更能降低學習障礙與焦慮，進而增加學童們的自信心與創造力，可見數學教具之重要性，如：Hunt et al.（2011）、Kelly（2006）、Ojose（2008）、Ojose and Sexton（2009）與 Thompson（1999）。

心理學家 Piaget（1965）的認知發展論指出兒童的認知發展過程分為四個階段，即感覺動作期（sensory motor stage）、操作前期（preoperational stage）、具體物操作期（concrete operational stage）與形式或邏輯操作期（formal operational or mathematical logical operational stage）等，同時認為數學教具之採用對於這四個階段兒童的數學學習是不可或缺的輔助工具。美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM）也極力要求各級學校使用數學教具於不同年級學生的數學教學中。換言之，應用數學教具於數學教學之理念，亦符合許多先進國家數學教育發展之趨勢，其重要性可見一般，如：Cain-Caston（1996）、Castro（2006）、Freer（2006）、Kelly（2006）、Moch（2001）、Peavler et al.（1987）、Smith（2009）、Swan and Marshall（2010）與 Uttal et al.（1997）。

實務上，在課堂中使用數學教具學習之學生的數學績效比未使用數學教具學生的數學績效高出許多。這是因為數學教具的使用能幫助學生快速理解抽象的數學觀念、以抽象的數學觀念思考並解決問題、針對數學問題能激發許多不同的解決方法。換言之，應用數學教具於數學教學中對於提升同學的學習興趣、創新能力與學習績效皆有正面的助益，參見 Ball（1992）、Driscoll（1981）、Heddens（2005）、Raphael and Wahlstrom（1989）、Sowell（1998）、Suydam（1986）、Suydam and Higgins（1976）、Thompson（1999）與 Toptaş et al.（2012）。

然而，九年一貫數學學習領域的內容分為「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」、「連結」等 5 大主題。觀察老師們所用的數學教具都是針對某項數學內容之教授設計而成，例如：塑膠代幣可用來教導幼兒及一年級學童如何數數與認識日常生活中常用的硬幣種類；七巧板的使用可使學童瞭解各種不同的幾何圖形並且任意發揮想像力排出許多不同的幾何形狀；應用扣

係除了介紹幾何圖形，更能導入幾何圖形中邊長與角的觀念；透過積木的操作可讓學童瞭解立體的概念，譬如：正立方體、長方體與錐體。單一數學教具教導單一數學內容雖立意良善且成效良好，卻仍有美中不足之處；若能由老師們發揮創意與巧思，設計融合多項數學內容的創新數學教具教學法，則不但能使學童瞭解各項數學內容的關聯性，更能培育訓練學童的創造力。

有鑑於此，本文的主要目的係發展一個融合「數與量」、「幾何」、「代數」與「立方體」等數學內容的創新數學教具教學法，此一創新教具我們命名為：「幾何九九乘法表」。下一節將介紹「幾何九九乘法表」的製作過程、教學方法與教學目標。

參、分析與討論

美國數學教師學會 NCTM（2000）認為一個好的數學教具必須具備 4 項功能，說明如下：幫助學童明瞭數學觀念、學童能夠互相溝通數學想法、瞭解數學觀念間的連結性與協助學童明白生活中處處充滿數學。本文所提之數學教具，除了具備前述 4 項功能，更實踐做中學的教學理念，透過親手作教具的方式，自然且輕鬆的玩數學。以下將分兩小節進行討論，第一小節為「幾何九九乘法表」之製作；第二小節為創新數學教具教學法。

一、「幾何九九乘法表」之製作

製作「幾何九九乘法表」的基本元件係以瑞士數學家 Cuisenaire 所發明的一套數學教具稱為古式數棒為主。古式數棒皆由邊長 1 公分的正立方體組成，如圖 1 所示，從 1 到 10 分別以不同的顏色表示：

白色數棒　=1 個正立方體代表長度 1 公分、體積 1 立方公分、重量 1 公克；
紅色數棒　=2 個正立方體排列代表長度 2 公分、體積 2 立方公分、重量 2 公克；
淺綠色數棒　=3 個正立方體排列代表長度 3 公分、體積 3 立方公分、重量 3 公克；
紫色數棒　=4 個正立方體排列代表長度 4 公分、體積 4 立方公分、重量 4 公克；
黃色數棒　=5 個正立方體排列代表長度 5 公分、體積 5 立方公分、重量 5 公克；
綠色數棒　=6 個正立方體排列代表長度 6 公分、體積 6 立方公分、重量 6 公克；
黑色數棒　=7 個正立方體排列代表長度 7 公分、體積 7 立方公分、重量 7 公克；
棕色數棒　=8 個正立方體排列代表長度 8 公分、體積 8 立方公分、重量 8 公克；
藍色數棒　=9 個正立方體排列代表長度 9 公分、體積 9 立方公分、重量 9 公克；
桔色數棒　=10 個正立方體排列代表長度 10 公分、體積 10 立方公分、重量 10 公克。

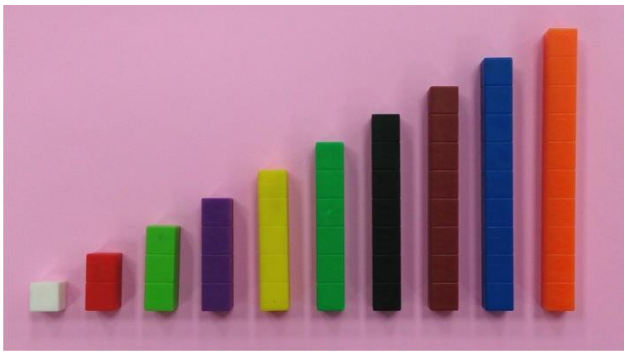
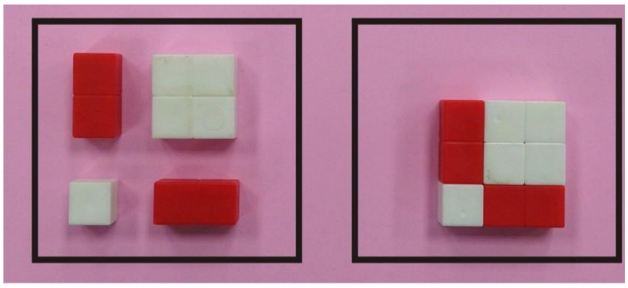


圖 1　古式數棒

採用古式數棒我們可以製作「幾何九九乘法表」，以下將以最簡單的情況開始堆疊，最後類推出「幾何九九乘法表」。

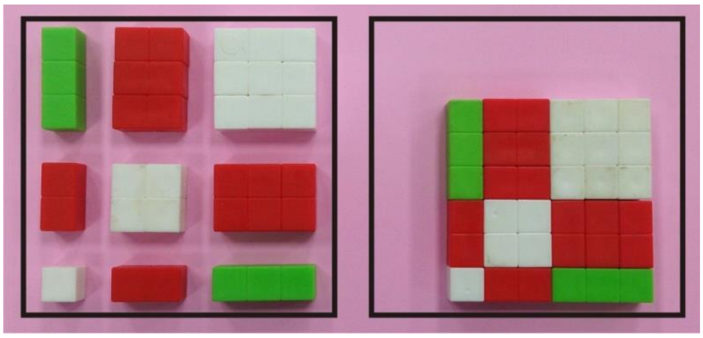
步驟 1：幾何 2 × 2 乘法表，如圖 2 所示。其中，圖（2a）為分解圖；圖（2b）為完成圖。



（2a）分解圖　　（2b） 完成圖

圖 2　2 × 2 乘法表

步驟 2：幾何 3 × 3 乘法表，如圖 3 所示。其中，圖（3a）為分解圖；圖（3b）為完成圖。



（3a）分解圖　　（3b）完成圖

圖 3　3 × 3 乘法表

以此類推，可得「幾何九九乘法表」，如圖 4 所示，圖 4 為「幾何九九乘法表」之俯視圖。

「幾何九九乘法表」之製作說明如下：以圖（3a）為例，左下方有 1 個白色的正立方體，其意涵為每行有 1 個正立方體，1 行共有 1 × 1 = 1 個正立方體；中下方有 1 個紅色的長方體，試問共有幾個正立方體？其意涵為每行有 1 個正立方體，2 行共有 1 × 2 = 2 個正立方體；右下方有 1 個淺綠色的長方體，試問共有幾個正立方體？其意涵為每行有 1 個正立方體，3 行共有 1 × 3 = 3 個正立方體…左上方有 1 個淺綠色的長方體，試問共有幾個正立方體？其意涵為每行有 3 個正立方體，1 行共有 3 × 1 = 3 個正立方體；中上方有 1 個紅色的長方體，試問共有幾個正立方體？其意涵為每行有 3 個正立方體，2 行共有 3 × 2 = 6 個正立方體；右上方有 1 個白色的長方體，其意涵為每行有 3 個正立方體，3 行共有 3 × 3 = 9 個正立方體⋯以此類推，可得圖 4 之「幾何九九乘法表」。圖 4 中最下列代表 1 × 1 = 1、1 × 2 = 2、1 × 3 = 3⋯1 × 9 = 9；下方倒數第 2 列代表 2 × 1 = 2、2 × 2 = 4、2 × 3 = 6⋯2 × 9 = 18；⋯最上列代表 9 × 1 = 9、9 × 2 = 18、9 × 3 = 27⋯9 × 9 = 81。

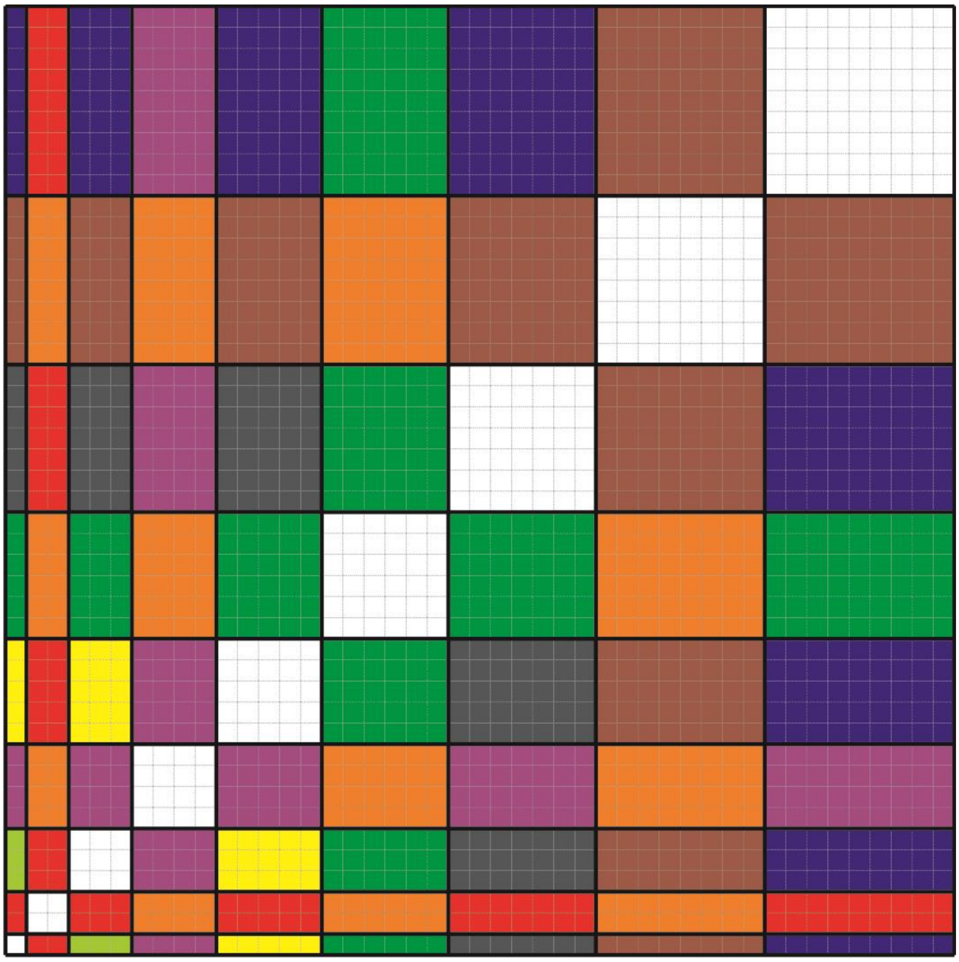


圖 4　「幾何九九乘法表」

二、創新數學教具教學法

本小節將輔以「幾何九九乘法表」說明針對不同年齡層之學童所能教授的數學觀念與教學目標。並闡述「幾何九九乘法表」的應用將如何融合「數與量」、「幾何」、「代數」與「立方體」等數學內容。

首先，建立基本觀念，如圖 1 以白色數棒為單位量 1，因此白色數棒 ＝ 1 個正立方體代表長度 1 公分、體積 1 立方公分、重量 1 公克。白色數棒為正立方體，觀察其有 6 個面，每個面皆為正方形且正方形面積為 1 平方公分，12 個邊長皆等長為 1 公分。

紅色數棒由兩個白色數棒排列而成，故紅色數棒為白色數棒的兩倍。紅色數棒為長方體，觀察紅色數棒亦有 6 個面，其中 2 個面為正方形（正方形面積為 1 平方公分），另 4 個面為長方形（長方形面積為 2 平方公分），亦有 12 個邊長其中有 8 個邊長皆為 1 公分，另 4 個邊長皆為 2 公分。

其餘顏色之數棒皆可以此方法類推，這些數與量的概念可由點數而得（包括：長度、周長、面積、體積與重量），不但得到倍數的概念，還融入正方形、長方形之幾何概念以及正立方體、長方體之立方體概念。因此，古式數棒常被應用於數學教學中，已是不爭的事實。但是排列成「幾何九九乘法表」輔助數學教學乃本研究之首創，本文希望能在數學教具教學的領域中開創嶄新的一頁。

其次，建議第一次上課之學童（不論年齡大小）一定要求其跟著老師照著前一小節之步驟，親自動手完成圖 4 之「幾何九九乘法表」。以下將逐點說明「幾何九九乘法表」之教學功能：[1]

(一) 「幾何九九乘法表」

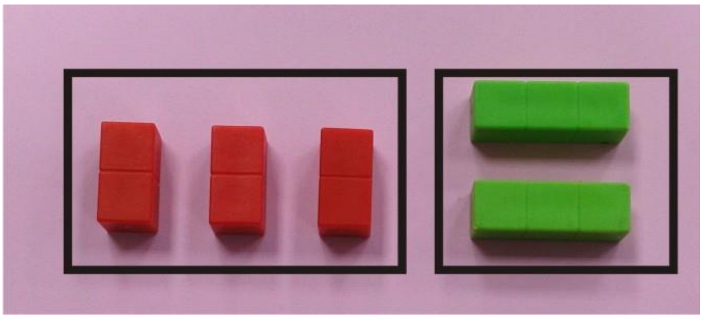
原本抽象的數學符號（小時候背誦的九九乘法表），透過學童自行製作教具之「幾何九九乘法表」，以圖像與實物的方式呈現後（如圖 4），必定能夠加深學童們的印象。

(二) 乘法交換律

圖 5 為乘法交換律分解圖，圖（5a）的問題可陳述如下：每條紅色數棒有 2 個正立方體，3 條紅色數棒共有幾個正立方體，其計算式為 $2 \times 3 = 6$ 亦即共有 6 個正立方體，其中 2 代表集聚單位的數量，3 代表集聚單位的倍數。同理，圖（5b）的問題為：每條淺綠色數棒有 3 個正立方體，2 條淺綠色數棒共有幾個正立方體，其計算式為 $3 \times 2 = 6$ 亦即共有 6 個正立方體，其中 3

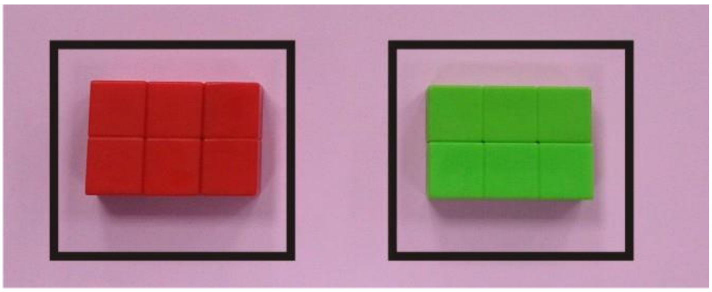
[1] 本文所列五點之教學功能其表達的數學觀念，雖然分散於國小、國中、高中之數學課程，但本研究團隊認為這些操作皆可適用於國小一年級至國小三年級的學童，主要的目的為透過做中學的方式提升學童學習數學的興趣。在國小一年級至國小三年級學童的操作課程中，不需提及國中、高中之數學專有名詞，例如：「和的平方公式」…等。然而，國中、高中之數學教師，則可利用本研究之教學法，表達抽象之數學觀念。

代表集聚單位的數量，2 代表集聚單位的倍數。圖 6 為乘法交換律合併圖，對於幼兒與低年級的同學皆可用點數之方式，得到共有 6 個正立方體的結果。綜合以上所言，我們可得乘法交換律為 $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$。



（5a）3 個紅色數棒　　（5b）2 個淺綠色數棒

圖 5　乘法交換律分解圖



（6a）3 個紅色數棒　　（6b）2 個淺綠色數棒

圖 6　乘法交換律合併圖

(三) 乘法與面積（正方形與長方形）

以圖（3a）為例，對角線的 3 個白色正方形，左下方的正方形面積為 $1 \times 1 = 1$ 平方公分；右上方的正方形面積為 $3 \times 3 = 9$ 平方公分，其面積亦可由點數而得 9 平方公分。中上方紅色的長方形面積為 $3 \times 2 = 6$ 平方公分，其面積亦可由點數而得 6 平方公分。圖 4 中其餘的正方形與長方形皆可用相同方法計算或點數而求得其面積，換言之，傳統抽象的九九乘法表與正方形、長方形面積的計算存在密切的關聯性，此一關聯透過「幾何九九乘法表」的呈現必能一目了然。

(四) 代數與面積

「和的平方公式」$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 是一個代數問題，還記得當年數學老師在黑板上，按部就班地計算其結果，老師講得很清楚同學們卻聽得很模糊，因為這些都是抽象的數學符號，難以理解此公式之意涵。若能輔以幾何圖形說明之，同學們必能恍然大悟立即瞭解此公式所代表的意義。圖 7 是一個邊長為 $(a + b)$ 的正方形，其面積為 $(a + b)^2$ 平方單位。另一方面，此一正方形可以分割成 4 個幾何圖形，左下方是一個邊長為 a 的正方形，其面積為 a^2 平方單位；

紅色的長方形其寬與長分別為 a 與 b，面積為 ab 平方單位，共有 2 個相等的紅色長方形，故面積為 2ab 平方單位；右上方是一個邊長為 b 的正方形，其面積為 b^2 平方單位，因此，這 4 個幾何圖形的面積和為 $a^2 + 2ab + b^2$。換言之，利用「幾何九九乘法表」可以證明 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 等式成立。以圖（2b）為例：正方形面積為 $(1 + 2)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2 + 2^2$ 平方單位，如此一來，同學們不但瞭解此公式之意涵，更能對此公式產生深刻的印象。

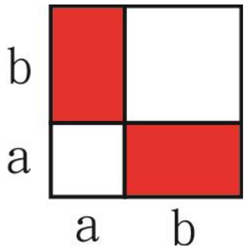
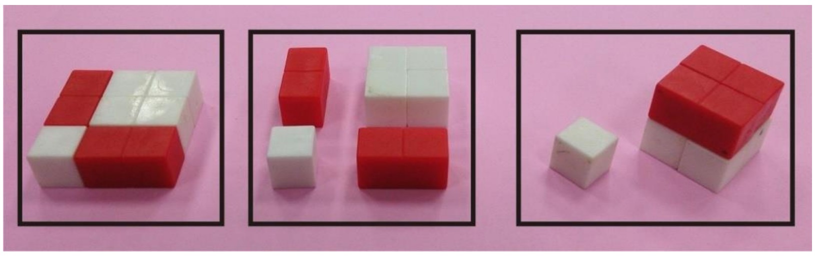


圖 7　代數與面積

(五) $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ 之發現與說明

此一抽象之代數證明題，數學老師會用數學歸納法（mathematical induction） 證明之。然而，本文之「幾何九九乘法表」亦能加速同學對此代數關係之瞭解。圖 8（步驟 1） 為 $(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$ 之說明，如下所示：圖（8a）合併圖中試問共有幾個單位量為 1 的正立方體？答案為 $(1 + 2)^2 = 9$ 個正立方體，透過圖（8b）分解圖將原圖拆解為 4 部分，再將 2 個紅色之長方體堆疊在右上方之白色長方體上，即可得圖（8c）立體圖為 2 個正立方體（一小、一大），試問圖（8c）中 2 個正立方體是由幾個單位量為 1 的正立方體所組成？答案是 $1^3 + 2^3 = 9$，換言之，圖 8 說明了 $(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$ 等式成立。

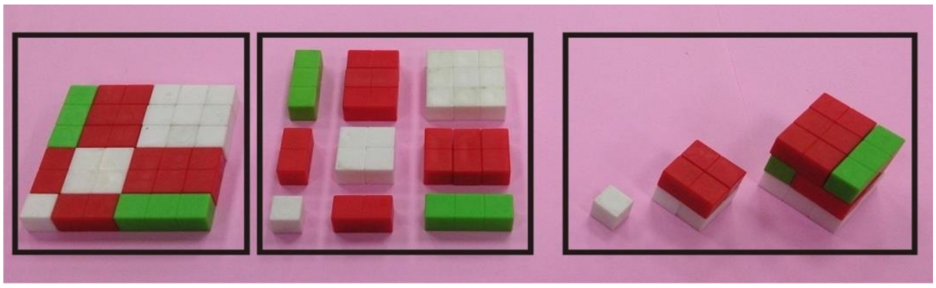


（8a）合併圖　（8b）分解圖　（8c）立體圖

圖 8　代數說明（步驟 1）

圖 9（步驟 2）為 $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ 之說明，如下所示：圖（9a）合併圖中試問共有幾個單位量為 1 的正立方體？答案為 $(1 + 2 + 3)^2 = 36$ 個正立方體，透過圖（9b）分解圖將原圖拆解為 9 部分，左下方 4 部分只需依步驟 1 為之即可，再將右中紅色長方體與右下方淺綠色長方體以及中上方紅色長方體與左上方淺綠色長方體堆疊在右上方之白色長方體上，即可得圖

（9c）立體圖為 3 個正立方體（一小、一中、一大），試問圖（9c）中 3 個正立方體是由幾個單位量為 1 的正立方體所組成？答案是 $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$，換言之，圖 9 說明了 $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ 等式成立。以此觀念類推，則可發現 $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ 等式成立。



（9a）合併圖　**（9b）分解圖**　**（9c）立體圖**

圖 9　代數說明（步驟 2）

肆、結論與建議

專注力是學習的根本，數學教具之使用，尤其是本研究首創之「幾何九九乘法表」玩數學的創新教學法，更是培養學童專注力與提升學習興趣的最佳利器，自然地建立學童的自信心，進而使得學童的數學成就、學習績效與創新能力油然而生，更重要的是學童皆具備「帶著走」的數學能力。

「幾何九九乘法表」不但是個融合「數與量」、「幾何」、「代數」與「立方體」等數學內容的創新數學教具；更符合 NCTM（2000）所提好的數學教具必須具備：幫助學童明瞭數學觀念、學童能夠互相溝通數學想法、瞭解數學觀念間的連結性與協助學童明白生活中處處充滿數學等 4 項功能。特別是第參節第二小節中所提「幾何九九乘法表」之 5 項教學功能，充分表達「數與量」、「幾何」、「代數」與「立方體」間的關連性。將代數中抽象難懂的數學符號，以簡單明瞭的平面、立體實物呈現，對於學童的數學學習將產生事半功倍之成效。

數學能力之培育並非一蹴可幾，著實需要數學老師費盡心力教導之。本研究希望扮演拋磚引玉之角色，激發數學老師們的創意與巧思，精進於數學教學法之創新；更建議老師們皆能應用「幾何九九乘法表」於數學教學中，達到把每一位學生都帶上來的教育目標。

參考文獻

教育部（2002）。**創造力教育白皮書：打造創造力國度**。臺北市：教育部。

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：教育部。

Brown, N., Wilson, K., & Fitzallen, N. (2007, November). *Using an inquiry approach to develop mathematical thinking*. Paper presented at the AARE 2007 International Education Research Conference, Fremantle, Australia.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, *16* (2), 14-18.

Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies, 3*, 1-6.

Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., MacIntyre, B., Zheng, R., & Golubski, G.(2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers & Education, 68*, 536-544.

Cain-Caston, M. (1996). Manipulative queen [electronic version]. *Journal of Instructional Psychology*, *23* (4), 270-274.

Castro, M. A. (2006). Preparing elementary pre-service teachers to use mathematics curriculum materials. *The Mathematics Educator*, *16* (2), 14-24.

Devlin, K. (2011). *Mathematics education for a new era: Video games as a medium for learning*. USA: A K Peters/CRC Press.

Devlin, K., & Lorden, G. (2007). *The numbers behind NUMB3RS: Solving crime with mathematics*. USA: Plume Press.

Driscoll, M. J. (1981). *Research within reach: Elementary school mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics & CEMREL, Inc.

Freer, W. D. M. (2006). Keeping it real: The rationale for using manipulatives in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11* (5), 238-242.

Glenn, S., & Carpenter, S., (2007). *Patterns in arithmetic: Book 2: Parent/teacher guide*. Fallbrook, CA, USA: Pattern Press.

Hadley, K. M., & Doward, J. (2011). The relationship among elementary teachers’ mathematics anxiety, mathematics instructional practices, and student mathematics achievement. *Journal of Curriculum and Instruction*, *5* (2), 27-44.

Heddens, J. W. (2005). Improving mathematics teaching by using manipulatives. Accessed on September 2005 on site http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html.

Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. concrete manipulatives in mathematics teacher education: Is one type more effective than the other? *Current Issues in Middle Level Education*, *16* (2), 1-6.

Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance based analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3* (2), 184-193.

Moch, P. L. (2001). Manipulatives work! *Educational Forum*, *66* (1), 81-87.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ojose, B. (2008). Applying Piaget's theory of cognitive development to mathematics instruction. *The Mathematics Educator*, *18* (1), 26-30.

Ojose, B., & Sexton, L. (2009). The effect of manipulative materials on mathematics achievement of first grade students. *The Mathematics Educator*, *12* (1), 3-14.

Peavler, C., DeValcourt, R., Montalto, B., & Hopkins, B. (1987). The mathematics program: An overview and explanation. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 9*, 39-50.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. New York: W. W. Norton.

Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (2), 173-190.

Shaw, J. M. (2002). Manipulatives enhance the learning of mathematics. from http://www.eduplace.com/state/pdf/author/shaw.pdf.

Smith, S. S. (2009). Using manipulatives. *Early childhood mathematics* (4th ed.). Boston: Pearson Education.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (5), 498-505.

Suydam, M. N. (1986). Research report: Manipulative materials and achievement. *Arithmetic Teacher*, *33* (6), 10-32.

Suydam, M. N., & Higgins, J. L. (1976). *Review and synthesis of studies of activity-based approaches to mathematics teaching.* Final Report, NIE Contract No. 400-75-0063.

Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15* (2), 13-19.

Thompson, P. W. (1999). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, *41* (9), 556-558.

Toptaş, V., Çelik, S., & Karaca, E. T., (2012). Pedagogical materials use of primary grade teachers in mathematics education. *Elementary Education Online*, *11* (4), 1121-1130.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as symbol: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *18* (1), 37-54.