

袁媛、王淑芬、陳國龍（2016）。

國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力與數學學習成就之相關研究。

臺灣數學教育期刊，3（1），1-18。

doi: 10.6278/tjme.20160323.001

國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力 與數學學習成就之相關研究

袁媛¹ 王淑芬² 陳國龍³

¹ 中原大學教育研究所

² 桃園市楊心國小

³ 新竹教育大學特殊教育學系

本研究的目的是了解國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力，並探討其與數學學習成就的相關性。研究樣本為桃園市某國小二年級學生 137 人，並以「數字估計任務」及「學齡階段數學能力測驗」收集研究資料，其中數字估計任務分為數字對位置任務（NP task）及位置對數字任務（PN task）。研究結果發現：（1）二年級學生在數值線段上估計 0-100 的數量表徵已達到線性表徵，且學生在 PN task 的表現優於在 NP task 的表現；（2）二年級學生的數字估計能力與數學學習成就具有顯著的相關性；（3）數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13% 的解釋力，且解釋力達統計意義，顯示 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

關鍵詞：位置對數字任務、相關研究、數字對位置任務、數學學習成就

通訊作者：袁媛，e-mail：yuan@cycu.edu.tw

收稿：2015 年 9 月 9 日；

接受刊登：2016 年 3 月 23 日。

Yuan, Y., Wang, S. F., & Chen, K. L. (2016).

Relationship between number-line estimation ability and mathematics achievement of second graders in elementary.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 3(1), 1-18.

doi: 10.6278/tjme.20160323.001

Relationship between Number-Line Estimation Ability and Mathematics Achievement of Second Graders in Elementary School

Yuan Yuan¹ Sue-Feng Wang² Kuo-Long Chen³

¹ Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University

² Yang-Hsin Elementary School

³ Department of Special Education, National Hsinchu University of Education

The purposes of this study were to investigate second graders' number-line estimation ability as well as to explore the relationship between their number-line estimation ability and mathematical achievement. The participants in this study were 137 second graders of an elementary school in Taoyuan City, Taiwan, and a number-line estimation task (including number-to-position and position-to-number tasks) and a mathematical achievement test were used as examining tools. The results of this study are as follows. First, on a 0-100 number line, the second graders' estimates fit the linear model. Significant differences were observed between the number-to-position and position-to-number task results. The students' estimation ability in the position-to-number task was superior to that in the number-to-position task. Second, significantly positive correlations between number-line estimation ability and mathematical achievement were observed. Finally, the ability to complete a number-to-position task explained 13% of the variance in the students' mathematical achievement; thus, it can predict students' mathematical achievement.

Keywords: position-to-number task, relation study, number-to-position task, mathematical achievement

Corresponding author : Yuan Yuan , e-mail : yuan@cycu.edu.tw

Received : 9 September 2015;

Accepted : 23 March 2016.

壹、緒論

一、研究背景與動機

近年來，數感（number sense）在數學教育中逐漸被重視，國內外教育學者也一致肯定數感能力的重要性，認為數感對學生的數學概念發展十分重要，因此各國均致力於將數感列為兒童數學能力發展的核心及數學教育的重要目標。而估計是數感的五個能力之一（Jordan, Kaplan, Oláh, & Locuniak, 2006），但在國小數學課程中，估計（estimation）的教與學並未受到太大的注意（支毅君，1996；李量，2011）。學者一般將估計能力區分為數字估計、測量估計和計算估計（Hogan & Brezinski, 2003），其中的測量估計和計算估計通常是需運用其他概念以完成，例如估計臺北市到臺中市的距離，就需要有相關的地理知識，也要知道測量的長度單位；計算估計則必須對運算意義有所了解。而數字估計可不涉及數以外的知識，只對數進行純粹的測量，因此可以針對較小的兒童進行研究。

Dehaene（1997）指出數感是能快速了解、估計和操弄數量的能力，過去有許多研究者支持兒童在一條給定數值線段上進行數字估計任務的表現是測量較小兒童數感的有效工具（Berch, 2005; Jordan et al., 2006; Schneider et al., 2008; Siegler & Opfer, 2003）。因此，兒童在數值線段上去估計數字的正確位置應是數感中的一個核心能力（Laski & Siegler, 2007; Van de Walle, 1998；潘星宇、俞清怡、蘇彥捷，2009）。過去有關兒童在數值線段上的數字估計能力研究，研究者所使用的評估任務，大致可分為（1）數字對位置任務（number-to-position task, 簡稱 NP task）：其評估方式是在一條 25 公分，左為 0，右為 100 或 1000 的數值線段上，請兒童標出一個數（例如：42）的位置；及（2）位置對數字任務（position-to-number task, 簡稱 PN task）：其評估方式為受試者須說出數值線段上指定位置的數字，如：施測者指著數值線段上標識的位置，請兒童說出其位置相對應的數字。目前所見的大多數研究，多只用 NP task 來找出學童在不同數字範圍中的數字估計表現（Booth & Siegler, 2006; Laski & Siegler, 2007; Siegler & Opfer, 2003），只有李曉芹（2008）以山東省的二、四、六年級學生為研究對象，進行 PN task 與 NP task 表現的比較，她發現不同年級的學生在 PN task 的表現都比在 NP task 表現好，即在 PN task 中，學生數估計的準確性比在 NP task 更高。由於針對 NP task 及 PN task 表現的比較研究較少，李曉芹的研究結果可能需要更多實證結果的支持，因此本研究欲以臺灣學生為研究對象，進行 NP task 及 PN task 表現的比較探討。

過去，研究者除了聚焦在兒童的數字估計能力的評估與發展外，有許多研究者也對兒童的數字估計能力與其他數學能力的關係感到興趣，特別是研究顯示兒童的數字估計表現和其他基本數概念及複雜的算術能力間存在著系統性的關係。例如：Laski 與 Siegler（2007）研究發現，

從幼稚園到國小二年級的兒童，若其在數值線段上找到指定數字位置的發展為線性模式時，就顯示兒童在數字估計的能力表現和基本數能力（如數歸類及數的大小比較）有很高的正相關存在。另一個以幼稚園至國小三年級的學生為對象所做的研究，也發現兒童的數字估計能力表現愈精確，其在數學標準成就測驗的分數就愈高（Booth & Siegler, 2006），這樣的研究發現也出現在數字估計表現較差的數學學習障礙兒童身上，例如：Geary、Hoard、Nugent 與 Bailey（2012）發現數學學習障礙兒童在數字估計的表現也特別弱一些，許多研究也都發現數字估計能力表現與後來算術能力表現的因果關係，且發現兒童在數字估計任務的表現上愈精準，其在數及算術的表現上也愈好（Booth & Siegler, 2008; Fischer, Moeller, Bientzle, Cress, & Nuerk, 2011; Link, Moeller, Huber, Fischer, & Nuerk, 2013; Ramani & Siegler, 2008; Whyte & Bull, 2008）。以大陸的學童及台灣的學童所做的研究，也都發現國小低年級兒童的數字估計能力與其數學學習成就的表現有相關（李曉芹，2008；林寶玲，2012）。因此，兒童在數值線段上的數字估計能力應與其數學學習成就的表現有相關，但有別於過去只用單一任務表現探討兒童數字估計能力與數學學習表現的關係，本研究欲進一步以 NP task 與 PN task 表現作為指標，探討其與數學學習成就表現的關係。

二、研究目的與問題

根據前述研究動機與背景說明，本研究擬探討國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力發展模式，並了解其與數學學習成就之間的相關性。具體的研究問題有四：

- （一）國小二年級學生的數字估計能力發展模式為何？
- （二）國小二年級學生在 NP task 與 PN task 兩者之間的表現是否有顯著的差異？
- （三）國小二年級學生在 NP task 表現、PN task 表現與數學學習成就的相關性為何？
- （四）國小二年級學生在 NP task 表現及 PN task 表現對數學學習成就的預測力為何？

貳、文獻探討

一、兒童在數值線段上的數字估計能力發展

有關兒童在數值線段上數字估計能力的發展，根據 Dehaene（1997）提出的假設是由對數模式逐漸發展為線性模式。所謂對數模式是指較小的兒童在估計 100 以內正整數在線段上的位置時，如以由小至大描繪（要求的估計數字，實際表現數字）的點於座標平面上，會出現如對數函數圖形的樣子，即他在較小的數字（通常 30 以內）會出現比較大的誤差，而在較大的數字的誤差反而較小。而線性模式是指較大的兒童，則在各個不同數字的估計誤差是一致的，也就是不再出現在較小的數字的估計誤差較大的現象。所以年齡較小的兒童（如：幼稚園、國小一年級），他們對數的估計（estimated magnitude, EM）和數的實際值（actual magnitude, AM）是呈

現對數函數關係，即 $EM = a \cdot \ln(AM) + b$ 。之所以會有這樣的現象，Dehaene 是藉由心理學的「距離效果」(distance effect, DE) 來解釋。所謂的 DE，就是兒童在判斷兩個距離較遠數字的大小時，其正確率較高，所需的反應時間較短；而相對的對兩個距離較近數字的大小判斷，其正確率較低，且所需的反應時間較長。所以，Dehaene 認為兒童對於較小數字的距離估計會出現放大的現象，而對較大數字的距離會有低估現象。後續有許多研究者 (Moeller, Pixner, Kaufmann, & Nuerk, 2009; Nuerk, Kaufmann, Zopoth, & Willmes, 2004; Siegler & Booth, 2004; 周廣東、莫雷、溫紅博, 2009) 紛紛探討 Dehaene 的「對數模式到線性模式」的發展是否正確。

Siegler 與 Booth (2004) 設計數值線段上的數字估計實驗測試幼稚園、國小一、二年級的兒童，他們的研究結果支持 Dehaene 的假設，即兒童在數值線段上進行數字估計能力的發展是從對數模式發展成線性模式。幼稚園和國小一年級兒童的數字估計值和數字實際值呈現對數關係，但到了國小二年級，就呈現線性關係。周廣東等人 (2009) 以中國的幼稚園、國小一、二年級的兒童為對象，一樣探究兒童在 0 到 100 範圍內的數字估計表現，也發現中國兒童和美國兒童一樣是由不精確的對數表徵逐步發展至精確的線性表徵，但中國兒童的精確數字估計表現出現早於美國兒童，即美國兒童要到二年級才會發展出線性模式，而中國兒童在一年級時即多已發展出線性模式。

然而，有些學者認為兒童在數值線段上的數字估計能力發展應該是線性關係，也就是數的估計值會隨著數的實際值的增加而增加，所以數字的估計誤差和它的數字大小並沒有關係。例如：Nuerk 等人 (2004) 也參考 Siegler 的數字估計實驗，要幼稚園、國小一、二年級學生在 10cm 的線段上做 100 以內的數的估計，結果發現學生在數字的估計值和實際值的關係，並非呈現對數關係，而是線性關係。Moeller 等人 (2009) 對歐洲奧地利的國小學生實施數值線段上的數字估計能力測驗，研究結果也發現，小學一年級學生在數值線段上的數字估計能力並未出現對數模式，而是線性模式，只是在 10 以內的數字是斜率較大的直線，而在 10 到 100 的數字是斜率較小的直線。

綜而言之，目前有關兒童在數值線段上的數字估計能力發展模式存在著兩個主要的研究論點，一是兒童隨著年齡的增加，其在數值線段上的數字估計能力的發展模式是由不成熟的對數模式發展至線性模式 (Siegler & Booth, 2004; 周廣東等人, 2009); 另一則是以認為兒童在數值線段上的數字估計能力發展為直線模式，只是在不同的數字範圍可能出現不同的斜率，即在兒童熟悉的數字範圍為斜率較大的直線，而在兒童不熟悉的數字範圍為斜率較小的直線 (Moeller et al., 2009; Nuerk et al., 2004)。因此，兒童在數值線段上的數字估計能力發展模式仍是一個值得關注的主題。

二、兒童在數值線段上數字估計能力的測量

過去有關兒童在數值線段上數字估計能力的研究，主要著重在兒童所表現的發展模式，且絕大部分的研究廣泛運用有界數值線段為施測工具（數值線段上標有最小值與最大值），這些豐富的研究成果的確也促成研究者對兒童在數值線段上進行數字估計表現的了解。綜觀過去研究者在這個主題的研究所使設計的任務，大致可分為數字對位置任務（即 NP task），見圖 1；另一種是位置對數字任務（即 PN task），見圖 2。

這是一條 0~100 的數線，請問 2 會在數線上的哪個位置？請用筆在 2 的位置上畫直線。

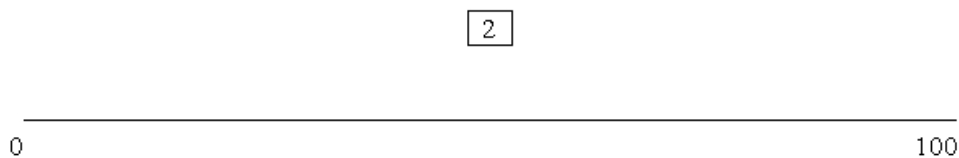


圖 1 NP task 示例

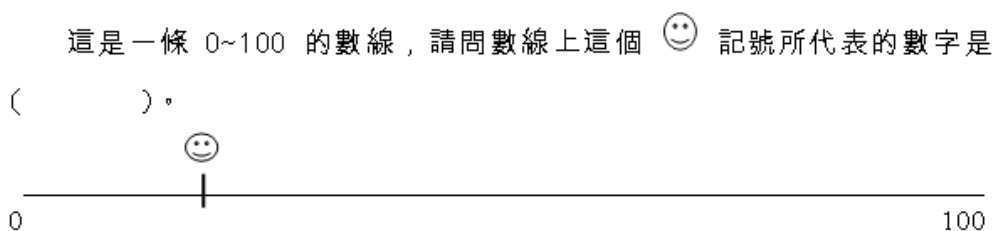


圖 2 PN task 示例

目前所見的大多數研究，多只用 NP task 來找出學童在不同數字範圍中的數字估計表現（周廣東等人，2009），可能因為 PN 任務較易使兒童採用比例判斷策略進行解題，因此多數研究仍以 NP task 作為評估兒童在數值線段上數字估計能力的方式。由於至目前為止，少有研究從不同的估數任務表現去探討兒童數字估計能力的發展和比較，只有李曉芹（2008）以山東省的二、四、六年級學生為研究對象，進行 PN task 與 NP task 表現的比較，她發現不同年級的學生在 PN task 的表現都比在 NP task 表現好，即在 PN task 中，學生數字估計的準確性比在 NP task 更高。由於李曉芹以前少有研究探討學生在此兩種任務表現的差異，單一研究結果需更多實證研究的驗證，因此本研究將再以臺灣兒童在 PN task 和 NP task 的表現探討其數字估計能力的發展，並比較兒童在此兩種任務表現上的差異。

參、研究方法

一、研究對象

本研究採便利取樣，選取研究者之一所任教之桃園市楊梅區某國小二年級學生為研究對象。該校學生身份以一般生居多，二年級學生中原住民、新住民、弱勢家庭及隔代教養在一個班的比例約為 10% 左右。目前二年級有六個班，每班學生 28 或 29 人，全二年級計有男生 82 人、女生 89 人，共 171 人。研究者於施測前，發下施測同意書徵得家長同意後，再進行研究資料的蒐集。經調查後，同意施測的男生 71 人，女生 69 人，共 140 人。因有 3 位學生在數字估計能力部分作答不完全，故該三份資料當作廢卷，最後以 137 名學生（男生 71 人，女生 66 人）測驗資料進行分析。

二、研究工具

本研究有關學生能力表現的資料分為三個測驗蒐集，第一個測驗是數字估計任務中的 NP task，第二個測驗是數字估計任務中的 PN task，第三個測驗是學齡階段數學能力測驗的初級題本，以下說明各測驗的內容及施測程序。

（一）NP task

本研究為了與李曉芹的研究結果做比較，因此線段長度的設計與之相同，即每張 A4 紙的中間有一條長 25 公分的數值線段，左端標記為 0，右端標記為 100，被估計的數字位於 25 公分線段中間上方約 2 公分處。被估計的數字也與李曉芹的研究相同，為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個，且以隨機方式出現這 10 個數字出現的順序。測驗本的第 1 頁至第 10 頁為一頁一題的 NP task，測量方式為量出學生在 NP task，每一題從 0 到畫記的公分長度後，以 Opfer (2003) 計算方式將公分轉換為學生估計的數值，以要求畫記 2 為例：若學生從 0 到畫記的長度為 0.7 公分， $0.7 \div 25 \times 100 = 2.8$ ，則代表該名學生估計 2 的位置落在 2.8 的地方，再以 Siegler 與 Booth (2004) 所提出的絕對誤差率 (percentage of absolute error, 簡稱 PE)，來計算學生在 NP 任務中每一題的絕對誤差率。其計算公式為：

$$\text{絕對誤差率(PE)} = \left| \frac{\text{估計值} - \text{實際值}}{\text{被估計的數值範圍}} \right|$$

因此，該學生在這題的絕對誤差率為：

$$\left| \frac{2.8 - 2}{100} \right| = 0.8\%$$

(二) PN task

NP task 的 10 個問題之後，接著是第 11 頁至第 20 頁且為一頁一題的 PN task，被估計的位置用與 25 公分數值線段垂直的一條直線表示，直線上方有一笑臉記號，請學生估計線段上這個 ☺ 記號所代表的數字為何。被估計的位置也與李曉芹的研究相同，為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個，且以隨機方式出現這 10 個數字出現的順序。得出 PN task 的估計值之後，再計算學生在每一題的 PE。例如：要求指出 2 所在位置的數字，若學生回答為 5，則學生在這題的絕對誤差率為：

$$\left| \frac{5 - 2}{100} \right| = 3\%$$

(三) 學齡階段數學能力測驗

本研究以林寶貴、李如鵬與黃玉枝（2009）共同編製的學齡階段數學能力測驗之初級為測驗工具，國小二年級學生在此測驗所得的分數即為該生的數學學習成就。原本編製學齡階段數學能力測驗的目的是提供給國小二年級至國中三年級的聽障學生使用，因同時建有國小二年級至國中三年級的一般學生常模，所以也能提供一般學生使用。經過各縣市聽障生、聽常生之抽樣樣本的兩次預試、修訂後，正式的學齡階段數學能力測驗之初級題本，其項目分析結果難易度平均為.43，鑑別度為.70。

測驗內容涵蓋「數與計算」、「量與實測」、「圖形空間」、「統計圖表」、「數量關係」，題型包含概念 23 題、計算 18 題及應用 9 題等共 50 題選擇題。每一題有四個選項，只有一個答案是對的，每答對一題給 1 分，滿分 50 分。此測驗以庫李 20 公式計算內部一致性信度係數，三種題型的內部一致性信度係數介於.77 至.87 之間，全測驗的內部一致性信度係數為.85。

三、施測方式

所有測驗施測方式以班級為單位，採團體施測。研究者請二年級老師於早自習時間協助進行「數字估計任務」的施測，並於測驗開始前向學生說明：「現在做的這份測驗，不會計入你的學習成績。現在請看布幕上的範例（將範例製成 ppt 檔案，用投影機顯示於布幕），在這條 0-100 的數線中，你覺得框框裡的數字在這條數線的哪個位置，就請你在那裡畫一直線。測驗時間為 5 分鐘，聽到老師說測驗開始，再作答。」NP task 結束後，請學生看布幕上 PN task 的範例，老師說明：「在這條 0-100 的數線中，有一個笑臉記號，你覺得這個笑臉記號的位置是數字幾，請把數字寫在括號裡面。測驗時間為 5 分鐘，聽到老師說測驗開始，再作答。」為統一示範及避免暗示作用，本研究以數字 50 為例進行兩個數字估計任務的示範例。數字估計任務施測結束後三天，六個班級學生同時於第一節課的時間進行學齡階段數學能力測驗，研究者並請二年級導師依照此測驗的實施說明，協助進行施測。施測地點皆在班級教室裡進行，不同意施測的學生則在座位安靜閱讀。

肆、研究結果與討論

一、學生在 NP task 與 PN task 的表現結果

本研究將二年級學生在 NP task 每一題從 0 到畫記處的長度（公分），轉換為估計值，再將每一題的 NP task 與 PN task 表現資料輸入軟體，算出每一題的估計值平均數、估計值平均數與實際值的比、標準差、中位數及絕對誤差率（PE），學生在 NP task 與 PN task 之實際值與估計值結果摘要如表 1。

根據表 1，在一位數的 NP task 中，2 的估計值平均數為 5.76，估計值平均數為實際值 2 的 2.88 倍；3 的估計值平均數為 9.16，估計值平均數為實際值 3 的 3.02 倍；4 的估計值平均數為 10.40，估計值平均數為實際值 4 的 2.6 倍；6 的估計值平均數為 18.30，估計值平均數為實際值 6 的 3.05 倍。但在一位數的 PN task 中，2 的估計值平均數為 1.54，估計值平均數為實際值 2 的 0.77 倍；3 的估計值平均數為 2.39，估計值平均數為實際值 3 的 0.80 倍；4 的估計值平均數為 3.29，估計值平均數為實際值 4 的 0.82 倍；6 的估計值平均數為 4.77，估計值平均數為實際值 6 的 0.80 倍。可以看出在一位數的數字估計任務中，學生的 NP task 估計平均值結果比實際值大，而 PN task 估計平均值結果比實際值小。

在十至五十的 18、25 和 42 這三個數的 NP task 中，18 的估計值平均數為 33.08，估計值平均數為實際值 18 的 1.83 倍；25 的估計值平均數為 33.02，估計值平均數為實際值 25 的 1.32 倍；42 的估計值平均數為 49.01，估計值平均數為實際值 42 的 1.16 倍。但這三個數在 PN 任務中，18 的估計值平均數為 9.94，估計值平均數為實際值 18 的 0.55 倍；25 的估計值平均數為 16.09，估計值平均數為實際值 25 的 0.64 倍；42 的估計值平均數為 38.23，估計值平均數為實際值 42 的 0.91 倍。由估計值平均數的表現，可以看出在十至五十的數字估計任務中，學生在 NP task 中會高估該實際數的位置，而在 PN task 中，學生會低估該實際數的位置。

在五十以上的 67、71 和 86 這三個數的 NP task 中，67 的估計值平均數為 61.85，估計值平均數為實際值 67 的 0.92 倍；71 的估計值平均數為 70.82，估計值平均數為實際值 71 的 0.99 倍；86 的估計值平均數為 78.64，估計值平均數為實際值 86 的 0.91 倍。但這三個數在 PN task 中，67 的估計值平均數為 67.12，估計值平均數為實際值 67 的 1.00 倍；71 的估計值平均數為 73.63，估計值平均數為實際值 71 的 1.03 倍；86 的估計值平均數為 86.19，估計值平均數為實際值 86 的 1.00 倍。可以看出在 NP task 與 PN task 中，學生對 67、71 和 86 這三個數的估計平均數都很接近實際值。

綜合以上的敘述，五十以下的數，學生在 NP task 的估計結果多為高估，在 PN task 的估計結果多為低估。五十以上的數，學生在 NP task 和 PN task 的估計結果，估計值平均數都很接近實際值。不過，由於估計值的平均數是反應所有作答者的平均表現結果，即使受試者的離散反應大（即變異數大）也可能產生估計結果趨向平均數的情形。為避免平均數無法有效代表學生表現之數值，且中位數也能表現數量的集中趨勢，因此本研究在判斷受試者的數量表徵發展上，分別以估計值平均數和中位數為依變項，以實際值為自變項去進行簡單迴歸分析。以下就本研究的資料，說明迴歸分析的結果。

表1

NP task與PN task之實際值與估計值結果摘要表

| | | 實際值 | | | | | | | | | |
|-------------|-------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 2 | 3 | 4 | 6 | 18 | 25 | 42 | 67 | 71 | 86 |
| NP TASK | 平均數 | 5.76 | 9.16 | 10.40 | 18.30 | 33.08 | 33.02 | 49.01 | 61.85 | 70.82 | 78.64 |
| | 平均數÷ 實際值 | 2.88 | 3.02 | 2.60 | 3.05 | 1.83 | 1.32 | 1.16 | 0.92 | 0.99 | 0.91 |
| | 標準差 | 4.17 | 6.84 | 6.15 | 10.57 | 14.67 | 12.57 | 13.93 | 9.74 | 9.02 | 8.04 |
| | 中位數 | 5.00 | 8.00 | 8.00 | 16.00 | 30.00 | 30.50 | 44.00 | 62.00 | 71.80 | 79.00 |
| | PE (%) | 3.80 | 6.27 | 6.55 | 12.49 | 16.08 | 10.91 | 10.39 | 7.96 | 6.79 | 8.67 |
| | PN TASK | 平均數 | 1.54 | 2.39 | 3.29 | 4.77 | 9.94 | 16.09 | 38.23 | 67.12 | 73.63 |
| 平均數÷ 實際值 | 0.77 | 0.80 | 0.82 | 0.80 | 0.55 | 0.64 | 0.91 | 1.00 | 1.03 | 1.00 | |
| 標準差 | .92 | 1.21 | 1.63 | 2.22 | 6.19 | 8.81 | 14.04 | 19.40 | 16.63 | 15.37 | |
| 中位數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 14 | 44 | 71 | 76 | 90 | |
| PE (%) | 0.85 | 1.10 | 1.43 | 2.13 | 9.44 | 10.94 | 10.77 | 13.91 | 11.75 | 8.35 | |

由表 1 的 NP task 之表現結果做迴歸分析：若以實際值為自變項，估計值的平均數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .97$ ， $\beta = .99$ ，估計值 = $10.21 + 0.83 \times$ 實際值；若以實際值為自變項，以估計值的中位數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .98$ ， $\beta = .99$ ，估計值 = $7.70 + 0.86 \times$ 實際值。

若以迴歸分析中的曲線估計檢驗，以 NP task 的實際值為 X 軸，估計值為 Y 軸。如圖 3 的左圖是以估計值平均數為依變項，右圖是以估計值中位數為依變項，本研究所收集的資料分析結果，不論用估計值的平均數或中位數為依變項，其圖形都符合線性函數。由此得知，本研究中的國小二年級學生在 0-100 的數字估計能力，從 NP task 這部份的資料分析來看，學生在 0-100 的數量表徵發展已達線性表徵。

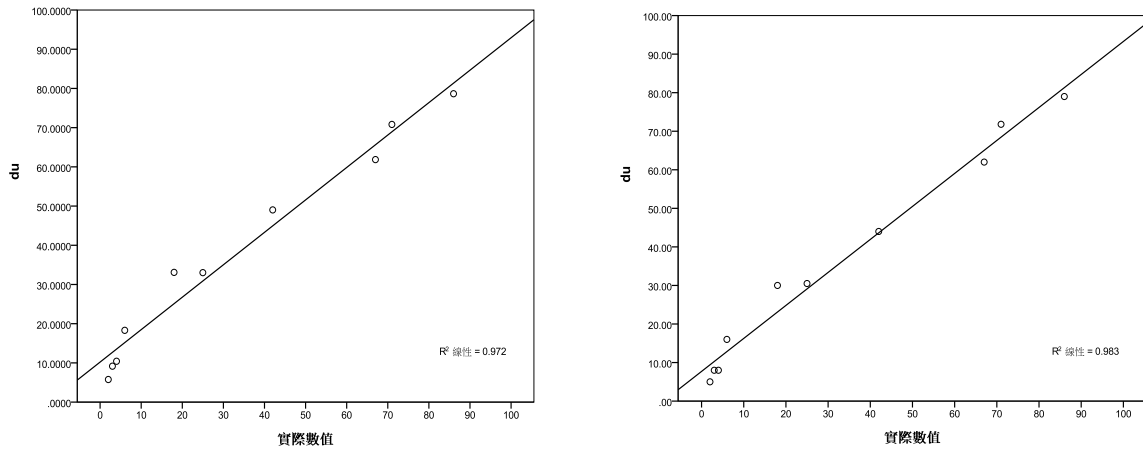


圖 3 NP task 實際值與估計值的曲線圖

從表 1 的 PN task 之表現結果做迴歸分析：若以實際值為自變項，估計值的平均數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .99$ ， $\beta = .99$ ，估計值 = $-3.30 + 1.04 \times$ 實際值；若以實際值為自變項，以估計值的中位數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .98$ ， $\beta = .99$ ，估計值 = $-4.38 + 1.10 \times$ 實際值。

同樣以迴歸分析中的曲線估計檢驗，以 PN task 的實際值為 X 軸，估計值為 Y 軸。如圖 4 的左圖是以估計值平均數為依變項，右圖是以估計值中位數為依變項，本研究所收集的資料分析結果，不論用估計值的平均數或中位數為依變項，其圖形都符合線性函數。

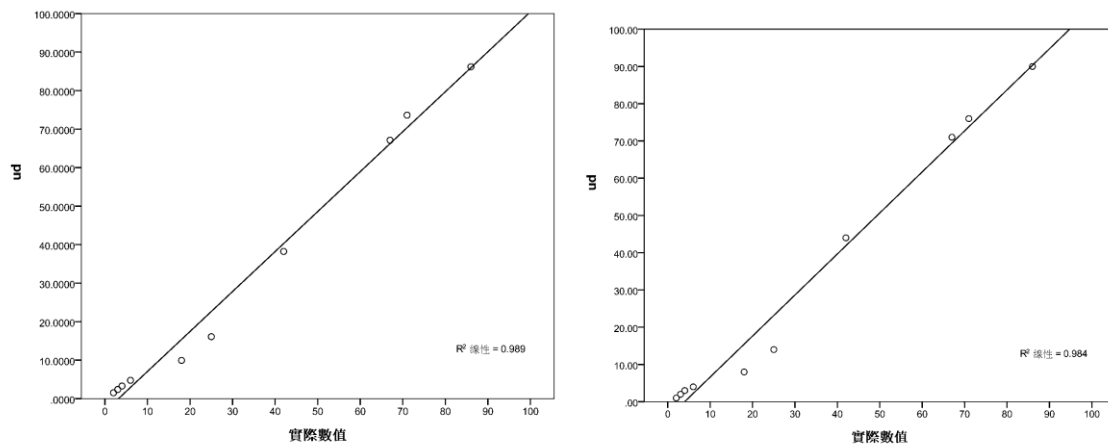


圖 4 PN task 實際值與估計值的曲線圖

綜合上述結果，不論用估計值的平均數或中位數進行迴歸分析，所得的結果都顯示二年級學生在 0-100 的 NP task 與 PN task 是符合線性表徵的，即本研究中的國小二年級學生在 0-100 的數字估計能力發展已達到線性表徵，此結果與 Siegler 與 Booth (2004)、李曉芹 (2008)、周

廣東等人（2009）和林寶玲（2012）的研究結果一致，即本研究二年級兒童在各個不同數字的估計誤差是一致的，也就是不再出現在較小的數字的估計誤差較大的現象，呈現比對數表徵較為精確的線性表徵。

二、學生在 NP task 與 PN task 的差異性考驗

為了解二年級學生在 NP task 及 PN task 的表現差異，本研究以 PE 作為數字估計表現結果，進行「相依樣本 t 檢定」以考驗學生在 NP task 與 PN task 的表現差異性。二年級學生在 NP task 的絕對誤差率平均值為 9.00，PN task 的絕對誤差率平均值為 7.07，兩者的差異值為 1.93，差異值考驗的 $t(272) = 5.53$ ，兩者的相關係數 $r = .67$ ， $p < .001$ ，即二年級學生在 NP task 與 PN task 的表現之間有顯著差異存在。李曉芹的研究結果是 NP task 的絕對誤差率為 8.0，PN task 的絕對誤差率平均值為 6.28。本研究結果與李曉芹（2008）的研究結果一致，即學生在 PN task 的表現顯著優於 NP task 的表現。

探討二年級學生在 PN task 的表現優於 NP task 之原因，可能是 NP task 要學生在一條兩端標有 0 和 100 的空白數值線段上做記號，而 PN task 是要學生判斷，在一條兩端標有 0 和 100 的數值線段上，與之垂直的一直線所代表的數字為何。相較於 NP task 數值線段上無任何記號，PN task 數值線段上的一直線如同一個線索、直尺上的刻度、參考點等，讓學生在判斷時可以直觀的或憑感覺寫出數字。

以絕對誤差率的平均來看，NP task 的絕對誤差率高於 PN task 的絕對誤差率，但並不表示 10 個實際值的 NP task 絕對誤差率都高於 PN task 的絕對誤差率。從表 1 發現實際值 25、42、67 和 71 的 NP task 絕對誤差率都低於 PN task 絕對誤差率，顯示學生在 25、42、67 和 71 的 NP task 這部份的準確度比 PN task 還高，尤其以 67 的 NP task 與 PN task 絕對誤差率差距最大，為 5.95，其次是 71 的 4.96。

為了進一步了解學生在 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 這 10 個實際值的估計情形，將 10 個實際值由小到大畫分成三個區域，以前段、中段和後段進行相依樣本單因子變異數分析，前段為 2、3、4、6 四個一位數，中段為 18、25、42 三個十至五十的數，後段為 67、71、86 三個五十以上的數。

在 NP task 的部份，前段誤差率（7.30%），中段誤差率（12.46%），後段誤差率（7.81%），變異數分析處理效果的 $F(2, 408) = 29.05$ ， $p < .001$ ，達到顯著水準，即在 NP task 的三個數字區域中，學生的估計能力表現有顯著的不同，中段與前段、後段皆有顯著差異，前段與後段則未達顯著差異（ $p = .397 > .05$ ）。在 PN task 的部份，前段誤差率（1.39%），中段誤差率（10.39%），後段誤差率（11.34%），變異數分析處理效果的 $F(2, 408) = 108.93$ ， $p < .001$ ，達到顯著水準，即在 PN task 的三個數字區域中，學生的估計能力表現有顯著的不同，前段與中段、後段皆有顯

著差異，中段與後段未達顯著差異 ($p = .215 > .05$)。

綜合上述結果，在 NP task 的部份，以數值線段兩端的準確度優於中段，中段數字估計的絕對誤差最高，估計較不準確。在 PN task 的部份，以前段數字估計表現較佳。不論在 NP task 或 PN task，前段的絕對誤差率均低於中段和後段，表示學生在 0-100 的數字估計上，對於一位數 2、3、4、6 的估計準確度都比兩位數的準確度高。學生在前段和中段的 PN task 之估計準確度高於 NP task，即在五十以內的數 2、3、4、6、18、25、42 等七個，學生從位置判斷數字的估計能力優於給數字畫出位置的估計能力。不過，在後段卻出現相反的現象，後段 NP task 的絕對誤差率平均值為 7.81，PN task 的絕對誤差率平均值為 11.34，即學生在 67、71、86 這三個五十以上的數，給數字畫出位置的估計能力優於從位置判斷數字的估計能力。因此，兒童在進行 NP task 和 PN task 時可能出現不同的解題策略，且數字可能是一個影響兒童在這些任務表現的影響因素。

三、數字估計能力對數學學習成就的預測力分析

為了解學生的數字估計能力對數學學習成就的預測力，本研究先以「積差相關」進行 NP task 絕對誤差率、PN task 絕對誤差率與數學學習成就的相關性分析。NP task 絕對誤差率與數學學習成就的相關係數為 $r = -.36$ ， $p < .001$ ，顯示 NP task 絕對誤差率與數學學習成就達顯著的負相關。在林寶玲（2012）的研究中，她以國小二年級兩次段考成績平均為數學學習成就，其與 NP task 絕對誤差率的相關為中度負相關 $r = -.58$ 。李曉芹（2008）的研究中，以國小二年級數學期中考試的成績為數學學習成就，其與 NP task 絕對誤差率的相關為顯著負相關 $r = -.69$ 。因此，本研究相關顯著性結果與林寶玲及李曉芹之結果一致，即學生在 NP task 的表現愈好，則數學學習成就表現愈高，唯在相關係數上均低於兩人的研究，可能的差異為數學學習成就的評量方式不同。而 PN task 絕對誤差率與數學學習成就的相關係數為 $r = -.24$ ， $p = .006 < .05$ ，顯示 PN task 絕對誤差率與數學學習成就達顯著的負相關，即學生在 PN task 的表現愈好，則數學學習成就表現愈高。

因為 NP task 絕對誤差率及 PN task 絕對誤差率的相關值為 .67，且為顯著相關，再經由線性重合的檢定結果，發現 NP task 絕對誤差率與 PN task 絕對誤差率之間有線性重合的問題，所以進行多元迴歸分析時，PN task 絕對誤差率未被選入為自變項。因此，本研究將相關較高的 NP task 絕對誤差率投入模式中，經迴歸分析得 NP task 誤差率與數學學習成就之多元相關係數為 $r = -.36$ ， $R^2 = .13$ ，顯示 NP task 誤差率對數學學習成就有 13% ($F(1, 135) = 20.25$ ， $p < .001$)，達到顯著水準的解釋變異量，且具有統計意義，即 NP task 絕對誤差率對數學學習成就有 13% 的預測力。根據迴歸分析結果，可得 NP task 絕對誤差率預測數學學習成就之迴歸方程式如下：

$$\text{數學學習成就} = 40.59 - 41.69 \times \text{NP task 絕對誤差率}$$

因此，學生在 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 二年級學生在數值線段上做 0-100 的數字估計能力已達線性表徵，且在 PN task 的表現優於 NP task 表現

在本研究中探討的數字估計能力包含 NP task 與 PN task 兩種，測驗方式皆是請學生在 25 公分的數值線段上進行 0-100 之間數字的估計，被估計的數為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個數字。不論在 NP task 或 PN task 中，本研究以估計值的平均數或中位數做迴歸分析，均發現國小二年級學生在 0-100 的數量表徵形式已達到線性表徵。以學生在數字估計任務的絕對誤差率 (PE) 做為分析資料，進行 NP task 與 PN task 的差異性考驗，發現兩者有顯著差異存在，二年級學生在 NP task 的絕對誤差率表現比 PN task 高 (分別為 9.00 及 7.07)，即學生在 PN task 的數字估計表現優於 NP task。

(二) 數字估計能力與數學學習成就為正相關

本研究以積差相關進行估數任務絕對誤差率與數學學習成就分數的相關性分析，其中 NP task 絕對誤差與數學學習成就分數的相關為 $r = -.36$ ($p < .001$)，PN task 的絕對誤差率與數學學習成就分數的相關為 $r = -.24$ ($p = .006$)，均達顯著的負相關。由於學生在數字估計任務的絕對誤差率愈低，表示他對數字或位置的估計愈接近實際值，因此，本研究發現學生的數字估計能力愈高，其數學學習成就也愈高。

(三) 數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13% 的變異量且達統計顯著性，顯示 NP task 能力能有效預測學生的數學學習成就

因 NP task 與 PN task 之間有線性重合的問題，所以進行多元迴歸分析時，PN task 未被選入，只以相關係數較高的 NP task 表現投入迴歸模式中。因此，數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13% 的解釋力，且解釋力達統計意義，顯示 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

二、建議

(一) 國小數學課程宜重視給定數值線段進行數字估計的教學，以培養學生具有數值線段上數字估計的能力

雖然本研究結果顯示國小二年級學生在數字估計能力已發展出較精熟的線性表徵，但從表 1 可以發現學生在 NP task 的表現變異數較大 (4.17~14.67)，顯見學生表現的差異性仍大。另一方面，本研究結果發現 NP task 的絕對誤差率、PN task 的絕對誤差率與數學學習成就皆有顯著的負相關，且學生在線段上的數字估計能力對其數學學習成就表現的解釋力達 13%，因此，

在數值線段上數字估計能力的重要性，不容忽視。現行國小數學課程中，數的認識通常只是著重數學符號的認知及了解，強調的是符號、圖形及口語表徵的連結及數字的大小比較，在線段上進行數字估計的內容並不多見。Dehaene、Bossini 與 Giraux (1993) 認為數字信息在人類腦中呈現的方式是以數字在空間中對應到數量的表徵型態，線段上數字估計任務即著重在數值轉換到空間對應的處理歷程，學生在這方面的能力應該被加強。因此針對較小的兒童剛開始學習認識數的同時，可以適度融入數值線段上數字估計的相關教學活動，以加強學生的數字估計能力。例如：Van de Walle (1998) 建議可以設計一個“Who Am I?”的學習活動 (p. 177)。老師設計一個要學生猜測的數字，並在 0 到 100 的數值線段上畫記問號，每當學生猜測之後即在數值線段上標記學生猜測數字的位置，一直持續至學生猜對老師心中的數字為止。

(二) 建議未來可進一步探討學生所使用的數字估計策略

本研究發現學生在 NP task 部份，對數值線段兩端數字估計的準確度高於中段，在 PN task 部分，則是數值線段前段數字估計的準確度高於中及後段，有可能學生在解決這兩個任務問題是採用不同的解題策略。而本研究為了與李曉芹的研究結果做比較，在數字估計測驗的十個實際值皆與之相同，所以五十以上的數只有 67、71 和 86，並未有九十以上的數。因此，未來可將九十以上接近 100 的數列入測驗中，並進行學生估數策略的探討，以了解學生在不同任務及不同數值解題表現的差異。例如：Barth 與 Paladino (2011) 研究發現受試者會利用知覺比例判斷原則 (proportion judgment) 作為估計的策略，考量實際值在數值線段上所佔的比例為多少，再推估其所在的位置。施測當天研究者和五位導師也觀察到班級裡有少部份學生在做 NP task 測驗時，會在數值線段上做點數的動作，如同莫雷、周廣東與溫紅博 (2010) 在研究中的發現，學生對低端數字有個對應的長度，亦即心理長度，在估計其它數字時，並以此為單位做疊加的動作。而研究者也發現，從測驗題本的擦拭痕跡判斷，學生面臨較大的數字 (如 25 以上) 時，可能在點數完後發現到位置似乎不合理，因而採取別的策略，重新對該數字進行估計。是什麼原因造成學生使用這樣的策略，又數字的大小是否影響解題策略的使用，都值得未來再進一步的探究。

(三) 建議未來針對研究對象進行縱貫性的發展探究，以了解其與數感能力發展的關係

本研究的施測時間點是在二年級下學期的期末實施，學生已接觸了較大數字的認識及加減基本運算意義，這些學習內容是否對其估計數字任務的表現造成影響。且相對於目前多數以三年級以上的兒童才能進行數感能力的評估探究，數字估計任務是否能成為評估較小兒童的數感評估工具，值得未來研究之關注。因此，建議未來可以一年級學生為對象，並進行持續性的縱貫性資料收集，以了解較小兒童在數值線段上進行數字估計能力的發展，並了解其是否能有效地預測未來數感能力的發展。

參考文獻

- 支毅君 (1996)。我國國小學生估算概念之研究。《臺東師院學報》，7，1-51。【Chih, I-Chun (1996). A study on computational estimation of R.O.C. students at elementary school level. *Journal of National Taitung Teachers College*, 7, 1-51. (in Chinese)】
- 李量 (2011)。低段估算教學存在的問題及應對策略。《寧波教育學院學報》，13 (6)，130-133。【Li, Liang (2011). Problems and countermeasures to estimate teaching in primary school. *Journal of Ningbo Institute of Education*, 13(6), 130-133. (in Chinese)】
- 李曉芹 (2008)。小學兒童數字線估計的發展研究 (未出版之碩士論文)。曲阜師範大學，曲阜，中國。【Li, Hsiao-Chin (2008). *Research on the development of the digital line estimation of primary school children* (Unpublished master's thesis). Qufu Normal University, China. (in Chinese)】
- 周廣東、莫雷、溫紅博 (2009)。兒童數字估計的表徵模式與發展。《心理發展與教育》，25 (4)，21-29。【Chou, Kuang-Tung, Mo, Lei, & Wen, Hung-Po (2009). The representation model and development of children's numerical estimation. *Psychological Development and Education*, 25(4), 21-29. (in Chinese)】
- 林寶玲 (2012)。正負數量表徵的心理數線發展 (未出版之碩士論文)。國立中央大學，桃園。【Lin, Pao-Ling (2012). *The development of the mental number line in the representation of positive and negative numbers* (Unpublished master's thesis). National Central University, Taoyuan. (in Chinese)】
- 林寶貴、李如鵬、黃玉枝 (2009)。《學齡階段數學能力測驗指導手冊》。臺北：教育部。【Lin, Pao-Kuei, Li, Ju-Peng, & Huang, Yu-Chih (2009). *Instructional manual of Chinese literacy ability test for the school-aged*. Taipei: Ministry of Education. (in Chinese)】
- 莫雷、周廣東、溫紅博 (2010)。兒童數字估計中的心理長度。《心理學報》，42 (5)，569-580。【Mo, Lei, Chou, Kuang-Tung, & Wen, Hung-Po (2010). Mental distance in children's numerical estimation. *Acta Psychologica Sinica*, 42(5), 569-580. (in Chinese)】
- 潘星宇、俞清怡、蘇彥捷 (2009)。從數感看兒童數表徵的發展。《華東師範大學學報》，27 (4)，30-41。【Pan, Hsing-Yu, Yu, Ching-I, & Su, Yen-Chieh (2009). The development of numerical representation: from the view of number sense. *Journal of East China Normal University*, 27(4), 30-41. (in Chinese)】
- Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14(1), 125-135. doi: 10.1111/j.1467-7687.2010.00962.x
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333-339. doi: 10.1177/00222194050380040901
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 42(1), 189-201. doi: 10.1037/0012-1649.41.6.189
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, 79, 1016-1031. doi: 10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x

- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122(3), 371-369. doi: 10.1037//0096-3445.122.3.371
- Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., & Nuerk, H. C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 18(1), 177-183. doi: 10.3758/s13423-010-0031-3
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 206-223. doi: 10.1037/a0025398
- Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280. doi: 10.1207/S15327833MTL0504_02
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematical difficulties. *Child Development*, 77(1), 153-175. doi: 10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x
- Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, 78(6), 1723-1743. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x
- Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H. C. (2013). Walk the number line - An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 74-84. doi: 10.1016/j.tine.2013.06.005
- Moeller, K., Pixner, S., Kaufmann, L., & Nuerk, H. (2009). Children's early mental number line: Logarithmic or decomposed linear? *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 503-515. doi: 10.1016/j.jecp.2009.02.006
- Nuerk, H., Kaufmann, L., Zoppoth, S., & Willmes, K. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology*, 40(6), 1199-1211. doi: 10.1037/0012-1649.40.6.1199
- Opfer, J. E. (2003). Analyzing the number-line task: A tutorial. Retrieved from <http://www.psy.cmu.edu/~siegler/SiegOpfer03Tut.pdf>
- Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(2), 375-394. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x
- Schneider, M., Heine, A., Thaler, V., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verschaffel, L., Stem, E. (2008). A validation of eye movements as a measure of elementary school children's developing number sense. *Cognitive Development*, 23(3), 409-422. doi: 10.1016/j.cogdev.2008.07.002
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444. doi: 10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x
- Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations. *Psychological Science*, 14(3), 237-243. doi: 10.1111/1467-9280.02438

Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (3rd ed.). New York, NY: Longman.

Whyte, J. C., & Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skill in preschoolers. *Developmental Psychology, 44*(2), 588-596. doi: 10.1037/0012-1649.44.2.588