

秦爾聰、劉致演、張克旭、段曉林（2015）。  
數學臆測探究教學對商職學生數學學習成就與動機之影響。  
**臺灣數學教育期刊**，2（2），53-83。  
doi: 10.6278/tjme.20151001.003

## 數學臆測探究教學對商職學生數學學習成就與動機之影響

秦爾聰<sup>1</sup> 劉致演<sup>1</sup> 張克旭<sup>2</sup> 段曉林<sup>1</sup>

<sup>1</sup>國立彰化師範大學科學教育研究所

<sup>2</sup>國立臺中高級家事商業職業學校

本研究旨於探討數學臆測探究教學策略對於商職二年級學生數學學習動機及學習成就的影響。研究設計採準實驗研究之不等組前後測設計；資料收集及分析採量為主質為輔的方式進行。兩個案班級各 39 人，隸屬同一任課教師，為中部某公立家商二年級學生。實驗組採臆測探究教學，控制組則維持傳統講述式教學；研究時程共歷經一整個學年。評量學生數學學習動機工具為數學學習動機問卷，檢驗學生學習成效工具為六次段考成績。研究結果發現，臆測探究教學組學生動機提升與傳統教學組學生間存在顯著差異，學習成就雖未存在顯著差異卻呈現穩定成長的態勢。顯示在臆測探究教學環境脈絡下，學生願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、重視數學學習價值，在精熟目標導向引導下期許自己是高自我效能的學習者，進而在學習成就上呈現穩定成長的狀態。

**關鍵詞：**探究教學、數學臆測、學習成就、學習動機

---

通訊作者：劉致演，e-mail：[unique.cs@msa.hinet.net](mailto:unique.cs@msa.hinet.net)

收稿：2015 年 4 月 1 日；

接受刊登：2015 年 10 月 1 日。

Chin, E. T., Liu, C. Y., Chang, K. H., & Tuan, H. L. (2015).

Influences of conjecturing-inquiry teaching on commercial vocational high school students' achievements and motivation towards mathematics Learning

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 2(2), 53-83.

doi: 10.6278/tjme.20151001.003

## **Influences of Conjecturing-Inquiry Teaching on Commercial Vocational High School Students' Achievements and Motivation towards Mathematics Learning**

Erh-Tsung Chin<sup>1</sup>    Chih-Yen Liu<sup>1</sup>    Ke-Hsu Chang<sup>2</sup>    Hsiao-Lin Tuan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education

<sup>2</sup>Taichung Home Economics and Commercial High School

This study aims to investigate the influences of conjecturing-inquiry teaching on commercial vocational high school students' achievements and motivation toward mathematics learning. The quasi-experimental research with nonequivalent pretest-posttest control group design is adopted. There are thirty-nine students of each of the two groups, which are grade ten and taught by the same mathematics teacher from a public vocational high school in the middle of Taiwan. The conjecturing-inquiry teaching has been adopted in the experimental group for a whole academic year, while the traditional expository teaching in the control group. The instrument for examining students' motivation toward mathematics learning is the "Students' Motivation toward Mathematics Learning Questionnaire", and for assessing students' learning achievements the six school sectional examinations. The research results indicate that the students of the experimental group show significantly higher motivation toward mathematics learning than those of the control group. Although there is no significant difference between their learning achievements, the students of the experimental group have made steady progress in the six school sectional examinations during the whole academic year. Therefore, it seems to reveal that, under the conjecturing-inquiry teaching environment, students are more willing to get involved in their learning actively, to try different strategies to solve mathematics problems, to value the importance of mathematics learning, and to consider themselves as a learner of high self-efficacy under the goal of mastery. Besides, they are able to make steady progress in their mathematics learning as well.

**Keywords:** inquiry teaching, mathematical conjecturing, learning achievement, learning motivation

---

Corresponding author : Chih-Yen Liu , e-mail : [unique.cs@msa.hinet.net](mailto:unique.cs@msa.hinet.net)

Received : 1 April 2015;

Accepted : 1 October 2015.

## 壹、緒論

根據教育部統計 100 學年度就讀高中職學生人數共計 768,407 人，其中 47.7% 的學生選擇就讀高職、41.4% 的學生選擇就讀高中，另有 10.9% 的學生就讀綜合高中（教育部，2012），顯示台灣學生在升學的進路選擇上，約有半數選擇職業學校就讀，主要的考量是能同時擁有「學力」及「學歷」。然由於高職教育學科分流過早，課程過於重視職業知識與技能的培養，造成高職學生基礎學科能力培養不足，使得高職學生自我學習的能力薄弱（鄭如雯，2009），此外，高職學生具有中等程度以上的數學學習困擾，個人因素是最主要的困擾原因，考試方面是最主要的困擾表徵，且其數學學習困擾因數學科學期總成績而有差異，並且學習困擾與學習態度呈現負相關（余鴻穎，2006）；事實上，學生在數學學習上的成就表現深刻影響其動機態度的形成，此外，數學學習動機具有早發性、穩定性，並且深受教師的教學及態度所影響（Middleton & Spanias, 1999）。

由於目前普遍的高職數學教學仍以傳統講述的方式進行，雖然表面上是較為有效率的教學方式，但此種教學方式多半仍以教師為中心的學習型態，知識單向傳遞的過程中，學生多半只能達到機械式理解（instrumental understanding）難以達到因果式理解（relational understanding）（Skemp, 1976）。由於“理解”是學習的重要旨趣（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000），因此，如何建置一個幫助學生達成數學理解的環境，則是當前數學教師的關鍵任務。近來興起的「翻轉教室」（flipped classroom）風潮，旨於將學習責任還給學生，教師則應專注於建構主動學習的課室環境。Franke、Kazemi 與 Battey（2007）以整體觀點來看待數學教學，他們認為數學教學旨於建構一個數學學習環境，在此環境中教師應致力於協助學生主動發現數學知識獨有的表徵，能夠激發學生做數學，並且能夠詮釋學生的想法。

「數學探究」即服膺這樣的理念，因為「數學探究」所要強調的就是學習者自發性的「做數學」（doing mathematics），在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並解由反駁加以修正，與他人溝通與論述，將結果加以歸納，最終將解題過程加以一般化（Baroody, 1993; Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 1989, 1991, 2000; National Research Council [NRC], 1989; Peirce, 1955）。事實上，「做數學」即是數學解題（problem solving）（Baroody, 1993; NCTM, 2000），而一般化、特殊化及類比等數學臆測思維數學臆測（conjecturing）是解題中重要脈絡之一（Polya, 1954; Mason, et al., 2010），故數學臆測與探究是一交織的整體（Cañadas, Deulofew, Figuerias, Reid, & Yevdokimov, 2007）。相關研究亦發現數學探究與臆測教學足以提升學生數學學習的理解（Cañadas, et al., 2007; Lin, 2006），同時亦能強化學生的創造力與問題解決能力（Kwon, Park, & Park, 2006）。

研究顯示非數學高成就學生其學習成就與動機呈現顯著相關 (Hannula, 2006; Ma & Xu, 2004), 惟雖有實徵性研究 (紀雅芳、溫燉純, 2008) 以探究教學提升國中生數學學習動機之例證, 然卻未能同時提升學生學習成就。有鑑於此, 本研究擬嘗試於高職的數學課室中, 協助教師以數學臆測探究教學策略進行教學改變, 探討該教學改變對於高職學生數學學習成就與動機之影響。

## 貳、文獻探討

### 一、數學臆測探究教學

數學臆測是數學探究的核心, 兩者在諸多面向上是交織的 (Cañadas et al., 2007), 因此本研究將此兩者從新定義為臆測探究。數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例, 藉由一般化 (generalization), 將錯綜複雜的片段關係, 加以整合成和諧而可理解的整體 (Kent, 1997; Peirce, 1955)。此外, 數學探究活動的核心是針對欲探討現象設置及建立假說或猜想 (Meyer, 2010), 但這些假說與猜想必須經過驗證, 驗證的方法是透過假設—演繹 (hypothetic-deductive) 的系統化過程 (Lakatos, 1976)。簡言之, 數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學」 (doing mathematics), 在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並解由反駁加以修正, 與他人溝通與論述, 將結果加以歸納, 最終將解題過程加以一般化 (Baroody, 1993; Mason et al., 2010; NCTM, 1989, 1991, 2000; NRC, 1989; Peirce, 1955)。

在數學學習的過程中, 做數學即是解題的過程, 然而, 「數學家很少直接解決問題, 通常他們會先將問題特殊化、提出猜想, 然後不斷的修正直到問題能解決」 (Mason et al., 2010, p.141), 而數學臆測即是解題者在一般化與特殊化的上升與下降來回間, 尋找可以否定原先假設的原因並尋找替代的可能性 (Polya, 1954)。此外數學臆測理論基礎借鑒於擬經驗 (quasi-empirical) 主義, 主張數學知識具有動態可駁 (refute) 的特質, 並且數學知識的發現即是數學臆測的歷程, 藉由形成猜想、檢驗猜想、尋找反駁例證, 從定理的證明中發現新的引理或概念等過程 (Davis, Hersh & Marchisotto, 1995; Lakatos, 1976)。

Mason 等人 (2010) 認為數學臆測思維源自於一般化的創造, 並根據 Lakatos (1976) 啟發式數學臆測 (conjecturing) 模式的四個階段定義臆測循環模式: (1) 描述猜想 (conjecture): 在形成的過程中相信它; (2) 驗證猜想: 遍佈所有已知的例證; (3) 反駁猜想: 嘗試用困難的情況或反例來否定原猜想, 並用將之利用於形成新的猜想, 並且能夠被檢驗; (4) 獲得新知: 辯證為何猜想是對的或者如何修改它, 將之應用於新的例子。此外, 一般化及特殊化等數學臆測思維亦為數學解題活動中的重要歷程, 因此從形成猜想直至獲得新知的過程中, 數學探究總伴隨數學臆測思維。綜合前述, 我們得以理解數學臆測與數學探究本質上是交織的。數學探究與臆測

之哲學基礎是建構取向的，主張問題研究應與經驗連 (Dewey, 1938)，並且知識的真實建立於主體際性 (inter-subjectivity)，是由認知主體與重要他人彼此協商並主動建構 (Kilpatrick, 1987)。此外，Richards (1991) 認為「學生不會意外地成為主動的學習者，除非經由計畫性的設計，始能讓學生進行結構性的探索與探究」(p.38)。此計畫性的設置，即數學臆測探究教學的旨趣，本研究將數學臆測探究教學定義為：教師由佈題起始，引導學生在發現數學及建構數學新知的過程中，探索數學想法及其關係，形成猜想、尋找可能的反例進行反駁，藉由一般化、特殊化建立及評估論述以論證猜想或形成一般式，最後教師引導全班討論小組發表結果並加以歸納及精緻化 (Broasi, 1992; Ernest, 1991; Fernandez & Yoshida, 2004; Franke et al., 2007; Jaworski, 1994; Kilpatrick, 1987)。

Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998) 提出具有四個遞迴階段的數學探究教學模式：(1) 設置及聚焦探究 (setting the stage and focusing the inquiry)；(2) 執行探究 (carrying out the inquiry)；(3) 綜合與溝通探究的結果 (synthesizing/communication results from the inquiry)；(4) 回顧與展望 (taking stock and looking ahead)。此數學探究教學模式符應 Dewey (1938) 的主張，即問題研究應與學生的經驗產生連結，在“做中學”的過程中致力於尋找解決問題的策略與方法。此外，“問題”是該探究教學模式的核心，因此教師的首要任務是提供學生歷經模糊、異例及矛盾以至於能夠形成問題、猜想及進一步的探索的經驗，幫助學生在計畫性的設置下，進行結構性的探索與探究並成為主動的學習者。因此本研究採 Siegel 等人所主張的數學探究教階段，作為臆測探究教學的核心架構：(1) 準備與聚焦探究 (setting the stage and focusing the inquiry)：此階段是探究的暖身階段，教師主要工作為介紹活動，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識，並且挑戰學生的原始想法聚焦在值得討論的議題上；(2) 執行探究 (carrying out the inquiry)：在階段 (1) 決定出問題與探究的方向後，教師鼓勵學生開始進行臆測、分析、推理與試驗，並經討論後，獲得初步的結果；(3) 綜合和溝通來自探究的結果 (synthesizing/communication results from the inquiry)：此階段是教師主要工作為：協助學生進行討論，藉由相互辨證、論證的過程，獲致最後結果；學生必須學習如何闡述自己的想法（如運用表格、圖形、證明等）與回應他人的意見；適時引導或幫助學生作結論；(4) 評估與延伸 (taking stock and looking ahead)：教師於此階段聚焦於統整及歸納學生的數學發現，包括引入「如果-不是 (what-if-not)」的提問策略，藉以發現另有且更系統化探究問題的方法。

在臆測探究教學架構中，教師可斟酌學生參與活動的學習目標定義導向、學習活動及假設性學習過程組成假設性學習軌線 (hypothetical learning trajectory [HLT]) (Simon, 1995)，此軌線包含引導學生針對猜想進行檢驗的特殊化布題及引導學生形成一般式猜想的系統性特殊化過程，最後引導學生進行辯證最後歸納學生的數學發現。其中，數學臆測思維主要成分為猜測

(conjecture)、檢驗、反駁、相信、特殊化、一般化等：(1) 猜測：學生能面對問題時，能提出一個合理的敘述，在未經實證之前即為猜測 (Yerushalmy, 1993)；(2) 檢驗：學生能利用自己的先備知識，針對自己或他人的猜測進行辨證；(3) 反駁：指學生反對自己或他人所提出的猜測、證明或論述；(4) 相信：指學生接受自己或他人所提出的猜測、證明或論述；(5) 特殊化：特殊化是將問題轉換成為簡易的範例，尋找在一般情形下具有較特殊性的性質藉以瞭解原問題 (Mason et al., 2010)；一般化：學生有系統地將特殊化後的結果歸納成一般性的規則或樣式 (patterns) (Stacey, 1989)。此外依據數學臆測認知發展類型，又可進一步細分為：(1) 從有限數量下的離散案例中作經驗性的歸納；(2) 從動態案例作經驗性的歸納；(3) 類比；溯因 (abduction)；(5) 基於感知的猜想 (Cañadas et al., 2007)。此五種臆測認知發展類型可進一步作為數學任務與布題情境設計之參考。

## 二、數學學習動機與學習成就

學生的動機為預測學生學習成就的重要組成，跨理論導向的發現學生對於數學成功經驗的覺察，對於其動機的形成有高度的影響 (Middleton & Spanias, 1999; Reynolds & Walberg, 1992)。有鑑於此，美國全國教師協會 (NCTM, 1989) 將「學習重視數學」及「自信於自己的數學能力」此兩動機領域作為學生最重要的數學學習目標。簡言之，動機是個體在特定情境裡具有特定表現的原因，並足以決定個體是否參與給定的情境 (Ames, 1992)。同時另有研究指出，學生學習成就得以促進學習態度及動機之形成 (Cheung, 1988; Köller, Baumert, & Schnabel, 2001)，並且學生做數學 (doing mathematics) 的品質攸關於其數學學習動機，更足以預測學習能力水平 (Schiefele & Csikszentmihalyi, 1995)。追根究底，學生對於數學的學習態度及投入學習的時間是影響其學習成就的主要因素 (Singh, Granville, & Dika, 2002)。至於學習動機，學術上將動機區分為兩種相關的類型：內在動機及外在動機 (Ryan & Deci, 2000)。內在動機是驅使或致使學生參與學習是「為了自己」，持有內在動機的學生享受學習所帶來的喜悅，也同時欣然接受任務所帶來的挑戰，亦是激勵個體學習及獲致更佳表現的動力 (Lepper, 1988; Middleton, 1995)，他們的學習動機傾向聚焦於學習目標，如數學概念的理解或程序的精熟 (Dweck, 1986)。持有外在學習動機的學生，參與學習任務主要是為了獲得報償或避免懲罰，此類學生的學習動機是以表現目標為中心 (Ames, 1992; Dweck, 1986)。在內在動機及外在動機的兩個極端間似乎存在更多變項足以影響學生的學習成就 (Lin, McKeachie & Kim, 2001)；針對學習與動機的實徵性研究結果顯示 (Brophy, 1998; Pintrich & Schunk, 2002)，自我效能、個人的任務目標、任務價值及學習環境等是支配學生學習動機的重要組成。自我效能是學生對其完成任務能力的覺察 (Bandura, 1997)，當學生持有高自我效能時，不論任務困難與否，他們相信自己有能力完成任務。動機在學習的認知基礎上，是以目標導向來區分學習者的動機類型，其中尤以精熟目標 (mastery goal)

(Duda & Nicholls, 1992) 最為重要，當學習者持有精熟目標時，會重視特定領域知識及技能的提升，相信成功仰賴於努力，嘗試以理解的方式學習並與他人合作。

相較於傳統數學課室，探究取向教學的數學課室更能培養學生的精熟目標導向，在此課室裡的學生傾向於相信成功的定義是對於數學的理解並能夠向他人解釋自己的想法；如此的態度有助於提升學生在面對非例行性的任務的概念理解及表現，並在缺乏指引的情況下能堅持完成任務 (Cobb et al., 1991; Cobb, Wood, Yackel, & Perlwitz, 1992)。學生的對於數學成功經驗的覺察，適切影響其動機態度的形成 (Middleton & Spanias, 1999)，並且，學生的學習目標是激勵學生根據其學習價值及學習策略進行建構知識的主要原因 (Duda & Nicholls, 1992; Morrone, Harkness, D'Ambrosio, & Caulfield, 2004)，特別是學生的數學精熟目標，有助於數學高階思考的發展 (Morrone et al., 2004)，數學臆測探究即屬於高階思考的類型之一。至於學習環境，學習環境包含教師的教學策略、課室活動、師生互動等皆足以影響個體的學習動機 (Brophy, 1998; Pintrich & Schunk, 2002)，數學教學的實徵研究亦實證了這樣的論點 (王雅玲、秦爾聰，2008；紀雅芳、溫嫩純，2008)，並且，建構取向的數學課室環境更有助於學生的數學理解 (Pirie & Kieren, 1992)。

Tuan、Chin 與 Shieh (2005) 以 Brophy (1998) 和 Pintrich 與 Schunk (2002) 的研究為基礎並整合建構主義、動機理論，藉由發展科學學習動機 (Students' Motivation towards Science Learning, SMTSL) 問卷的過程，在因素負荷、問卷內部一致性、皮爾森相關等統計分析結果中，確認學生之科學學習動機是由自我效能 (self-efficacy)、主動學習策略 (active learning strategies)、科學學習價值 (science learning value)、表現目標 (performance goal)、成就目標 (achievement goal) 及學習環境刺激 (learning environment stimulation) 等六個向度所組成，其中：(一) 自我效能：是指學生相信自己有能力能夠在科學學習任務中表現良好；(二) 主動學習策略：是指學生根據先前的理解主動透過不同的策略建構新知；(三) 科學學習價值：是足以令學生獲得解題能力、經驗探究活動、刺激學生思考及發現日常生活中的科學關係的價值觀；(四) 表現目標：學生的科學表現目標是與其他同學競爭並希望獲得老師的關注；(五) 成就目標：學生在科學學習期間對於其能力及成就之提昇感到滿足；(六) 學習環境刺激：包含課程、教師教學及同儕互動等足以影響學生科學學習動機之環境組成。透過此問卷的六個向度，我們可以出理解學生的學習動機的組成，並且可以在各個向度上檢驗學生學習動機的變化。

## 參、研究方法

### 一、研究設計

本研究採準實驗研究之不等組前後測設計，量化為主、質化為輔，以臆測探究教學策略為自變項，學生學習動機與成就為依變項，探討臆測探究教學策略對於學生學習成就及學習動機之影響。實驗組採以學生為學習中心之數學臆測探究教策略，對照組則以學生往常所習慣的以教師為中心、知識傳遞為目的之傳統講述方式進行教學，即教師在台上講述觀念或解題技巧，學生則在台下聽講。本研究時程為期一學年，研究計畫執行期間配合學校課程，研究者與教學者共同設計並施行九個臆測探究教學教案。另本研究藉由「多元資料來源」和「多位分析參與者」進行資料分析之三角校正；多元資料來源指的是前述之量化及質性資料；多位分析者參與則是由三位研究人員針對多元資料所做的現象觀察進行討論磋商，直到形成共識後才作成研究結論。

### 二、研究參與者

#### (一) 教學者

本研究實施探究教學教師為師範體系的數學系本科畢業，已有八年的教學資歷，過去一直以傳統講述的方式授課。因為進修的關係，加入了一個由在職與職前數學教師所組成的教師專業成長團體而接觸到數學臆測探究教學，再加上服務學校鼓勵教師採取創新教學與多元評量，因此激勵了該教師從事教學改變。

#### (二) 個案班級

研究對象採用方便取樣的方式選取，臆測探究教學組與對照組為作者之一所任教中部地區某公立家商二年級學生，兩班各有 39 位女同學。兩班科別不同但同屬商業類科，學習本質相仿，惟傳統教學組班級入學成績略高於臆測探究教學組。研究對象中為了解學生動機變化的實際情形，依實驗組班學生數學學習動機問卷前測的施測結果配合研究者觀察，以動機量表總分前 25% 選出 2 人為高學習動機個案學生，而動機量表總分後 25% 選出 2 人為低學習動機個案學生，另外 50% 的學生中選取 2 人做為中動機個案學生，在編組時將此 6 人編在同一組中，以便研究者方便及深入觀察學習動機之改變情形，至於小組討論則採異質性分組，依照上學期數學成績將全班分高、中、低三群，並從每一群中抽出 2 至 3 位學生組成小組，總計分為 6 組、每組 6 至 7 人。

### (三) 研究者

研究者與教學者同屬同一教師專業成長團體，除提供教學者探究教學理論與實務上的建議外，並協助教學活動設計、研究工具之效化、資料蒐集與分析及撰寫研究報告。

## 三、研究工具

### (一) 臆測探究教學活動設計

本研究以 Siegel 等人 (1998) 四階段數學探究教學融入數學臆測思維做為數學臆測探究教學策略。研究者與教學者依照課本之教學目標、教學理念、學生特質，以臆測探究教學策略做為活動設計主要架構，在每次活動設計完成後，研究者與教學者會於專業成長團體中提出並進行討論，修正教學活動設計，並於每一單元課程教學實施後，研究者與教學者會再次於專業成長團體中共同進行檢討與修正，作為下一個單元活動設計參考。研究者與教學者設計教案原則為配合學校課程內容，並參考數學臆測認知發展脈絡的五種類型 (Cañadas et al., 2007) 進行數學臆測探究學習活動教案設計，研究計畫施行期間，研究者與教學者根據教材單元的類型與難易度，以及教材前後相關性或連貫性，設計出符合學生發展臆測認知類型的活動，如「數列級數」、「排列與組合」、「機率與期望值」等單元內容希望學生藉由特殊化、有系統的特殊化進而推論一般式，發現數列樣式，因此類屬第一類型的數學臆測認知發展脈絡，即透過對有限數量下的離散案例覺察一致性的樣式 (pattern)，此類臆測通常發生於與數字有關的問題，在某些情況下，一旦一般性規則被發現時，通常能藉由數學歸納法來證明猜想，在本研究中研究者與教學者為此類型活動共設計了蜜蜂的族譜 (數列級數)、青蛙黑白跳 (數列級數—數列一般式)、羅馬競技場 (數列級數—等差數列)、遺失的項鍊 (數列級數—等差數列)、小丸子遊高雄 (不盡相異物排列)、華山論劍 (不重複組合、重覆組合、重覆排列)、新年發發發 (機率、期望值) 等共七個教案。另外，在「相異物直線排列」單元，研究者與教學者以詞句從新排列的方式如「什麼都不能跟人家比誰像你一樣沒有用啊」、「沒有誰能像你一樣啊不用什麼都跟人家比」作為臆測探究數學任務的類比。此外，在「二項式定理」單元，研究者與教學者為協助學生透過巴斯三角形的探索瞭解二項式定理的由來，設計了「巴斯卡的秘密」活動，希望學生根據觀察到的事實追溯事實發生的原因 (Meyer, 2010)，此一活動屬於臆測發展認知歷程的中的溯因 (abduction) 類型，即根據已知的事實推論現象背後所蘊含的數學原理 (Peirce, 1955)。茲以本研究中「小丸子遊高雄」為例說明本研究數學臆測探究教學進行方式：

#### 1. 準備與聚焦探究

在此階段以引起學生學習動機為主，在學習單一開始給予與學生生活相關之問題情境，提昇學生參與感，如：「擁有現代大都市樣貌的高雄市，以東帝士八五大樓、夢時代購物中心的高

雄之眼摩天輪、高雄小巨蛋為都會風格代表地標；自然景觀方面，擁有柴山、愛河、旗津、西子灣、蓮池潭…等景點，高雄不僅天然地理條件優越，且因受海洋氣候調節，全年陽光普照、氣候宜人，再加上近幾年產業急速發展、經濟繁榮，舉辦世界性競賽活動受全球矚目，逐漸展露出國際大都會之氣勢與格局。」

## 2. 執行探究

本活動希望讓學生學習不盡相異物排列的概念並與學生日常生活連結，因此以高雄市的棋盤式道路做為題目設計基礎，並在起始問題中引出學生的「加法概念」的舊經驗，如：「小丸子嚮往探訪高雄市很久了，因此利用暑假搭飛機抵達小港機場，展開夢寐以求的高雄旅遊，若小丸子欲抵達風光明媚的蓮池潭賞景，但又不想多繞遠路，試問有幾種走法呢？（參考圖 1）」。

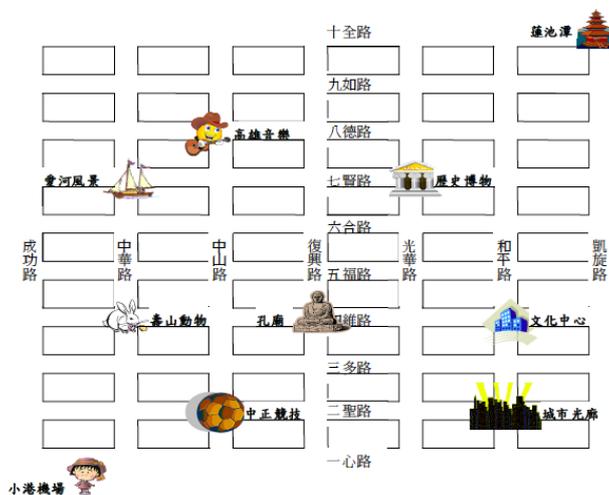


圖 1 小丸子遊高雄之探索地圖

為協助學生起始探索問題，教師將問題加以特殊化如：「若小丸子想先抵達中正競技場，一樣不想繞遠路，試問小丸子有幾種走法呢？又若小丸子想先抵達壽山動物園，一樣不想繞遠路，試問小丸子又有幾種走法呢？」。此時，學生透過特殊化例證，進行猜測、檢驗、反駁與相信的數學臆測思維歷程，並為形成一般化推論做暖身，為協助學生形成一般式的猜想，教師進行建設性的提問，如：「你現在可以知道小丸子到蓮池潭有幾種走法了嗎？」當學生有了初步的一般化推論的結果，則再透過特殊化的檢驗過程，來驗證是否存在反例來反駁其猜測，如：「根據你的猜測，若小丸子抵達孔廟，一樣不想繞遠路，試檢驗答案是否正確？」當學生有了個人的一般化臆測結果，教師則引導學生綜合和溝通來自探究的結果。

## 3. 綜合和溝通來自探究的結果

「小組討論及檢驗」即進此階段，透過如「和其他成員比較，你的答案有幾種？大家的答

案一樣嗎？」的問題，學生能在討論前先紀錄與比對小組間的答案，透過小組溝通與論述，再重新檢驗個人初步猜測的合理性，教師則歸納整合小組發表的結果並加以精緻化做為後續全班溝通討論的內容。如提問學生：「如果讓你重新再猜一次，你的答案會不會改變？改變的理由是？」，藉由小組討論後的結果，根據結果決定是否，重新修正自己的猜測，主要目的是記錄個人及小組數學概念的理解情形。研究者期待在這問題後，不管個人或是小組，在經過猜測、個人及小組檢驗、局部修正或全局反駁後，能夠暫時的針對任務有共同的答案，進行全班的溝通分享，透過各小組的發表討論及辯證，為學生進行評估階段做暖身。如提問學生：「看看其他組的想法！（可自行切割以記錄多組答案），你覺得你贊同他們的看法嗎？」而後針對小組報告之後的結果，再度進行臆測歷程的相信、修正或反駁階段，將之前所做的一般化猜想進行確認，並寫出確認的原因或理由，以便讓猜測獲得更精煉的過程。在此階段教師須營造一個能使學生討論及相互合作的學習環境，透過彼此分享，尊重他人想法並給予回饋，以建構個人的理解。

#### 4. 延伸與評估

此階段延伸的目的旨於幫助學生將前述一般化後的數學結論應用在類似的數學情境中，讓學生能夠將其所習得的新概念加以整理並延伸發展。由於一般化、特殊化和類比往往偕同解決數學問題 (Polya, 1954)，一般化是從對象的一個給定集合進而考慮到包含這個給定集合的更大集合，特殊化是從對向的一個給定集合，轉而考慮那包含在這集合內的較小集合，而類比是某種類型的相似性，是一種夠確定的和更概念的相似，此外 Polya (1954) 強調透過類比的臆測在數學學習中的價值，誠如數學家使用類比用於發現新概念或是解題方法，Lakatos (1976) 認為藉由類比所進行的臆測有助於數學探究 (mathematical discovery)。因此在本階段中，教師的教學任務旨於協助學生將先前階段中所產生的數學發現即結論透過類比的方式應用於新的數學情境中，如提問學生：「小丸子出發前不幸怕瑪颱風來襲，突然的降雨導致某些區域淹大水無法通過(如圖 1 壽山動物園至歷史博物館對角線所成的矩形面積)，請問小丸子有幾種走法(注意：一樣走最近的路喔)」，透過類比的問題幫助學生藉由演繹推理精緻化前面所建構的數學知識，或透過統整及調適建構新的心智基模。

此階段中評估的任務主要協助學生評估他們對知識的理解程度，讓學生能夠注意到其想法的改變以及其學習歷程，並能反思其想法改變的程度，教師的任務旨於協助學生回顧整個臆測探究教學過程，針對學生有問題的地方做概念澄清，引導學生反思整個活動歷程，並針對學生的回饋進行教學策略的改進依據。如本活動提出兩個數學問題協助學生檢驗其學習成效：「如圖 2 (左)，從 A 走至 B 採捷徑走法，共有幾種方法？」、「如圖 2 (右)，自 A 走到 B 繞過障礙物採捷徑走法，方法共有幾種？」

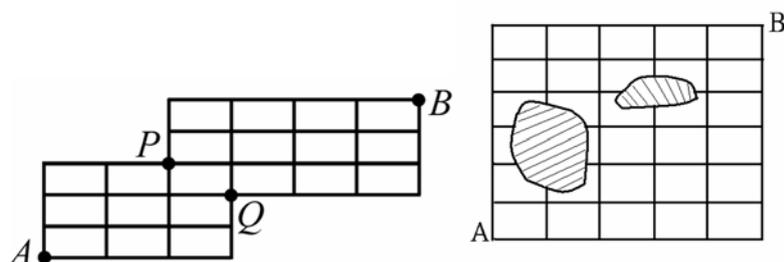


圖 2 小丸子遊高雄之延伸問題

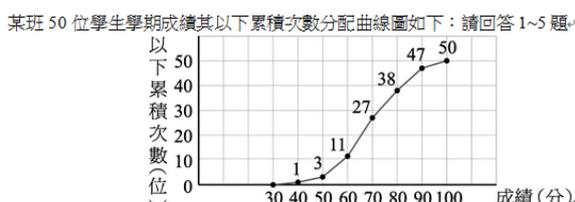
### (二) 數學學習動機量表

本研究採用修改並效化過之科學學習動機問卷 (Tuan et al., 2005)，用以量度學生數學學習動機變化。此量表根據 Brophy (1998) 和 Pintrich 與 Schunk (2002) 的學習與動機實徵性研究結果，進一步確立科學學習動機之六個子向度：(1) 自我效能：是指學生相信自己有能力能夠在科學學習任務中表現良好；(2) 主動學習策略：是指學生根據先前的理解主動透過不同的策略建構新知；(3) 科學學習價值：是足以令學生獲得解題能力、經驗探究活動、刺激學生思考及發現日常生活中的科學關係的價值觀；(4) 表現目標：學生的科學表現目標是與其他同學競爭並希望獲得老師的關注；(5) 成就目標：學生在科學學習期間對於其能力及成就之提昇感到滿足；(6) 學習環境刺激：包含課程、教師教學及同儕互動等足以影響學生科學學習動機之環境組成。該量表採李克特五等尺度，計分方式為非常同意 5 分，同意 4 分，沒意見 3 分，不同意 2 分，非常不同意 1 分，共有自我效能、主動學習策略、科學學習價值、表現目標、成就目標與學習環境刺激等六個子量表；其中第 2、4、5、6、7、21、22、23 與 24 題為負向題。考量商職學校學生之動機屬性，並確認該動機量表用於檢驗學生數學動機之信度，本研究將該試卷各問題中之科學學科改成數學，經由專家效度的檢驗後，委請授課教師班級以外之高一 10 個班級、高二 12 個班級及高三 7 個班級，共 29 個班級 1099 位學生協助問卷施測，施測結果共回收 1082 份有效問卷，以 SPSS 17.0 統計軟體進行信度考驗分析，結果顯示數學動機學習量表總 Cronbach's  $\alpha$  係數為 .74，六個子量表各 Cronbach's  $\alpha$  係數分別為自我效能 (self-efficacy) .72、主動學習策略 (active learning strategies) .71、數學學習價值 (mathematics learning value) .72、表現目標 (performance goal) .77、成就目標 (achievement goal) .74、學習環境刺激 (learning environment stimulation) .73，顯示該問卷具有良好的信度係數。

### (三) 學習成就評量

由於評量的目的是為協助學生了解對於學習的理解以及維繫學習運行 (keeping learning on track) (William, 2007)，並且本研究所設計之臆測探究教學活動皆以課本內容為主，此外，由於職業科類別學生對於學科的學習強調應用，因此學習成就測驗目標主要聚焦於了解學生對於課

本內容是否達到概念理解( conceptual understanding)與程序流暢( procedural fluency)(NRC, 2001), 因而試題內容設計聚焦於學生對於數學定義、定理的理解與應用(參考圖 3 段考試題示例)。有鑑於此, 本研究採用段考試題作為評量學生學習成就工具, 藉以觀察數學臆測探究教學策略介入對學生學習成就的影響。



- (D) 1. 該班學生學期成績的全距為 (A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 分。
- (C) 2. 試問該班學生學期成績低於 60 分的有幾人? (A) 3 (B) 8 (C) 11 (D) 16 人。
- (A) 3. 試問該班學生學期成績介於 60~80 分之間的有幾人? (A) 27 (B) 38 (C) 16 (D) 11 人。
- (D) 4. 該班學生學期成績的算術平均數為 (A) 69.3 (B) 69.4 (C) 69.5 (D) 69.6 分。
- (C) 5. 已知蕃薯考 80 分, 則他在班上的百分等級 PR 值=(A) 38 (B) 64 (C) 76 (D) 80。

圖 3 段考試題示例

#### 四、研究工具

本研究資料蒐集共計有：(1) 數學學習動機問卷：問卷實際施測時, 共計針對實驗及對照組施測三次, 在學生剛升上高二一個月時進行前測, 於實施臆測探究教學二個月後進行中測, 並於教學實驗結束後進行後測。(2) 段考成績：為貼近觀察數學臆測探究教學對實驗組學生學習成就影響, 本研究收集數學臆測探究教學組及傳統教學組全學年度上、下學期共六次段考成績, 並輔以晤談以協助分析。(3) 晤談紀錄：在每個單元結束後針對 6 名個案研究對象進行晤談, 並對對照組學生做不定期晤談, 內容包括特殊的臆測解題思維模式及對教學活動的感受, 並以錄音及錄影的方式進行紀錄後加以轉錄文本並編碼分類。(4) 教師反思日誌：教師在每次課後詳細記錄教學情形及學生的學習行為, 作為往後教學改進之用。(5) 學生學習日誌：學生針對所進行之探究活動所作的回饋與反思。

#### 五、資料分析

##### (一) 量化資料分析

##### 1. 數學學習動機問卷

在分析前將負向題分數進行轉換, 非常同意改為 1 分, 同意改為 2 分, 不同意改為 4 分, 非常不同意改為 5 分, 表現目標的分數經轉換後分數則代表非表現目標( non-performance goal)。分析時以 SPSS 17.0 統計分析軟體進行臆測探究教學組與對照組之前、中、後測敘述性統計分析

及以前測數據做為共變項，進行中、前測與前、後測單因子共變數分析 (ANCOVA)、重複量數分析與 Scheffe 法，呈現各向度分數之平均值變化量以及相關性分析。

## 2. 學習成就評量

本研究將整學年六次段考依數學學習動機問卷施測日程，將第一次段考作為段考成績分析前測，第二、三次段考成績平均數作為段考中測成績，第四、五、六次段考成績平均數作為段考後測成績。前測部分以獨立樣本  $t$  檢定，分析兩組學生在段考成績前測上是否存在顯著差異，中測及後測部分則以前測作為共變量進行變異數分析，以分析兩組學生在段考成績中、後測上是否存在統計分析上之顯著差異。另為了解兩組學生段考成績集中趨勢量數之變化，考量每次段考難易度的差異，六次段考的成績均換算為 T 分數後再進行分析。

### (二) 質化資料分析

本研究所收集之質性資料用於提供臆測探究教學如何影響學生學習動機的證據，質性資料分析架構主要參考 Strauss 與 Corbin (1990) 依現象觀察結果加以有系統性的歸納。首先，我們將訪談轉成逐字稿，並與其他質性資料進行統整，針對研究對象之高動機、中動機、低動機個案學生的學習表現作細部探討，將不同的資料進行個別檢視和綜合比較，並與動機量表施測的結果做交叉分析，以歸納分析出支持研究對象在動機量表六個向度中表現的質性證據。

## 肆、研究發現

### 一、學生學習動機變化情形

#### (一) 數學學習動機量表前測、前中測、前後測差異分析

本研究之臆測探究教學組及對照組兩個研究個案班級，高一期間數學科教師皆隸屬同一位屆退老師，在該位教師退休後由本研究之教學者接替教學，臆測探究教學組探究教學實施約兩學期，期間傳統教學組仍維持傳統講述教學策略。為了解兩組個案學生之數學學習動機變化，本研究針對學習動機問卷量表之前、中、後測之六個向度進行分析探討。表 1 為臆測探究教學組與傳統教學組前、中、後測學習動機各向度描述統計結果。根據數學學習動機問卷前測獨立樣本  $t$  檢定分析結果，發現臆測探究教學組與傳統教學組在前測中自我效能、主動學習策略、數學學習價值、非表現目標、成就目標、學習環境刺激及總分各向度 T 值分別為-.99、-.67、-.89、-.64、.34、.52、-.23， $p$  值分別為.33、.51、.38、.52、.74、.60、.82，顯示兩組在數學學習動機問卷各向度間不存在顯著差異，但在自我效能、主動學習策略、非表現目標及總分等，臆測探究教學組的得分低於傳統教學組。

表1

臆測探究教學組與傳統教學組數學學習動機前、中、後測平均數及標準差

| 向度     | 臆測探究 (N = 39) |       |        |      |        |      | 傳統教學 (N = 39) |       |        |       |        |       |
|--------|---------------|-------|--------|------|--------|------|---------------|-------|--------|-------|--------|-------|
|        | 前測            |       | 中測     |      | 後測     |      | 前測            |       | 中測     |       | 後測     |       |
|        | M             | SD    | M      | SD   | M      | SD   | M             | SD    | M      | SD    | M      | SD    |
| 自我效能   | 22.23         | 4.19  | 23.56  | 4.13 | 24.36  | 2.80 | 23.23         | 4.72  | 22.64  | 4.63  | 23.15  | 3.82  |
| 主動學習策略 | 29.79         | 3.08  | 31.59  | 2.71 | 31.87  | 2.30 | 30.31         | 3.66  | 30.59  | 2.94  | 30.51  | 3.68  |
| 數學學習價值 | 17.69         | 3.11  | 18.21  | 2.47 | 19.26  | 2.10 | 17.05         | 3.24  | 17.08  | 2.99  | 17.08  | 2.86  |
| 非表現目標  | 14.64         | 2.47  | 14.08  | 2.60 | 14.64  | 2.42 | 15.03         | 2.80  | 14.72  | 2.66  | 14.85  | 2.93  |
| 成就目標   | 19.74         | 2.70  | 20.9   | 2.25 | 21.18  | 2.26 | 19.54/        | 2.63  | 20.36  | 2.25  | 20.00  | 2.82  |
| 學習環境刺激 | 18.95         | 3.43  | 22.33  | 2.87 | 22.74  | 3.04 | 18.54         | 3.50  | 19.46  | 3.07  | 20.33  | 2.78  |
| 總分     | 123.05        | 10.71 | 130.67 | 9.85 | 134.05 | 8.16 | 123.69        | 14.23 | 124.85 | 11.16 | 125.92 | 11.97 |

另以動機前測為共變量（排除動機前測差異），分析兩組動機中測各向度及總分之共變數分析結果顯示，臆測探究教學組在自我效能 ( $F(1,75) = 9.24, p < .01$ )、主動學習策略 ( $F(1,75) = 5.75, p < .05$ )、學習環境誘因 ( $F(1,75) = 19.77, p < .001$ ) 及總分 ( $F(1,75) = 13.01, p < .001$ ) 上明顯優於傳統教學組，並且存在顯著差異，但數學學習價值 ( $F(1,75) = 2.74, p = .102$ )、非表現目標 ( $F(1,75) = .75, p = .391$ )、成就目標 ( $F(1,75) = 1.26, p = .266$ ) 等向度上則未有顯著差異。另根據後測共變數分析結果顯示，臆測探究教學組在自我效能 ( $F(1,75) = 8.01, p < .01$ )、主動學習策略 ( $F(1,75) = 5.61, p < .05$ )、數學學習價值 ( $F(1,75) = 17.97, p < .001$ )、成就目標 ( $F(1,75) = 5.37, p < .05$ )、學習環境誘因 ( $F(1,75) = 12.97, p < .01$ ) 及總分 ( $F(1,75) = 19.14, p < .001$ ) 與傳統教學組間存在顯著差異，但在非表現目標 ( $F(1,75) = .00, p = .992$ ) 上則未具有顯著差異。

## (二) 數學學習動機量表各向度之差異分析

### 1. 自我效能

根據統計分析結果，兩組學生在自我效能向度上，中測及後測均達到顯著差異，且傳統教學組的中測與後測分數均低於前測，顯示臆測探究教學組的教學策略介入對於學生自我效能的提升有別於傳統教學組。經質性資料分析後，發現可能的因素是學生在合作學習的脈絡中提升了自我效能，臆測探究教學活動建構在合作學習的脈絡上，學生在解題、討論、發表與論述中發展數學概念的理解，並在理解中提升數學學習的自信、降低對於數學任務困難的預期（可能反映在問卷自我效能向度上之「不論數學內容簡單或困難，我都有把握能學會」、「我有信心在數學的考試中取得好的成績」）。

R : 你覺得跟一年級相比,你學習數學的信心有變化嗎?

S13 : 比較有信心,這樣一起討論的上課方式我很喜歡。

R : 為什麼這樣的方式你會喜歡?

S13 : 除了最直接的對數學添加了更多的樂趣,提升大家的學習動機外,還有同儕間互相激勵、互相合作。

R : 所以你也變得有信心了?

S13 : 有!因為這樣,會讓我更懂得運用邏輯思考,遇到題目也不會畏懼退縮,會想要把它解出來。

(晤談 990329-S13)

## 2. 主動學習策略

臆測探究教學組學生在主動學習策略向度的中測及後測皆上升,綜合資料分析結果發現,學生主動學習策略提升的可能原因如下:

### (1) 主動解決問題

傳統教學方式(展示及講述)下,學生為學習活動中心,學生被動接收知識,缺乏主動探索的能力,而在臆測探究活動中學生經驗數學知識再發現歷程,開始主動解決問題。此點可能反映在問卷中「8.我在學習數學新知識時,會企圖理解它」。

R : 你現在的學習方式如何?

S15 : 先自己思考,盡力去猜、去嘗試,如果真的不行再跟同學們討論,還是不行就再問老師。

R : 跟以前有什麼改變?

S15 : 以前不會這樣想,現在一方面是想讓自己的數學有所進步,另一方面則是因為對數學開始產生興趣,願意主動去碰、去想、去解決問題。

(晤談 981130-S15)

4. 你通常如何解決老師給的數學挑戰問題呢?你能說說是什麼因素讓你願意主動學習數學嗎?〈是有趣 or 或數學有挑戰性 or 或覺得學數學有用,對自己生活上有幫助呢 or 其他方面...〉

① 看看過去是不是有類似的數學問題,可以看看那類型的解法再思考  
我是真的想破頭還想不出來,就可問問學的好同學或老師

(學習日誌 990115-S02)

## (2) 嘗試不同學習策略

教學者以往採取傳統教學時，面對學生不會的問題就重複講解。現在透過臆測探究教學活動，除了提供學生主動學習的機會之外，也會在探究活動的過程中不斷地引導學生，讓學生嘗試運用不同的學習策略。個案 S13 是被動學習的學生，以往遇到不會的問題就是放棄，然而慢慢有了轉變。此點可能反映在問卷中「11.當有一些數學觀念不懂時，我會找人（老師或同學）討論來幫助理解」

R：你現在遇到不會的問題會怎麼辦？

S13：我會翻講義，看有沒有類似的問題，或是翻考卷，再找不到我會問同學或是問老師。

R：跟以前有不一樣嗎？

S13：以前我大概都直接跳過。

(晤談 980330-S13)

另外學生會在解題論證的過程中，討論不同解題策略的成效，藉由思考實驗來實證特殊化策略的可行性，並驗證原先的猜想。

S13：如果這邊積水不能過，那就用加（指加法原理）的就好了啊！

S20：可是馬路太多條了啦！用加的加不完，會有問題...

S15：還是用反面作法吧。

S13：什麼意思？

S15：嗯...就全部扣掉通過這點，再扣掉通過這點的就好。

S20：那是不是要加回通過這兩點的。

S15：嗯...應該是吧！

S13：這樣太麻煩了吧！還是用加的比較快。

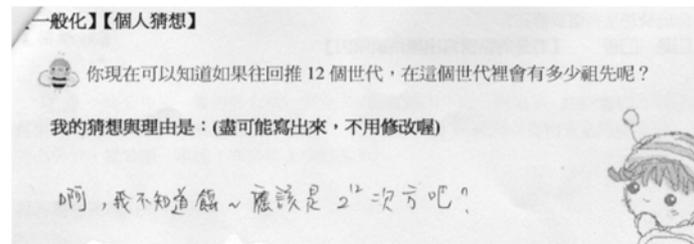
S20：可是用加的反面比較慢吧！

(課室錄影 990114)

## (3) 反駁與檢驗

驗證臆測與反駁猜想是數學臆測思維的主要歷程 Lakatos (1976)；教學者在引導學生時，常會問「針對同學的報告，有沒有人要提出質疑？」、「那你的理由是什麼？」，如此能幫助學生

主動思考、驗證自己或他人的想法後提出反駁，並在社會脈絡下建構客觀新知 (Ernest, 1991)。此點可能反映在動機問卷中「13.當我寫錯數學答案時，我會努力了解寫錯的原因，我會努力了解寫錯的原因」以及「14.當數學課中所學的觀念與我以前所了解的觀念有差別時，我會試著弄懂兩者間的差異」。



(學習單 981023-S13)

如進行直線排列單元時，學生在挑戰問題「濕婆神的第一隻手不能夠拿弓，第二隻手不能拿繩子，第三隻手不能拿盾牌」有幾種方法時，學生會透過舉反例的方式來檢驗猜想，並進一步提出反駁猜想的依據。

S20：這題應該也是用反面作法，所以等於全部扣掉第一隻手拿弓、扣掉第二隻手拿繩子、扣掉第三隻手拿盾牌，再加回第一隻手拿弓、扣掉第二隻手拿繩子、扣掉第三隻手的方法數，所以是  $10! - 9! - 9! - 9! + 7!$ 。

T：你們覺得 S20 的答案是正確的嗎？若是的話為什麼？若不是可不可以舉個反例。

S5：怎麼舉反例？

T：不在 S20 計算的範圍內，但是又不符合題意。

S13：第一隻手拿弓、第二隻手拿繩子、第三隻手拿鼓，在第一隻手拿弓扣掉一次，第二隻手拿繩子也扣掉一次，但是並沒有加回來。S15：嗯！我覺得這樣的反例很多，她的算式應該不對。

(課室錄影 990105)

### 3. 數學學習價值

根據統計分析結果，臆測探究教學組在中測及後測皆呈現穩定成長的態勢，而傳統教學組則持平，傳統講述的教學方式使得學生對於「生活中可用到」、「可刺激思考」、「學習解決問題的方法」、「參與數學探究」、「滿足對自然的好奇心」等問題無法產生數學價值的認同感，反而

學置身於數學臆測探究教學脈絡中，在這幾個問題表現上都呈現穩定上升的情形，特別是「16.我認為學數學很重要，因為在日常生活中可以用得到」、「19.我認為數學領域中參與數學探究活動是很重要的」，可以推論數學臆測探究教學策略可以提升學生對於數學價值的認同。綜合分析結果發現，學生「數學學習價值」提升的可能原因有：

#### (1) 教學活動與學生生活經驗連結

透過將數學與生活連結的數學臆測探究活動，學生能將數學概念與連結生活經驗連結，此點符應「做中學」的理念，即問題研究應與學生的經驗產生連結 (Dewey, 1938)。

R：你在日常生活中有沒有用到課堂上所學到的數學知識？

S05：有啊，像是費波那契數列；還有期望值，我以後一定不會去賭博。

(晤談 0423-S05)

問題：與以前上課比較，本單元有什麼不一樣？

答：讓期望值活起來了，不再是背公式而已，藉由賭博、樂透等生活化的活動，使我們能加深對機率與期望值的印象。

(學習日誌 0421-S18)

#### (2) 主動思考

學生在解決數學問題時，會由尋求單一解法逐漸轉變為多元性的探索，如會提出「還可以怎樣想？」這類的問題，因此學生能意識到一個數學問題並不一定只有一種解法，甚至會與舊經驗產生連結，主動思考解題的各種可能。此點展現了學生內在動機提升的可能 (Middleton, 1995)，因學生在數學臆測探究教學脈絡下，透過與生活經驗的連結，已培養出對於數學價值的正面理及主動思考的心智習性。

今天在講重複組合單元時，提到了至少得一件東西的做法要採取正面做法，沒想到學生會拿來跟重複排列時做比較，主動詢問兩者的差異，這是教學多年來不曾有人主動詢問的問題，以往教學時學生只會將做法記憶起來，不會去想到跟先前經驗有沒有衝突的問題，因此感受到學生主動思考能力增加了，推理能力也變好了，好奇心也增加了。

(教師反思日誌 0310)

T : 你對於這次的活動有何感想?

S20 : 比較難!一開始都想不出來,超沒信心的,本來有的信心都不見了。

T : 應該是任務比較難,你看不是很多組都想不出來嗎?

S20 : 不過我知道答案後覺得還好啊!我應該可以想得出來的。

T : 沒有人是每次都想得出來的啊!

S20 : 我知道,可是我就是想把它想出來,沒想出來我就超嘔的。

(晤談 990316-S20)

#### 4. 非表現目標

相較於前測,傳統教學組學生在中測及後測的表現持平,臆測探究教學組的學生則是呈現先下降後回升的 U 型反折,兩組在以前測為共變量的共變數分析結果中皆未有顯著差異。教學者在臆測探究教學策略施行初期,為期許學生能夠漸次將外在動機轉化為內在動機,參酌多位教師的教學實務經驗,採取「獎勵」、「加分策略」及「小組競賽積分」等策略,使學生感覺有別於傳統講述課室的低迷氛圍,進而激勵學生參與數學活動。然而此外在動機的誘因介入,使得學生在中測時非表現目標的表現反而下降了,但反而促使學生開始思考活動的本質與目的。從晤談中可以發現中成就低動機的學生 S13 仍置身於考試與成績表現的制約中,外在動激勵策略對該學生而言是有效的,但他也開始思考挑戰所賦予活動的數學價值。

R : 你認為為什麼要學習數學呢?

S13 : 我的話是為了得到好成績!

R : 那如果不考試了呢?

S13 : 那可能會不太想學了吧!

R : 是喔!你覺得現在的上課方式如何?

S13 : 還不錯,不會死板板的。

R : 加分會影響你的學習意願嗎!

S13 : 會啊。

R : 還有沒有什麼會影響你的學習意願?

S13 : 能夠激盪腦力的題目也不錯,我會想挑戰它。

(晤談 981019-S13)

雖然整體而言兩組學生在非表現目標這個向度上並無顯著差異，然臆測探究教學組學生的外在動機顯然有別於傳統教學組，因著外在動機的驅使，加上教學者在中測後逐漸退去激勵措施，仍然能看到學生內在動機的養成，因此，學生非表現目標的提升需要時間及環境的支持。

問：你認為老師哪一種教學方式能提高你對數學的學習動機？

哪種會降低你學習數學的動機？

答：俗話說人比人氣死人，每個人的專長都不同，數學是拿來運用，不是死命地爭取分數，因此，若是為了分數來學數學，那才會降低我的學習動機。

(學習日誌 990116-S30)

## 5. 成就目標

臆測探究教學組學生的「成就目標」向度在中測及後測皆呈現上升的趨勢，而傳統教學組學生在則呈現先微幅進步再微幅退步的趨勢，兩組學生在中測時未達到顯著差異，但在後測則呈現顯著差異，顯示臆測探究教學策略介入，對於學生對於成就目標表現的影響，已具顯著成效(可能反映在問卷「27.在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我解決一個難題時」)。對動機領域而言，成就感與自信心是改變學校數學學習動機本質的兩大指標(NCTM, 1989)，S05是兼具低動機及低成就的學生，或許大部分的人對S05可能在工作逃避(work avoidance)的刻板印象，然在教學研究結束前我們可以發現S05在晤談中體現了探究取向教學的數學課室能培養學生的精熟目標導向的理想(Cobb et al, 1991; Cobb et al., 1992)，同時亦實證臆測探究教學策略能提升學生內在學習動機，使學生在精熟目標的引領下提升自我效能。

R：學習數學時，你覺得最有成就感是什麼時候？

S05：對我來說，數學是最害怕的科目。儘管自己有十足的把握，但考出來還是不盡理想，但當我絞盡腦汁終於想出如何解題目時，這是莫大的成就啊！雖然一開始很挫折，塗塗寫寫的，但當答案解出來時，比考100分還開心，因為是靠自己的能力，因為這證明我還是可以辦得到的，這是給自己最大的肯定。

(晤談 990330-S05)

## 6. 學習環境刺激

學習環境包含課程、教師教學及同儕互動等，根據統計分析結果發現臆測探究教學組在此向度在中測時大幅上升、後測時小幅上升，傳統教學組亦在中測及後測相較於前測呈現微幅成長的態勢，兩組在以前測為共變量之共變數分析結果在中測及後測上皆呈現顯著差異。綜合資料分析結果歸納出臆測探究教學組在「學習環境誘因」有別於傳統教學組的可能原因是，數學臆測探究教學創造了讓學生樂學的環境，提升學生主動參與數學課室活動的意願。數學臆測探究教學策略最重要的基礎是實際上是建構在社會性脈絡上，不論是高成就高動機的學生 S25 在研究期初，或是低成就低動機的學生 S05 在研究末期，都表示出主動參與數學活動的意願，並且願意主動思考參與解題任務（可能反映在問卷「32.我願意參與數學課，因為老師沒有給我壓力」、「35.我願意參與數學課，因為同學能互相討論」），此結果符應了 Franke 等人（2007）對於數學教學的期待，他們的主張指出數學教學旨於建構一個數學學習環境，協助學生主動發現學科知識獨有的表徵並激勵學生做數學。

R：你覺得這樣的上課方式如何？

S25：很特別，很少會有老師上課讓學生玩數學遊戲，不僅可以讓學生刺激腦力還可以讓學生以互相討論

R：跟以前有何不同？

S25：以往的老師都會怕課趕不完，不會有如此的方式，這樣反而會讓學生的學習意願不高，因為有趣、生動、活潑的方式，會刺激我學習；無聊、一成不變或只有老師一直說，都不會學生互動，會讓我覺得不想學習。

（晤談 981019-25）

至於傳統教學組中測及後測相較於前測呈現微幅成長的態勢的部分，研究者分析可能的原因是兩組學生高一期間數學科教師皆隸屬同一位屆退老師，在該位教師退休後由本研究之教學者接替教學，雖然傳統教學組學生採用傳統講述教學策略，然而個人特質與先前教師給予學生的感受不同，因此傳統教學組學生在，第 32 題：「我願意參與，因為老師沒有給我壓力」的表現大幅度的進步，在其他題目也約略提升。

R：你覺得升上高二後，你有比較喜歡上課嗎？

S07：有啊。

R：為什麼？

S07：老師你比較好笑！上課比較不會無聊。

R：跟之前的老師差很多嗎？

S07：光是老師對學生的態度就差很多了！上一個老師好像不太喜歡我們問簡單又基本的問題，但他給我的感覺就是這樣用分數去評定一個人的好壞。老師你比較好，不會給我們壓力，也都會仔細的講解。

（晤談 990315-S07）

## 二、學生學習成就探討與分析

### （一）兩組學生六次段考統計分析

為探討兩組學生平均趨勢量數的變化，研究者另將六次段考成績之平均數、標準差及兩班學校排名另行整理如表 2，實驗組除了第二次段考的成績退步到全年級最後一名外，之後皆呈現穩定進步的狀態，尤其是下學期三次段考班級排名皆優於傳統教學組。傳統教學組基本上與其他高二同樣接受傳統講述式教學的班級相仿，一整個學年的段考成績呈現持平的表現。兩組學習成就相較之下，長時間接受臆測探究教學的洗禮的實驗組學生，雖未與對照組學存在統計分析上之顯著性差異，卻存在穩定成長的態勢。

表 2

六次段考成績 T 分數描述統計與校排名

|     | 臆測探究教學組 (N = 39) |        |    | 傳統教學組 (N = 39) |        |    |
|-----|------------------|--------|----|----------------|--------|----|
|     | M                | SD     | 排名 | M              | SD     | 排名 |
| 上-1 | 49.058           | 11.666 | 9  | 49.787         | 15.095 | 8  |
| 上-2 | 44.999           | 12.649 | 13 | 47.146         | 14.083 | 9  |
| 上-3 | 50.210           | 12.788 | 8  | 51.218         | 13.574 | 6  |
| 下-1 | 49.898           | 11.586 | 8  | 49.268         | 14.294 | 10 |
| 下-2 | 51.931           | 9.734  | 5  | 48.308         | 15.649 | 10 |
| 下-3 | 51.825           | 9.624  | 5  | 49.285         | 15.434 | 9  |

### （二）學習成就前、中、後測分析

段考成績前、中、後測分析方式配合數學學習動機問卷施測日程，以第一次段考作為學習成就分析前測，第二、三次段考成績平均數作為學習成就中測成績，第四、五、六次段考成績平均數作為學習成就後測成績（各次成績皆以原始分數進行分析）。表 3 為臆測探究教學組與傳統教學組前、中、後測學習成就描述性統計結果，根據前測獨立樣本  $t$  檢定分析，兩組學生並不存

在顯著差異 ( $T = .31, p = .757$ )。另外，以前測作為共變量進行中測與後測的共變異數分析結果顯示，兩組學生於中測 ( $F(1,75) = 2.24, p = .138$ ) 及後測 ( $F(1,75) = .01, p = .908$ ) 段考成績亦未存在顯著差異。

表3

臆測探究教學組與傳統教學組數學學習成就前、中、後測平均數及標準差

|      | 臆測探究 (N = 39) |       |       |       |       |      | 傳統教學 (N = 39) |       |       |       |       |       |
|------|---------------|-------|-------|-------|-------|------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | 前測            |       | 中測    |       | 後測    |      | 前測            |       | 中測    |       | 後測    |       |
|      | M             | SD    | M     | SD    | M     | SD   | M             | SD    | M     | SD    | M     | SD    |
| 段考成績 | 73.82         | 11.82 | 56.46 | 11.75 | 58.64 | 8.02 | 75.00         | 20.36 | 60.18 | 12.31 | 59.26 | 13.67 |

### (三) 學生學習成就綜合分析

臆測探究教學組於上學期第二次段考年級排名退步至最後一名，推論可能原因為實驗組學生面臨學習策略的調整，尤其在完成工作單所賦予非例行性任務及撰寫反思上皆增加不少工作負擔及認知負荷，需要時間來適應。另分析兩組學生段考成績的標準差變化，實驗組學生呈現先升後降，而控制組的部分則為先降後升，顯示數學臆測教學相較於傳統講述教學更能縮短班級成就表現之差異性，使學生平均表現呈現穩定的成長。整體而言，實驗組學生在數學臆測探究策略的介入下，在不影響學習成就的基礎下，除能有效提升學生學習動機外，更能協助學生學習成就穩定成長。

數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化 (generalization)，將錯綜複雜的片段關係，加以整合成和諧而可理解的整體 (Kent, 1997; Peirce, 1955)，因此，教師在建置協助學生達成數學理解的學習環境中，首要提供學生歷經模糊、異例及矛盾以至於能夠形成問題、猜想及進一步的探索的經驗，協助學生藉由一般化、特殊化、類比的數學臆測思維，形成猜想、檢驗猜想並進而建構數學新知。本研究中，個案教師會經常性的提出讓學生產生認知衝突的情境問題，幫助學生在異例及矛盾中形成問題及猜想，並提出合理的解釋。下列情境是探討重複排列問題：「將 4 個相異獎品分給 5 人，求甲至少一件的方法數有多少種？請依正面及反面作法說明之！」，教師在黑板上臚列正面解法與反面解法：「正面做法先給甲 1 個  $C_1^4 \cdot 5^3 = 600$ ；反面做法全部-甲沒拿到半件  $5^4 - 4^4 = 369$ 」，讓學生在矛盾與困惑中形成數學猜想，並進而提出檢驗猜想的可行解。由以下對話可發現，學生在論述、辯證的過程中，除提升學習成就外，更培養出帶得走的數學能力。

T：你們都有發現兩種做法的不同嗎？

S：有！

T：那到底是哪裡有錯誤？

S：應該是正面做法有問題！

T：同學同意嗎？

S：同意...

T：那到底是哪裡有問題？如何改進？

S：先給的話好像會有問題，可能會重複，比如說你先給他 A 再給他 B，與先給他 B 再給他 A，結果會一樣，所以重複算了。

(課室錄影 990312)

## 伍、結論與建議

本研究結果顯示在歷經一個學年的臆測探究教學策略施行後，雖然對於學習成就沒有顯著影響，然而臆測探究教學組學生的動機得到提升並與傳統教學組學生間存在顯著差異，進而學習成就呈現穩定成長的趨勢。這樣的結果不只呼應了紀雅芳與溫燉純（2008）對於探究教學能提昇數學學習動機的實徵研究結果，更以長達一整學年的研究期程提供了實徵的證據，證明臆測探究教學能協助學生的學習成效呈現穩定成長，特別是低成就學生。根據質性質料分析結果，在臆測探究教學的環境脈絡下，學生願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、與同儕互動進行反駁與辯證，此點更符應了 Franke 等人（2007）主張教師應建構一個協助學生主動發現數學知識學習環境的預期。顯示在臆測探究教學環境脈絡下，學生除學習動機提升外更願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、重視數學學習價值，並在精熟目標導向引導下期許自己是高自我效能的學習者。

研究者觀察發現小組臆測探究合作效能建構在學生自發性遵守的常規上，因此建議未來嘗試實施數學臆測探究教學之教師，在建置學習環境前能夠先行建立學習常規，尤其是社會性數學常規（socio-mathematical norms）（Yackel & Cobb, 1996）。特別是，數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化策略將錯綜複雜的片段關係加以整合成和諧而可理解的整體，因此在臆測探究教學架構中，教師應能為學生的學習目標及可能遭遇的教學情境先行擬定假設性學習軌線，並在軌線中適時的將問題加以特殊化並引導學生在形成猜想、檢驗猜想直至形成一般化的過程中建構數學新知。另外，研究者於教學者所隸屬的教師社群中，了解到有些教師雖有改變傳統教學意願，但卻無所適從，誠如 Gravemeijer（1997）所言，探究教學取向與傳統教學間存在不可調和的張力。為協助教師克服教學取向轉變所造成的兩難，研究者建議教師可在教學策略中搭建社會性鷹架（social scaffolding）如「幫助學生如何與他人合作的協

助，並提供論述的環境為數學理解的發展立下良好基礎」及分析性鷹架 (analytic scaffolding) 如「以實體操作、模型、隱喻、表徵、舉例或論證，協助學生理解數學任務並發展解題策略」(Baxter & Williams, 2010)，協助探究取向教學之進行。最後，由於學校段考成績僅能表現出學生學習成就變化，未能充分展現數學臆測探究教學之優勢或正向成效，建議未來研究探究教學取向對於學生學習成就影響的後進，在選擇評量工具上可以考慮輔以質化研究的方式觀察學生數學素養的展現情形 (秦爾聰、劉致演、尤昭奇，2015)。

### 參考文獻

- 王雅玲、秦爾聰 (2008)。實施探究教學對學生數學焦慮的影響。《臺灣數學教師電子期刊》，15，41-57。
- 余鴻穎 (2006)。高職學生數學學習困擾與學習態度之研究 (未出版碩士論文)。臺北科技大學技術及職業教育研究所，臺北市。
- 紀雅芳、溫嫩純 (2008)。5E 學習環融入數學探究教學對國中生學習動機之影響。《臺灣數學教師電子期刊》，13，1-12。
- 秦爾聰、劉致演、尤昭奇 (2015)。探討七年級學生在以臆測為中心的數學探究教學脈絡下其數學素養展現情形。《臺灣數學教師》，36 (1)，1-16。
- 教育部 (2012)。「找對方向-技職不可限量」技職教育政策與發展。臺北：作者。
- 鄭如雯 (2009)。芬蘭與台灣高職教育之比較。《學校行政》，59，216-232。
- Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 261-271. doi:10.1037/0022-0663.84.3.261
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York, NY: W.H. Freeman.
- Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Help children think mathematically*. New York, NY: Macmillan.
- Baxter, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 7-26. doi: 10.1007/s10857-009-9121-4
- Broasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NJ: Heinemann.
- Brophy, J. (1998). *Motivating students to learn*. Madison, WI: McGraw-Hill.
- Cañadas, M. C., Deulofew, J., Figuerias, L, Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
- Cheung, K. C. (1988). Outcomes of schooling: Mathematics achievement and attitudes towards mathematics learning in Hong Kong. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 209-219. doi: 10.1007/BF00751233
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 3-29. doi: 10.2307/749551

- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & Perlwitz, M. (1992). A follow-up assessment of a second-grade problem-centered mathematics project. *Educational Studies in Mathematics*, 23(5), 483-504. doi: 10.1007/BF00571469
- Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (1995). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhäuser.
- Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York, NY: Macmillan.
- Duda, J. L., & Nicholls, J. G. (1992). Dimensions of achievement motivation in schoolwork and sport. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 290-299. doi:10.1037/0022-0663.84.3.290
- Dweck, C. S. (1986). Motivational processes affecting learning. *American Psychologists*, 41(10), 1040-1048. doi:10.1037/0003-066X.41.10.1040
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Basingstoke, UK: Falmer Press.
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00011-X
- Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, 63(2), 165-178. doi: 10.1007/s10649-005-9019-8
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: Falmer Press. doi: 10.4324/9780203454213
- Kent, B. (1997). The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought. In N. Houser, D. D. Roberts, & J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 445-459). Indianapolis, IN: Indiana University Press.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the eleventh conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-27). Montreal, Canada: PME.
- Köller, O., Baumert, J., & Schnabel, K. (2001). Does interest matter? The relationship between academic interest and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(5), 448-470. doi: 10.2307/749801
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review*, 7(1), 51-61. doi: 10.1007/BF03036784
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472
- Lepper, M. R. (1988). Motivational considerations in the study of instruction. *Cognition and Instruction*, 5(4), 289-309. doi: 10.1207/s1532690xci0504\_3

- Lin, F. L. (2006, December). *Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively*. Keynote speech presented at the Progress report of the APEC project: Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II)- Lesson Study focusing on Mathematical Thinking, Tsububa, Japan.
- Lin, Y. G., McKeachie, W. J., & Kim, Y. C. (2001). College student intrinsic and/or extrinsic motivation and learning. *Learning and Individual Differences*, 13(3), 251-258. doi: 10.1016/S1041-6080(02)00092-4
- Ma, X., & Xu, J. (2004). Determining the causal ordering between attitude toward mathematics and achievement. *American Journal of Education*, 110(3), 256-280. doi: 10.1086/383074
- Mason, J., Burton L., & Stacey K. (Eds.). (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, England: Pearson Education Limited.
- Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view of investigation and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 185-205. doi: 10.1007/s10649-010-9233-x
- Middleton, J. A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: A personal constructs approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(3), 254-279. doi: 10.2307/749130
- Middleton, J. A., & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65-88. doi: 10.2307/749630
- Morrone, A. S., Harkness, S. S., D'Ambrosio, B., & Caulfield, R. (2004). Patterns of instructional discourse that promote the perception of mastery goals in a social constructivist mathematics course. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 19-38. doi:10.1023/B:EDUC.0000028401.51537.a5
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York, NY: Dover.
- Pintrich, P. R., & Schunk, D. H. (2002). *Motivation in education: Theory, research and applications* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Merrill.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23(5), 505-528. doi: 10.1007/BF00571470
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume 1: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Reynolds, A. J., & Walberg, H. J. (1992). A structural model of science achievement and attitude: An extension to high school. *Journal of Educational Psychology, 84*(3), 371-382. doi: 10.1037/0022-0663.84.3.371
- Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47201-5\_2
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). When rewards compete with nature: The undermining of intrinsic motivation and self-regulation. In C. Sansone & J. M. Harackiewicz (Eds.), *Intrinsic and extrinsic motivation: The search for optimal motivation and performance* (pp. 13-54). New York, NY: Academic Press. doi:10.1016/B978-012619070-0/50024-6
- Schiefele, U., & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 163-181. doi: 10.2307/749208
- Siegel, J., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 378-413. doi: 10.2307/749857
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. doi: 10.2307/749205
- Singh, K., Granville, M., & Dika, S. (2002). Mathematics and science achievement: Effects of motivation, interest, and academic engagement. *The Journal of Educational Research, 95*(6), 323-332. doi: 10.1080/00220670209596607
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460
- Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Tuan, H. L., Chin, C. C., & Shieh, S. H. (2005). The development of a questionnaire to measure students' motivation towards science learning. *International Journal of Science Education, 27*(6), 639-654. doi: 10.1080/0950069042000323737
- William, D. (2007). Keeping learning on track: Classroom assessment and regulation of learning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1053-1098). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. doi: 10.2307/749877
- Yerushalmy, M. (1993). Generalizations in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What it is a case of?* (pp. 57-84). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

## 附錄：數學學習動機問卷

### A. 自我效能 (self-efficacy)

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. 不論數學內容簡單或困難，我都有把握能學會。</p> <p>3. 我有信心在數學的考試中取得好的成績。</p> <p>5. 數學課中所進行的活動(或寫作業)時，有點難時，我不是放棄就是只做簡單的部分。</p> <p>7. 對於較難的數學內容，我會跳過不碰它。</p> | <p>2. 我對較難的數學觀念沒有把握學會。</p> <p>4. 不管我多努力也沒有把握學好數學。</p> <p>6. 在進行數學活動(或寫作業)時，我喜歡直接問別人而不是自己想出答案。</p> |
|--|---|

### B. 主動學習策略 (active learning strategies)

- |  |   |
|--|---|
| <p>8. 我在學習數學新知識時，會企圖理解它。</p> <p>10. 當有一些數學觀念不懂時，我會找相關資料來幫助理解。</p> <p>12. 在學習數學過程中，我會企圖瞭解所學到的知識之間的關聯性。</p> <p>14. 當我有一些數學觀念不懂時，我會再去弄懂此觀念。</p> | <p>9. 我在學數學新知識時，會試著與自己以前的經驗做聯結。</p> <p>11. 當有一些數學觀念不懂時，我會找人(老師或同學)討論來幫助理解。</p> <p>13. 當我寫錯數學答案時，我會努力了解寫錯的原因。</p> <p>15. 當數學課中所學的觀念，與我以前所了解的觀念有差別時，我會試著弄懂兩者間的差異。</p> |
|--|---|

### C. 數學學習價值 (mathematics learning value)

- |  |  |
|--|--|
| <p>16. 我認為學數學很重要，因為在日常生活可用到。</p> <p>18. 我認為在數學課中學習解決問題的方法是很重要。</p> <p>20. 我認為學數學滿足自己的好奇心是很重要的。</p> | <p>17. 我認為學數學很重要，因為可以刺激我的思考。</p> <p>19. 我認為在數學課中參與數學探究活動是很重要的。</p> |
|--|--|

### D. 表現目標 (performance goal)

- |  |  |
|--|--|
| <p>21. 我參與數學課的活動主要是為了得到好成績。</p> <p>23. 我參與數學課的活動是為了能讓同學認為我很聰明。</p> | <p>22. 我參與數學課的活動主要是為了表現比同學好。</p> <p>24. 我參與數學課的活動是希望老師重視我。</p> |
|--|--|

---

E.成就目標 (achievement goal)

---

- |  |   |
|--|---|
| <p>25. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我考得很好。</p>     | <p>26. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我對數學的課程或題目練習越做越有自信。</p> |
| <p>27. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我解決一個難題時。</p>  | <p>28. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我的想法被老師接受。</p>          |
| <p>29. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我的想法被同學認可。</p> |   |
- 

F.學習環境刺激 (learning environment stimulation)

---

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| <p>30. 我願意參與數學課，因為數學課本內容生動。</p> | <p>31. 我願意參與數學課，因為老師教學有變化。</p> |
| <p>32. 我願意參與數學課，因為老師沒有給我壓力。</p> | <p>33. 我願意參與數學課，因為老師重視我。</p>   |
| <p>34. 我願意參與數學課，因為課程的挑戰性高。</p>  | <p>35. 我願意參與數學課，因為同學能互相討論。</p> |
-