劉柏宏（2016）。
從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵─理論與案例分析。
臺灣數學教育期刊，**3**（1），55-83。
doi: 10.6278/tjme.20160413.001

從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵
─理論與案例分析

劉柏宏
國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學是人類重要的智識遺產，可是卻鮮少人注意它和文化的關係。本文嘗試從數學與文化的關係出發，特別是數學與東西方文化的互動關係，探討數學文化的內涵，並主張數學文化包含「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面。再者，數學素養一詞雖為大眾所耳熟能詳，然對其真正概念仍認識不清，而目前文獻對其內涵的論述仍然莫衷一是，難以釐清，甚至國際間的用詞也不盡相同。本文整理國際間數學素養相關文獻，分析相關詞彙定義的異同之處，以具體界定數學素養的概念。此外，本研究結合數學文化和數學素養，進一步提出數學文化素養的定義。希望透過培養學生的數學文化素養，能增進他們對數學本質的理解和學習認同。為釐清數學文化素養的概念，本文分別從「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面中各介紹與分析一個具體案例，以做為數學文化素養之參考教材。我們希望經由定義數學文化素養、論述數學文化素養的內涵、和實際分析數學文化案例等程序，能夠建立一個概念框架，以做為數學文化相關的教學、評量、與實證研究的理論基礎。

關鍵詞：數學文化、數學文化素養、數學素養、數學與文化

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
收稿：2015 年 12 月 22 日；
接受刊登：2016 年 4 月 13 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Liu, P. H. (2016).
Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(1), 55-83.
doi: 10.6278/tjme.20160413.001

Discourse on the Constituent of Literacy for Mathematical Culture in Terms of the Relationship between Mathematics and Culture - Theoretical and Case Analysis

Po-Hung Liu

Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology

Mathematics is a vital intellectual heritage of human beings, but few are aware of its relationship with culture. This study attempted to identify the constituents of mathematical culture in terms of the interrelationship between mathematics and culture, particularly the interaction of mathematics with Eastern and Western culture. We claim that mathematics in culture and culture in mathematics are the two main facets of mathematical culture. Furthermore, though the term “mathematical literacy” is well-known by the general public in Taiwan, its components and constituents are interpreted differently in the educational literature. In this study, we conducted an international comparison by reviewing and organizing relevant literature discussing mathematical literacy, and clarified the vagueness of similar concepts to find commonalities. This study then defined literacy for mathematical culture by integrating mathematical culture and mathematical literacy. Hopefully educating students in literacy for mathematical culture may increase students’ understanding of the nature of mathematics and their positive attitudes toward the learning of mathematics. In addition, we propose two exemplary cases, one for mathematics in culture and the other for culture in mathematics, to illustrate the prototype of the literature for mathematical culture. We hope that our works of defining the literacy for mathematical culture, discussing the constituents of literacy for mathematical culture, and analyzing the exemplary cases of mathematical culture may provide as a theoretical framework for the teaching, assessment, and empirical study of mathematical culture.

Keywords: mathematical culture, literacy for mathematical culture, mathematical literacy, mathematics and culture

Corresponding author：Po-Hung Liu，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
Received：22 December 2015;
Accepted：13 April 2016.

壹、前言

自 1999 年以來，無論是「國際教育學習成就調查委員會」（International Association for the Evaluation of Education Achievement, IEA）所辦的「國際數學與科學教育成就趨勢研究」（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS），或是「經濟合作暨發展組織」（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）所做的國際學生評量計劃（Programme for International Student Assessment, PISA），臺灣學生的數學成就和素養均排名在所有參與國家的前五名。但這兩項調查也顯示，臺灣學子對於數學的認同度卻落後於其他國家。OECD 指出，適當的數學素養可以幫助個人在生活上足以做為一個「積極的、關懷的、和反省的」社會公民。但臺灣這種對於數學「高成就、低態度」的現象恐將影響他們持續學習數學或往後參與數學相關工作的動機，也就無法培養出「帶得走的能力」，這不僅不利於國民數學素養的養成，也對臺灣整體社會與科技發展產生負面影響。只是近年屢屢被端上教改檯面的「數學素養」（mathematical literacy）社會大眾對其內涵仍然模糊且有疑慮。當然我們也深知廣義的「數學素養」是一個抽象且不容易定義的概念。但如果從特定面向出發，至少可以清楚界定其局部意涵。素養無法自外於文化，本文之目的即在於從數學與文化的關係，定義數學文化（mathematical culture）及分析其構面，並整合國際間對數學素養的論述，提出數學文化素養（literacy for mathematical culture）的定義並做案例介紹分析，以具體說明其內涵。

貳、數學與文化的關係

當代最負盛名的華人數學家丘成桐教授曾直言：「台灣數學教育最大問題是文化修養不夠」（何定照，2012），意指數學被過度工具化，以至於教學視野變得狹隘，而憑藉豐厚的文化底蘊才有助於做出開創性的學問。因而他自 2013 年開始在台灣主編《數理人文》期刊。他於創刊號的序言中說：

> 數學是一門很特殊的學科。它既能達成人文性的涵泳性靈，又有科學性的致知應用。……探討數學、人文與科學之間妙趣橫生的關係，讓我真正享受到了研究數學的樂趣。（丘成桐，2013，頁 1）

由此可見文化議題在數學素養與學習的重要性。本節將論述數學與文化的關係，以便進入下一節數學文化之前，能對數學與人類社會文化的互動過程有所認識。

一、西方文化中的數學

自十六世紀開始，西方科學開始對大自然展開量化分析，並憑藉其數學符號化的優勢，開創十七世紀科學革命的新局，歷經十八世紀理性時代（Age of Reason）期間數學、科學、哲學、和神學的交互思辨，為十九世紀數學灑下抽象化的種子。即使如此，數學史家克萊因（Morrise Kline）在《西方文化中的數學》一書開宗明義點出：

> 數學一直是形塑現代文化的一個主要力量，而且是文化的重要元素。不過這個論點對許多人來說是難以置信的，……這種懷疑源自普遍對於數學究竟是什麼的錯誤認知。（Kline, 1953, p. 3）

為描繪西方數學文化本質的輪廓，以下僅就數學的兩個關鍵發展期，探究西方數學發展與社會文化如何互動。

（一）古希臘的數學與文化：哲學與政治的影響

現今西方數學源頭至少可追溯自古希臘米立都的泰利斯（Thales of Miletus，約西元前624–546）。泰利斯致力於探究物質的本質，被亞里斯多德奉為哲學之父，除擅於運用數學知識解決幾何測量問題，也關注自然天文現象，正彰顯古希臘數學文化中「哲學」、「邏輯演繹」、和「自然科學」等三大特徵。畢達哥拉斯的「萬物皆數」（all thing is number）不僅是一種哲學信念，也帶有神祕的宗教色彩。柏拉圖在《理想國》一書藉由蘇格拉底之口表達他對數學知識的看法：

> 這個學科[算術]看來能把靈魂引導到真理。……哲學家也應學會它，因為他們必須脫離可變世界，把握真理，……它用力將靈魂向上拉，並迫使靈魂討論純數本身。……幾何學的對象乃是永恆事物，而不是某種有時產生和滅亡的事物。……幾何學也能將靈魂引向真理，並且能開啟哲學心靈，提升目前所厭惡的沉淪。（Plato, 360 B.C./1952, p. 394）

柏拉圖主張實用性不是數學知識的目的，學習數學是為求真與求善，為掌握物質本質須探討不變的抽象概念而非可變的具象物體，因此抽象的幾何學成為訓練思辨的最佳助力。另一方面，古希臘當時的奴隸制度使得有學問的智者能遠離被視為低階的勞務工作，只專注於高階的純思維活動（Kline, 1953）。而由於希臘的議會制度，無論各城邦是君主制或民主制，「政府施政須遵守法律，公民階層因而必須學習論證與演辯的能力。或許就在這樣的氛圍下彰顯了證明在數學中的必要性」（Katz, 1998, p. 47），而這也正是形成歐幾里得編撰《幾何原本》的社會文化背景（張奠宙，2005）。西元前 325 年馬其頓的亞歷山大大帝將雅典的數學傳統引入埃及，形成

亞歷山卓學派，而歐幾里得便是此派代表人物。歐氏整理當時已知的數學知識，藉由事先約定的五項公理（axioms）和五項設準（postulates，或稱公設），以邏輯演繹的方式，循序漸進地證明了 465 個命題，成功豎立起邏輯演繹的數學典範。亞歷山卓學派的數學學者樂於將數學知識應用於實際問題之上，而這特徵在阿基米德的工作得到最佳的體現（Kline, 1953）。阿基米德除保有注重演繹證明的希臘數學傳統，他對實用工程技術的關注也受到其家鄉敘拉古（Syracuse）遭受羅馬軍隊武力威脅的影響，再次顯示社會文化背景與數學研究取向的關係。

（二）科學革命世紀的數學與文化：美學、神學、與定量科學觀

於西元 313 年羅馬帝國皇帝君士坦丁一世（Constantinus I）頒布《米蘭敕令》，宣告基督教為合法宗教，開啟政教合流的體制。接著查士丁尼一世（Justinian I）於西元 529 年下令關閉柏拉圖學院，更象徵著古希臘人文精神的結束，歐洲逐步邁入 Bullock（1985）所謂西方學術思想的「神學模式」，而數學也日漸淪為配合技術的工具性角色。直到約 800 年後，歷經東西方的戰爭、商業交流、與希臘典籍翻譯等文化激盪，人文精神的種子再度於義大利生根發芽，開啟所謂的文藝復興時期。此時人們開始從人的角度思考「人、上帝、與自然」之間的關係，因而展開西方思想的「人文模式」。這時由於數學知識的相對真確性，它不僅進入自然哲學（natural philosophy），也開始滲透到美學與神學領域。

十七世紀史稱科學革命世紀，歐洲進入 Bullock 所稱的「科學模式」，但究其根本並無法與「人文模式」和「神學模式」切割。在文藝復興時期，科學與藝術是上流知識分子所崇尚的一種文化，而射影幾何的發展就是源自文藝復興繪畫的透視法則，是藝術回饋科學的絕佳案例（張之傑，1997）。笛卡兒（Rene Descartes, 1596-1650）的數學工作係奠基於他虔誠的宗教信仰和哲學之上。在《方法論》（A Discourse on Method）這本哲學論著中藉幾何性質之確定性，論斷「上帝」必定存在：

> 我也注意到這些[幾何]論證不必然保證那些對象的存在。例如我覺察到一個三角形的三內角和必等於二直角，但不必然保證有任何三角形的存在。相對的，當重新審視至善之物的觀念時，我發現其存在性是被包含在概念之中，正如同（甚至比這更明顯）三角形的三內角等於二直角已被包含在三角形的概念之中……。由此可推，至善之物（即上帝）的存在至少和任何幾何證明同樣真確。（Descartes, 1637/1997, p. 28）

很明顯地，笛卡兒是仿效柏拉圖所說，完美三角形只存在於概念之中的說法，論證上帝存在的真確性。

另外我們必須注意到，十七世紀最偉大的數學與科學貢獻雖然來自於牛頓（Isaac Newton, 1643-1727）、萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716）、與伯努利（Bernoulli）家族等人，

但究其思想根本應歸功於伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）徹底改變當時的研究物體運動的觀點。柏拉圖與亞理斯多德師徒二人對於真理的追求理念一致，途徑卻殊異。前者主張唯抽象數學才能理解萬物變化背後的本質；後者卻認為變化是萬物常態，須憑藉感官觀察方是正道。而伽利略結合兩者，透過觀察並記錄物體運動的變化，再以定量的數學方法呈現物體運動規律，從此科學進入數學化的時代。所以科學革命不能解讀為表象知識的革命，其實際內涵是研究焦點從「物體為何運動」轉移到「物體如何運動」的一種觀念革命。

二、東方文化中的數學

在此所謂東方文化中的數學將以中國傳統數學（中算）為代表。這是由於亞歷山大大帝東征時期已將部分古希臘數學的思想輸入阿拉伯地區和印度，而中國古代數學始終自成一家。至於日本的和算與韓國的東算雖各有特色，但論其本質仍不脫離中算的色彩。Kline（1972）在三大巨冊的《數學古今思想史》並未將中國古代數學發展納入，因為他認為中國古代數學並未對當代數學的主流思想產生影響。但若以文化論點觀之，即使中國古代數學知識似乎並未影響西方數學的發展，但其呈現的方式恰代表數學「演算」的典範，可以和古希臘數學的「演繹」典範做對比。以下兩節分別舉先秦時期和宋元時期為例，以比較數學在東西文化中的差異。

（一）先秦時期的數學與文化

歷史上，先秦諸子的百家爭鳴與古希臘哲學學派的思想崢嶸，幾乎同時發生在西元前六世紀至西元前三世紀之間，不過兩者對數學發展的影響卻大相逕庭。儒家雖將算學列為六藝之中，不過洪萬生（1991）直陳：「數學在孔子的儒學體系中是沒有任何地位的」（頁 3），因為孔子強調「德行之學」，不重視客觀論證，而算學只是技術官僚必備的工具性知識。不過另一方面，在當時與儒家並稱的墨學卻展現類似歐氏幾何的論證方式。如《墨經》<經上>第 52 條：「平，同高也」；第 58 條「圓，一中同長也」；第 59 條：「方，柱隅四讙也」等等，都頗具演繹風格。只是墨子「兼愛非攻」的理念並不見容於列國諸侯，再加上董仲舒「諸不在六藝之科、孔子之術者，皆絕其道，勿使並進。」的主張，使得墨子的演繹精神無法獲得重視與延續。

從《漢書‧律曆志》所載：「數者，……夫推曆生律制器，規圜矩方，權重衡平，準繩嘉量，探賾索隱，鉤深至遠，莫不用焉。」可以知道漢代對算學用處的評價仍在於測天文、量地理，因此數學知識掌握在天文台疇人、低級的官吏和工匠手中，其社會地位都不高（洪萬生，1991）。而成書約於東漢的《九章算術》是中國古代最具代表性的數學文本，係積累自春秋戰國時期的數學知識，而我們卻發現《九章算術》與先秦諸子百家的思想幾乎無關。再從西元六世紀顏之推在《顏氏家訓》中對子孫的告誡：「算術亦是六藝要事，……然可以兼明，不可以專業」，最能理解當時儒家對數學的態度。

（二）宋元時期的數學與文化

宋代可謂是中國歷史上「理性發皇」的時代（劉昭民，1982）。當時航海天文知識與量測技術達到巔峰，刺激數學計算的發展，形成宋元是中國數學的全盛時期，其中賈憲的「增乘開方法」、秦九韶的「大衍求一術」、直至元代朱世傑的「垛積術」等在中世紀數學都居於領先地位。且當時印刷術的發明有助於知識的流傳與普及，造就宋代理學成為儒家思想的另一高峰。只是當時理學大儒如朱熹等人，無一人重視學算，致使到了明代，雖然理學繼續傳承，但知識份子對宋元的天元、四元學說已無法正確理解（陳進傳，1982）。難怪徐光啟於〈刻《同文算指》序〉中嘆道：「算數之學特廢於近世數百年間爾。廢之緣有二：其一為名理之儒土苴天下之實事；其一為妖妄之術謬言數有神理」。

從以上對東西方的數學與文化的比較可以發現，中國傳統上將算、數之學視為技學之門，而西方則將之與哲學、神學並列。這兩種文化對數學迥異的態度造就出「演算」和「演繹」兩條不同路徑。從文化角度而言，本無優劣之分，但以現代學科傾向專業分殊化的潮流來看，演繹法則有利於建構理論體系，而這也是西方數學之所以能勝出的原因之一。

參、何謂數學文化

早期各國數學教育係著眼於菁英教育和職業教育，鮮少考慮數學與社會、歷史與哲學等文化面向的關聯。不過二十世紀後期由於高等教育日漸普及，倡議「普羅大眾數學」（mathematics for all）的呼聲四起，數學不再只是扮演工具性的實用角色，而是社會公民終身學習的一環，因此數學的文化面向日益受到重視。然而數學文化面向的範圍甚為廣泛，必須適度釐清才能談數學文化素養的內容。

一、數學文化的內涵

數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種文化，殆無疑議，而「數學文化」究竟所指為何？由於一般文章在論述「數學文化」時，鮮少將它定義清楚，有時指的是數學知識本身，有時又指數學知識產生的背景脈絡。更有人質疑既然數學本身就是一種文化，那數學文化指的又是什麼？本文在此引用 Kroeber 與 Kluckhohn（1952）在參酌 164 種文化的定義後所下的結論：「文化包含行為的外顯和內隱模式，並藉由構成人類群體獨特成就的符碼來傳遞」（p. 181），並將數學文化定義如下：

> 數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。

再根據 Kroeber 與 Kluckhohn 的論述可以看出端倪：

> 文化的基本核心係由透過歷史演繹與選擇所形成的傳統觀念，特別是與它們所附帶的價值所組成。文化系統在某方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為決定下一步行動的元素。（p. 357）

由此可以瞭解文化雖是行動的產物，卻可能在下一刻成為我們行動決策的要素。因此探討數學文化不僅僅具有知識論的意涵，更具有教育上的價值。

而關心數學文化的學者們主要是從「數學在何種意義上是一種文化？」及「數學有何特徵可謂是一種文化？」和「什麼是數學文化的特徵及內涵？」等諸多面向論述。張維忠（2005）從文化學的「廣義及狹義通說」及「文化的行為系統」和「文化的歷史性」三種不同角度對數學的文化性進行論述，從而在「數學對象的人為性」、「數學活動的整體性」、「數學發展的社會歷史性」層面指出數學是一種文化。張維忠另外指出美國數學家 Wilder 在 1981 年從數學人類學的角度提出「數學：一種文化體系」的數學哲學觀，認同從哲學研究的深入得以讓我們認識到數學的發展與人類文化休戚相關。張楚廷（2006）指出文化即人文，即人的精神。數學不只是關於數的世界、形的世界、或更廣闊世界的科學，數學還是一門充滿人文精神的科學。因此張楚廷是從數學美學、數學與人的發展、數學哲學、數學與語言及數學與文學、藝術、經濟、教育等關聯談數學文化。

易南軒與王芝平（2007）則從多元視角論述數學文化的概念。認為數學不僅是一門知識，也是一種素質，數學文化是現代人文化素質的重要組成部分。提出從文化的廣義及狹義通說來看，數學內容、思想、方法和語言，已成為文化的重要組成成分。數學的觀念，如推理歸納、整體抽象、和審美意識等等都具有精神領域的功效，蘊含著深厚的人文精神，具有文化內涵。他們認為數學是歷史發展的文化、是一種多元的文化、是社會生活的文化、是價值的文化。汪曉勤（2013）雖無論及數學文化一詞的相關意涵及概念，但從其文字篇章不難了解他希望讀者能了解數學是人類一種文化活動，且數學與人類文明有著密切關係。

綜上所述，各家學者對於數學文化的定義雖未直接明確地提出界定，但對「數學文化」一詞的認知概念頗為一致。一方面從文化的角度領略數學全貌，另一方面從數學歷史與哲學觀談數學文化。

二、數學文化的構面

Wilder（1952）指出，數學發展的情況及方向係由一種普遍綜合的文化張力所決定，這種張力既產自數學內部，也來自數學外部，因此「數學文化」一詞的涵義主要包括兩個大構面，一個是「文化中的數學」，另一個是「數學中的文化」，前者是從文化的角度出發，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色（mathematics in culture）；後者指數學知識發展

過程中其內部知識與社群所顯現的文化特質（culture of mathematics），這兩者呈現一種交錯的有機互動發展，以下分別簡述兩者的意涵：

（一）文化中的數學（mathematics in culture）

探究「文化中的數學」就是理解數學知識宏觀發展的歷程。數學發展的第一道曙光來自於大自然，之後由於人類各種族文明與社會的演進方式和歷程的獨特性，因而造就出不同的理路與思維文化，也就誕生不少「同質異態」的數學知識產物。Struik（1948）早就指出，數學已經被農業、商業、工業、戰爭、工程、哲學、心理學和天文學所影響，要瞭解數學就必須將這些關鍵因素納入考量。事實上數學知識的社會文化觀早在十九世紀即已萌芽，例如歐洲活版印刷術的發明對文藝復興時期數學知識的傳播有推波助瀾的效果，之後不僅促成十六、七世紀的科學數學化，甚至引發科學革命。但是這種數學知識和社會文化之間的關係並非呈現一種必然的發展趨勢。例如活版印刷術發源更早的中國就沒有類似的發展模式，這就與各文化中的數學傳統有關，而數學傳統又建立在社會文化基礎之上，如圖 1（引自蕭文強，2008）揭示數學與其他學科之間內外張力的互動關係。從圖 1 更可看出，數學發展除受在地文化（host culture）的影響，不同民族之間的文化融滲也可能引領數學的走向，如前述古希臘數學曾受古埃及和古巴比倫的影響，之後又影響阿拉伯和印度的數學。

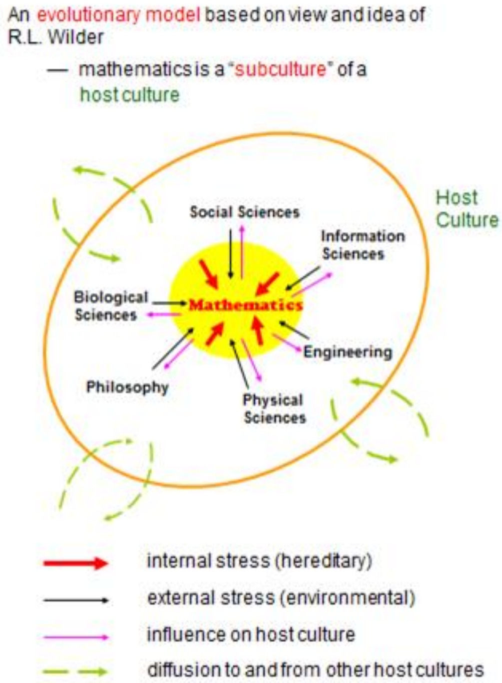


圖 1 數學知識演化模型。引自「從離散數學到數學文化」，蕭文強，2008，**專題演講發表於 2008 組合數學暨新苗研討會**，國立交通大學。Retrieved from http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf

之後由於西方數學的符碼系統具有操作便利的優勢，其數學發展樣態已成為數學研究的主流，致使數學知識的文化差異逐漸消退。但是理解這種「同質異態」的發展脈絡，就更能從文化比較的角度清晰解讀數學本質，以引發知識創造者和使用者對於數學知識內涵與自身文化的反思。所以探究「文化中的數學」至少必須考量下面幾個趨向：

1. 歷史的：從歷史角度來看，數學最初只是人類文化的一部分，但之後隨著數學本身和人類文明的進步，數學逐漸表現出相對的獨立性（張維忠，2011）。
2. 社會的：部分數學知識因應社會所需而社會化，而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展，社會因數學發展而進步（方延明，2007）。
3. 民族的：數學知識經常被視為超越種族地域的真理，但客觀事實也說明，數學知識的發展仍具有民族的歧異性。近年興起的民族數學（ethnomathematics）研究可看成是一種關於數學的人類文化學（張維忠、唐恒鈞，2008）。

（二）數學中的文化（culture of mathematics）

探究「數學中的文化」就是理解數學知識的微觀發展歷程。大自然提供發展數學知識的第一道曙光，而人類的思維就是促進數學知識滋長的養分，刺激數學之樹成長茁壯。數學家的思維模式至少受三個不同階段但環環相扣的因素影響，一是數學家所處的社會文化，也就是前述「文化中的數學」；二是數學家所屬的數學社群，也就是數學家之間透過相互溝通所建立的有形與無形的學術規範；三是數學家個人獨特的內在思維理路，這牽涉到數學家對數學知識的信念、價值判斷和審美觀。尤其 Byers（2007）特別強調數學家透過創意將晦澀、矛盾和弔詭的概念轉化為數學知識那種靈光一現的蘊育過程。由於個人的信念、價值判斷和審美觀不斷與社會文化脈絡和社群同儕對話，數學家遂而創造出個人的數學知識，之後透過數學社群的同儕檢驗，逐漸形成穩定的知識結構。所以探究「數學中的文化」至少必須考量下面三個階段：

1. 歸納猜想：這是數學家進行思想實驗時最初始、也是最關鍵的階段。數學家華羅庚曾說：「千古數學一大猜」，意謂所有的數學定理都是透過觀察、歸納與猜想衍生而來。引發數學教育界研究「數學解題」（problem solving） 風潮的匈牙利數學家波利亞（George Pólya）就不斷強調數學臆測的重要性（Pólya, 1954）。
2. 演繹證明：任何猜測未經嚴格的檢驗仍舊只是一個不成熟的暫定事實，笛卡兒就指出，事實的真理是靠歸納經驗得來、是偶然的、是個別的；推理真理靠邏輯演繹得來，因此是必然的、是普遍的（Descartes, 1637/1997）。這個階段通常也是數學概念抽象化的開始。
3. 社群辯證：當代數學哲學已揭示數學知識不僅是一種自我建構的過程，更是社會群體建構的產物（Ernest, 1998），個體所提出的任何「準命題」仍須透過個體和群體的相互辯證過程確認其恆理性，而這階段經常牽涉到信念、價值與美學的判斷。

以懸疑三百多年的「費馬最後定理」為例，費馬宣稱有絕佳證明，卻沒有寫出。到這階段只能將此結論視為費馬個人觀察歸納之後的猜想。懷爾斯（Andrew Wiles）花了七年時間，於 1993 年透過橢圓函數證明費馬猜想的正確性。但經公開檢驗後發現存在著推論邏輯上的瑕疵，於是懷爾斯又辛苦地花了將近兩年時間才完成嚴謹的證明（Singh, 1998）。整個過程歷經「歸納猜想」→「演繹證明」→「社群辯證」三個階段，這就是屬於數學知識特有的文化體系。

因此綜合來說，數學文化就是由「文化中的數學」和「數學中的文化」兩個構面共同交錯激盪所引發的概念系統（圖 2）。圖 2 中的各個構面呈現動態穿插的狀態，而且彼此間相互交叉牽引，環環相扣，任一構面的變化都可能引發不同數學文化的發展。西元前 326 年，亞歷山大大帝征服印度的西北部，將希臘的天文學與三角學傳到了印度，影響往後印度數學的發展。而阿拉伯人將印度數字系統傳到歐洲，又改變西方數學的風貌。只是這個交叉構面模型仍不足以解釋數學文化細緻的演變情形。比方為何古印度數學沒有轉變成古希臘的數學演繹風格？這可能與古印度數學受宗教影響有關。畢竟數學文化只是人類的次文化，仍難與當時社會主流文化相抗衡。

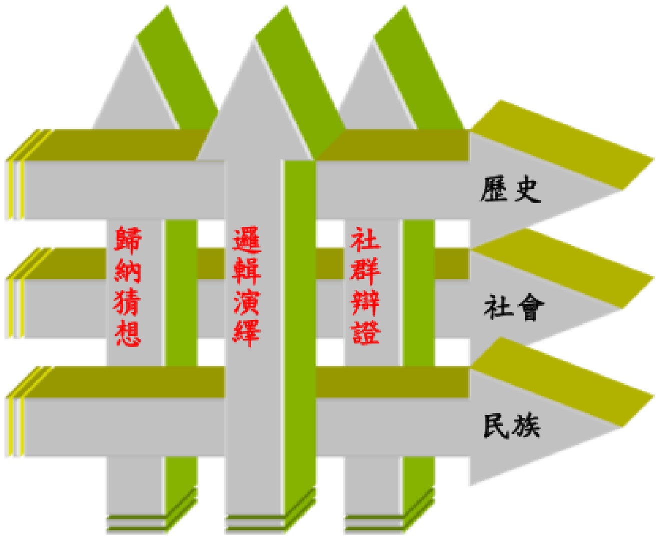


圖 2　數學文化縱橫構面

肆、數學素養

由於數學素養是個抽象的概念，本節將針對國際間對數學素養的論述做比較分析與整理，以便在下一節中討論數學文化在數學素養所扮演的角色。

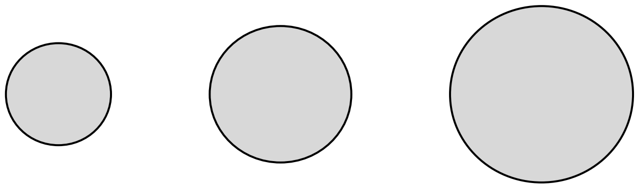
一、何謂數學素養

「素養」一詞在《辭海》中的解釋是指「平時的修養」，而其英文的對應字確有值得探究之處。目前較為臺灣學者所接受的英文對應字是「literacy」。但根據 Merriam-Webster 字典，「literacy」的原意是指一個人的「讀寫能力」，或者「特定學科的知識」。因此張一藩（1997）認為 literacy 與素養的中文意義不符，應翻譯為「識能」較為妥切。但是聯合國教科文組織（UNESCO, 2003）訂定 2003-2012 年為全球的「素養十年」（Literacy Decade），並認為 literacy 一詞在當今資訊社會中不能再僅侷限於讀寫能力，它關係到我們在社會上如何溝通，關係到社會的實踐，關係到知識、語言和文化。因此「literacy」的概念定義應該隨社會發展呈現一種動態的演變。例如 Kouba 等人（1998）主張，素養意涵不應拘限於基本的讀寫聽說能力，而是指能進一步思考與運用語文的內涵，從知識與經驗中獲得啟發，並整合不同的觀點。近年國際間紛紛以 PISA 的數學素養評量為依歸，而 PISA 對數學素養的定義如下：

> 個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於了解數學在世界裡扮演的角色，也能幫助未來的公民，做出有所依據且具反思性的判斷與決策。（OECD, 2013, p. 25）

在此定義之下，PISA 發展出數學素養試題，舉一例如下*：

> 你被要求設計出一套新的硬幣。所有硬幣都是圓形，且顏色都是銀色，但是有不同的直徑。



> 研究者發現了一個理想的硬幣系統，要符合以下要求：
>
> - 硬幣直徑不可小於 15 毫米，且不可大於 45 毫米
> - 已知一個硬幣的大小後，下一個硬幣的直徑必須比它大至少 30%。
> - 鑄幣機械只能製造出直徑為整數的硬幣（如：可以製造 17 毫米，但無法製造 17.3 毫米）

問題：

請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。從一枚 15 毫米的硬幣開始，而且在你這套新硬幣系統裡，要盡量包含愈多的硬幣，則這套新硬幣系統裡的硬幣直徑分別為多少？

*題目來源：經濟合作暨發展組織 OECD（Organisation for Economic Co-operation and Development，中文翻譯版權：國立臺南大學與臺灣 PISA 國家研究中心）

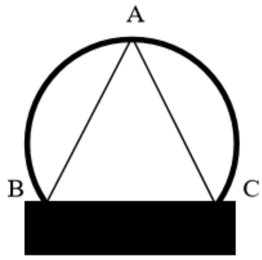
這單一題目並不足以符合數學素養的所有要件，但是我們可以發現學生確實需要在這有條件限制的真實問題脈絡中，利用數學工具去解決問題，做出有所依據的判斷與策略。值得注意的是，數學素養是抽象的概念，但是任何有形的評量都必須依賴外顯可見的行為表現為參考指標，所以解決素養問題只是衡量素養的指標之一。

由於 PISA 測驗的對象是 15 歲的學生，而本文關注的範圍亦包含完成十二年國民基本教育的 18 歲學生，因此對於數學素養的定義必須予以擴充。根據李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013）指出，由於 PISA 對於「數學素養」的定義已得到國際上廣泛的採納，因此以其為基礎並參照國情，將完成十二年國教之國民數學素養內涵更加明確闡述如下：

數學素養的核心內涵應指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。（p. 19）

與 PISA 的定義相較，「教育部提升國民素養實施方案」更強調已完成十二年國民基本教育的學習個體，能在各式情境脈絡中辨識所面對的問題與數學的關聯，並能發揮數學思維解決問題，更重要的是能有效溝通，以做為進入大學或職場的先備基礎。為檢測學生是否能達成教育目標，「教育部提升國民素養實施方案」已發展出符合本土脈絡之素養試題，茲舉一道已公開之題例如下**：

左下圖是某個美術館的入口，該館入口是個圓弧造形的隧道，地面寬度估計為八公尺。工作人員站在中點，測得圓弧形入口最高處也是八公尺。



問題一：該館周年慶，工作人員想在圓弧形入口的最高點 A 點，至地面兩端點 B 與 C，懸掛彩帶佈置（如右上圖所示），試問彩帶（$\overline{AB}+\overline{AC}$）的長度至少需要多少公尺？

問題二：請問圓弧形入口最寬的部分是幾公尺？

**題目來源：「教育部提升國民素養實施方案--數學素養計畫」

我們可以發現這問題將學生置身於假想的職業情境中，檢測他們是否能辨識問題與數學的關聯，並根據數學知識和運用數學技能去模擬與解釋各種現象。透過這問題可以讓學生發現，即使是再單純不過的場地布置，都須應用幾何性質才能圓滿解決。

二、國際間對數學素養的定義與關注

在討論國際間對數學素養的論述之前必須了解，各國關於數學素養的用詞與定義並不一致。例如英國和曾受其殖民的國家與地區經常用 numeracy 一詞（即 number 和 literacy 的結合）；美國國家研究委員會（National Research Council [NRC], 2001）則使用 mathematical proficiency；而 quantitative literacy, mathematical literacy, mathematical competency 等也都被曾用來指稱與數學素養類似但並不等同的概念。下段論述中提到這些名詞時都會說明其定義與內涵，以助我們釐清諸多名詞之間的異同。

（一）英國對數學素養的定義

目前文獻中較早提到與數學素養相關的詞彙是 1959 年英國教育部所出版的《Crowther Report》。報告主要探討 15-18 歲青少年的教育方針。報告中定義 numeracy 為「我們不僅僅指量化推理的能力，也須理解科學方法，並對科學成就有些熟悉」（Crowther, 1959, p.282）。此處的量化推理是指透過量化思維去瞭解目前社會所面臨問題的困難及形態，而對科學的理解則是指對觀察、假設、實驗、驗證等科學研究方法的認識。很顯然這定義並不侷限於數學學習本身，

具有高度的願景，偏向菁英教育的觀點（黃友初，2013）。

不過二十年之後由於數學課程不能符合經濟發展和學生就業需要，英國首相 Jim Callaghan 於 1978 年向國會報告指出，將調整中小學數學課程，使之更能配合未來教育、個人職場、與成人學習之需要。因此由 Cockcroft 博士率領 21 人小組重新界定數學素養。《Cockcroft Report》仍沿襲 numeracy 一詞。Cockcroft 對 numeracy 的解釋是，它包含兩項特徵，一是熟悉並能以數學方式處理平日生活中的數字，二是能夠欣賞與理解以數學型態所呈現的資訊。《Cockcroft Report》在前言就強調，數學是一項有效且精確的溝通工具，數學素養不僅僅是計算，過度技術操作無助於理解，老師的責任之一是協助學生欣賞數學並樂於其中。受《Cockcroft Report》影響，與大英國協有密切關係的國家也紛紛採用 numeracy 一詞表示數學素養。

（二）美國對數學素養的定義

除了 numeracy 之外，美國也使用 quantitative literacy 或 mathematical literacy 表示數學素養的概念，但在內涵層次上有所不同。在 Kirsch、Jungeblut、Jenkins 與 Kolstad（2002）所編撰的《美國成人素養》（Adult Literacy in America）中將 quantitative literacy 分為五等級，都侷限於生活中所需處理數據的技能，小則能處理帳單上的計算，大到能計算房屋貸款的利息。「全國教育統計中心」（The National Center for Education Statistics）則將之擴大到薪水帳冊、交通時程表、地圖、表格與圖形等等的理解與運用能力。而《生活技能國際觀察報告》（International Life Skills Survey, 2000）採取更寬廣的角度指出，quantitative literacy 意指「*舉凡個人在日常生活與工作的量化情境中，必須有效處理事務所需具備的技能、知識、信念、傾向、心智習性、溝通能力和問題解決技巧*」（引自 Steen et al., 2001, p. 7）。有鑒於此，Steen 等人（2001）整合上述不同定義和 PISA 所提 mathematical literacy 的內涵，列出 quantitative literacy 的十項元素：1. 對數學的信心、2. 文化欣賞、3. 資料解讀、4. 邏輯思考、5. 決策、6. 情境數學、7. 數感、8. 實用技能、9. 先備知識、10. 符號感知。

Steen 等人（2001）所領導的量化素養設計團隊在某種程度上視 quantitative literacy 和 numeracy 為相似詞，不過和 mathematical literacy 則有些差異。Steen 等人特別說明日常生活需要的偏向 quantitative literacy，教育上需要的則偏向 mathematical literacy；一般學校科目需要的是 quantitative literacy，而工程與物理科學需要的則是 mathematical literacy。言下之意，比起 quantitative literacy，mathematical literacy 在理念層次上較高、更廣。此外，仔細觀察可以發現 Steen 等人所列出 quantitative literacy 的部分元素似乎不完全在前述各家的定義範圍之內，例如提出「文化欣賞」就是一個獨特觀點。

不同於 Steen 等人的論述偏向靜態的知識內容，另一位美國學者 David Pugalee 提出一個數學素養雙迴圈動態模型（圖 3，Pugalee，1999），其中內迴圈包含溝通（communication）、科技

（technology）與價值（values）。代表數學素養的內動趨力（enablers），外迴圈包含表徵（representing）、操作（manipulating）、推理（reasoning）和解題（problem solving）等數學素養的外顯程序。其中內外迴圈會形成交叉作用，例如對解題者而言，良好的數學溝通須依賴適當的表徵，以方便操作與推理，才能順利解題。而應用科技（如數位工具），可以輔助文字溝通和符號表徵之不足，協助完成外部迴圈。價值是最內隱的驅力，它不僅影響表徵的選擇和推理程序，也左右解題者的數學操作方式和解題策略。綜合 Steen 等人的「五面向」、「十元素」和 Pugalee 的雙迴圈模型，數學素養的整體框架已隱然成形。

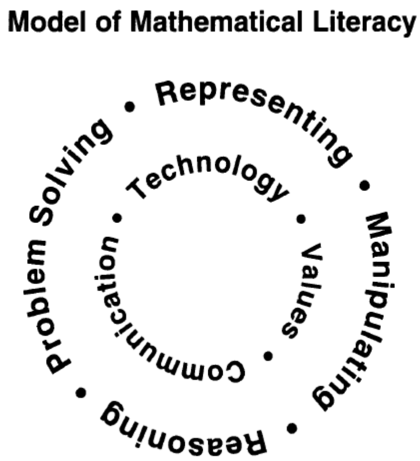


圖 3　數學素養雙迴圈模型。引自 "Constructing a model of mathematical literacy," by D. K. Pugalee, 1999, *The Clearing House*, *73*(1), p. 20.

（三）歐洲對數學素養的定義

除英國外，在歐洲對數學素養著力最深的首推丹麥學者 Mogens Niss 和荷蘭學者 Jan de Lange。Niss 和其團隊針對丹麥數學教育發展出 KOM project（KOM: Competencies and the Learning of Mathematics）（Niss & Højgaard, 2011）。由於 Niss 原是數學家，之後轉型成為傑出的數學教育學者，因此 KOM project 引起歐洲學者廣泛的討論，對 PISA 數學素養意涵也有深遠影響。值得注意的是，Niss 提出「mathematical competence」和「mathematical competency」兩個名詞，容易產生混淆。根據 Niss 的定義，「mathematical competence」較接近所謂的數學素養：「數學素養指在各式各樣數學脈絡的內外部，和數學能發揮功能的情境中，去理解、判斷、從事、和使用數學的能力」。（Niss, 2003, pp. 6-7）。而「mathematical competency」是一組構成數學素養的主要元件，彼此相異且能夠清楚辨識。由此看來，mathematical competency 是指認識特定數學構面的能力，在此暫且翻譯為「數學識能」，而數學素養包含下列八個識能構件：1. 數學式思考、2. 數學布題與解題、3. 數學建模、4. 數學式推理、5. 數學表徵、6. 處理數學符號和形式、

7. 數學溝通、8. 利用輔助工具。與 Steen 等人（2001）所列出 quantitative literacy 的十項元素相較，Niss 的八個構件似乎比較強調程序處理面向。而 Niss 將這八個構件巧妙地串成所謂的「KOM 之花」（圖 4）（Niss & Højgaard, 2011），並分為「To ask and answer, in, with, about mathematics」和「To deal with mathematical language and tools」兩個構面。Højgaard（2009）以一句更簡潔的話解釋數學素養：「素養是個體回應特定數學情境的挑戰時具有見識的從容」（p. 226）。

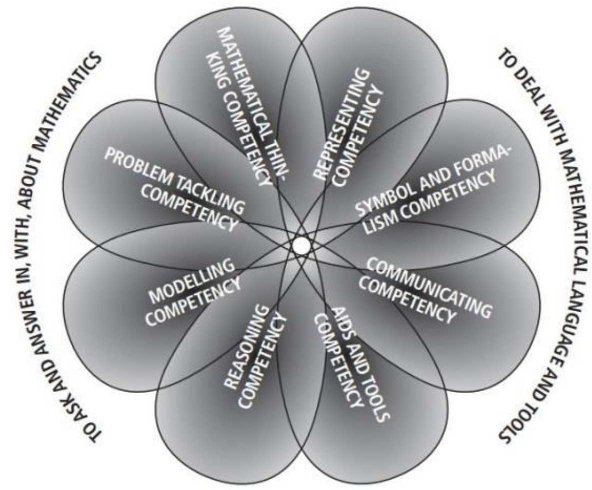


圖 4　KOM 之花。引自 *Competencies and mathematical learning–Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (p. 51), by M. Niss & T. Højgaard (Eds.), 2011, Roskilde, Denmark: Roskilde University.

另一方面，Jan de Lange 是負責 PISA 評量的主席，對數學素養議題當然有著高度關心，也考量各地區對數學素養論述的雷同與差異。de Lange（2003）以 Steen 等人（2001）的定義為例，認為 mathematical literacy 在意涵上確實比 quantitative literacy 更廣泛。在參酌 Niss 的八大構件後，de Lange 強調，為釐清數學素養內涵，須先了解數學的組成究竟為何。綜合各家說法 Lange 將數學知識區分為數量（quantity），空間與形狀（space and shape），變化與關係（change and relationships），和不確定性（uncertainty）。這四部份也成為 PISA 評量所採用的架構。從這四個知識組成出發，de Lange 描繪出數學素養（mathematical literacy）的關係架構圖（圖 5），圖中由空間與形狀衍生出 spatial literacy；數量衍生出 numeracy 和 quantitative literacy；變化與關係和不確定性衍生出 quantitative literacy；而 spatial literacy、numeracy 和 quantitative literacy 都可以歸結為 mathematical literacy。也就是 de Lange 試圖整合數學素養的相關概念，並以 mathematical literacy 一詞統括。de Lange 的關係架構圖當然並不完備，恐會遭受一些質疑。比方英國學者可能會主張 numeracy 也牽涉到解讀數字的不確定性，而美國學者也會認為空間與形狀中牽涉到量體概念，也是 quantitative literacy 的一環。

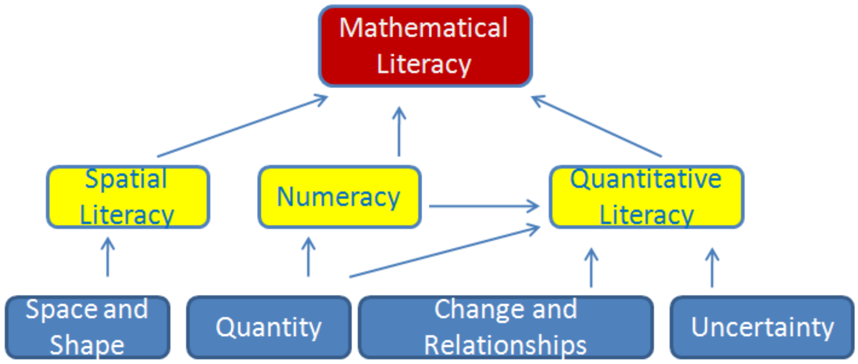


圖 5　數學素養關係架構圖。引自 “Mathematics for literacy,” by J. de Lange, 2003, In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy*: *Why numeracy matters for schools and colleges* (p. 81). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.

雖然 de Lange 在圖 5 中已試圖整合眾家之言，本文再整理國際間對數學素養的各式論述於表 1，以供讀者參照。

表 1

國際間數學素養相關名詞及內涵

	Numeracy	Quantitative Literacy	Mathematical Competence	Mathematical Literacy
地區	大英國協國家	美國	瑞典等北歐國家	荷蘭
主要倡導者	Crowther Report Cockcroft Report	Kirsch, Steen	Niss, Højgaard	de Lange, OECD
素養內涵	能處理日常生活中的數據，並理解以數學型態所呈現的資訊。	處理生活中所需數據計算，和表格與圖形等的理解與運用能力。	在各式數學脈絡中，能理解、判斷、從事、和使用數學的能力。	在各種脈絡裡使用數學的能力，包括推理以及使用工具描述、解釋、預測現象。

有鑑於 PISA 的數學素養概念已為大多數先進國家所接受，本文將以 mathematical literacy 做為數學素養的對應詞彙，並參考 OECD 的定義。

伍、數學文化素養

如前所述，Steen 等人（2001）早就提出數學素養須包含文化素養。而 de Lange（2003）評論 Niss 關於 mathematical competence 的八個構件時也強調從歷史、哲學和社會觀點欣賞數學是當務之急（p. 77）。Niss 與 Højgaard（2011）在解釋 KOM project 的內涵時更說明這份報告不只

把數學當做一個理論學科看待，也重視與其他領域的聯結。Niss 和 Højgaard 更特別指出和文化與社會的連結（p. 18）。前述關於數學文化的論述闡明了數學本質中特定的文化面向，Steen（1990）也提出文化素養在數學學習中的重要性。不過 Steen 所關心的較偏向「文化中的數學」，而本文主張「數學中的文化」在整個人類知識文化中有其獨特性，是由歷史上無數數學家社群所建構，具有傳承的價值，不可偏廢，因此在此提出「數學文化素養」這重要概念。

一、數學文化素養的定義

有鑑於目前文獻中並無數學文化素養（literacy for mathematical culture）的正式定義，綜合前述關於數學素養和數學文化的論述，本文將「數學文化素養」定義如下：

> 數學文化素養係指個體對數學知識的形成脈絡和發展過程所具備的理解程度，使其面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯；或是面臨生活與社會問題時，能辨識該問題與數學知識的關聯，從而根據數學思考模式和數學知識技能，做出理性反思與判斷，並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值。

與前述數學素養定義相較，數學文化素養更強調所謂理解某個數學概念，並非僅僅知道其定義、性質、與應用，而是「面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯」，進而「從解決問題的歷程中認知數學的人文價值」。例如數學家赫許（Reuben Hersh）在《數學究竟是什麼？》（Hersh, 1997）一書就列出四項數學知識的特點：

1. 數學是人類文化的一部分。
2. 數學知識並非毫無謬誤。就像科學一般，數學藉由犯錯、修正、再修正的過程而精進。
3. 證明和嚴格有不同的樣貌，端視時間、地點、與對象而定。
4. 和文學、宗教一樣，數學是社會歷史所衍生具有殊異性的族類。

其中 2, 3 兩點更突顯數學知識建構過程的經驗性，是對柏拉圖主義所主張數學是先驗恆定真理的一項挑戰。數學哲學界約莫從 1970 年代後期開始重視數學的經驗性，其中普及書籍的代表作有二，一是克萊恩（Morris Kline）的《數學：確定性的失落》（Kline, 1982），另一是拉卡托斯（Imre Lakatos）的《證明與反駁》（Lakatos, 1976）。前者根據諸多歷史案例指出數學的發展歷程包含錯誤的證明、推理的疏漏、概念的認知錯誤等等，其實很不邏輯。後者則強調「思想實驗」與「準實驗」的角色，以突顯數學建構過程中「觀察特例→猜想規律→建構反例→修正猜想→提出證明」的程序典範。

二、數學文化素養的案例與分析

為幫助讀者能更具體地理解數學文化素養的內涵，本節將分別從「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面，各舉一教材案例進行介紹與分析。

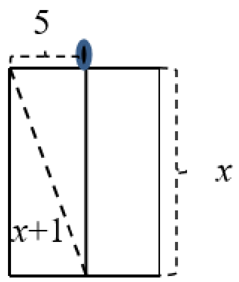
（一）文化中的數學：從具象到抽象

求解方程式幾乎是中學之後所有數學學習的重心，由此可以看出方程式在數學的關鍵角色。文化中的數學所強調的焦點之一就是賞析歷史上各古文明獨特的思考方式，以下介紹不同民族的方程式解法，以顯示數學思考的文化特色。

案例一：方程式解與群論

在 1858 年英國人亨利萊茵（Henry Rhind）所發現的古埃及草紙中的第 24 數學問題是：「一 aha（堆）和其七分之一相加得 19，求 aha 為多少？」，這裡的 aha 相當於現今的未知數 x，以現代的數學語言表示就是“$x+\frac{1}{7}x=19$，x=?”。萊茵草紙中使用所謂的試位法（method of false position），先假設 aha=7，aha 和其七分之一的和為 8，但題意告知應該是 19，所以將 7 放大 19/8 倍就得到正確的 aha 值，也就是 133/8，以古埃及的單位分數表示則為 16+(1/2)+(1/8)。而古巴比倫泥板上有一道數學題：「igibum 與 igum 之和為 10，igibum 與 igum 各為何？」，意思是某數（igibum）和其倒數（igum）之和為 10，某數為何？泥板上的解法是，「將 10 除以 2 後平方，減掉 1，將所得之數開平方後再加上 10 除以 2 的值，即為所求」，以現代算法可以表示為：$x=\sqrt{\frac{10}{2}-1}+\frac{10}{2}=2\sqrt{6}+5$。這種演算法則的解題方式也出現在古代中國《九章算術》「句股」一章當中：

> 今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。
> 引葭赴岸，適與岸齊。問水深、葭長各幾何？
> 答曰：水深一丈二尺；葭長一丈三尺。
> 術曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，減之，餘，
> 倍出水除之，即得水深。加出水數，得葭長。



為求得葭（蘆葦）的長度，《九章算術》解法為，將水池的半徑 5 尺長平方（半池方自乘），減去露出水面 1 尺長的平方（以出水一尺自乘，減之），所得到的數除以露出水面 1 尺長的兩倍（餘，倍出水除之），就得到水深，再加上露出水面的 1 尺長（加出水數），就是葭的長度。整個演算過程看似複雜，說穿了其實就是：$x=\frac{5^2-1^2}{2\times 1}=12,\ x+1=13$。由此可以看出各古文明均發展出各式演算法，以見招拆招的方式解決不同的算術問題。而且在十六世紀之前，中國、印

度、阿拉伯等東方國度在解方程式方面的成就遠遠超過西方。不過到了十六世紀，兩個關鍵因素促使西方求解方程式的水準突飛猛進，一是解題成為數學家之間的智識挑戰，求解方程式逐漸脫離現實目的；另一是方程式表示方式開始符號化。

歐洲文藝復興時期，由於天文測量和航海等實用目的，求解方程式變成當時科學界的顯學。義大利數學家德費洛（Scipione del Ferro, 1465-1526）為了挑戰當時普遍認為三次方程式沒有根式解的想法，解出缺少二次項的不完全三次方程式，以現在符號可以表示為 $x^3+mx=n$。另一位義大利數學家方特那（Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557）則解出缺少一次項的不完全三次方程式 $x^3+mx^2=n$，並且在一場公開的求解方程式的挑戰賽中贏了德費洛的學生費歐瑞（Antonio Maria Del Fiore）。而當時的傳奇數學家卡當諾（Gerolamo Cardano, 1501-1576）從方特那習得 $x^3+mx=n$ 的公式解法，然後以代換方式求出一般三次方程式的公式解，再與他的學生法拉利（Lodovico Ferrari, 1522-1565）共同求出一般四次方程式的公式解，並於 1545 年將解法發表於《大術》（*Ars Magna*）一書，引起方特那不悅而向卡當諾提出挑戰（Livio, 2006）。這段文藝復興時期的解方程挑戰賽，正象徵著數學逐步脫離實用目的的序曲。

另一方面法國數學家韋達（François Viète, 1540-1603）開始使用字母代表未知量和已知量的符號，將算術轉化為符號算式。韋達以母音大寫字母 *A*, *E*, *I*, *O*, *U*, *Y* 表示未知量，而大寫輔音字母 *B*, *C*, *D* 則表示已知量，其實就是現代數學以 *x*, *y*, *z* 表示未知數，*a*, *b*, *c* 表示常數的前身。例如，「*B* in *A* Quadratum plus *D* plano in *A* aequari Z solido」就是 $bx^2+dx=z$（Derbyshire, 2006）。韋達又進一步以「+」表示相加，例如「*A* cubus, + *A* quadrato in *B* ter, + *A* in *B* quadratum ter, + *B* cubo」就是 $x^3+3bx^2+bx+b^3$（Cajori, 1928）。方程式的符號化使數學家得以探究根與係數的關係，有效促進求解方程式的思考效率（Katz, 1998），這也激勵西方數學家樂觀地認為求五次方程式的根式解指日可待。沒想到這道關卡卻比想像中困難，得經過兩百多年後才被兩位悲劇天才阿貝爾（Niels Henrik Abel, 1802-1829）和伽羅瓦（Évariste Galois, 1811-1832）所攻克，只是所因而發展出來的解題工具卻是前所未見且抽象至極的群論（group theory），達到近代數學的第一個高峰（Livio, 2006）。

綜觀求解方程式的歷史過程可以發現，縱使後來中國宋元時期所發展出獨特的天元術可以解高次方程，由於受限於算籌的操作技巧，其發展終究還是遇見瓶頸。而在 19 世紀以前，西方數學家求解方程式一直是以次方分類。但伽羅瓦卻改以方程式根的結構做分類，首先證明對任意 n，一定可以找到一個 n 次方程式，其對應的某個數學結構（稱為伽羅瓦群）等於置換群 S_n。接著證明一定可以找到一個五次方程，其伽羅瓦群等於 S_5，而由於 S_5 是不可解的，因此五次方程無根式解，將依據操作演算的求解方程進階到抽象代數的領域，正代表著數學知識由具象至抽象，一種特殊的轉置（transform）文化。

（二）數學中的文化：從臆測到論證

許多數學教育學者經常批評，傳統的數學教學只是訓練應用公式和學習解題技巧，剝奪學生探索數學的樂趣。要學生主動樂於探索數學，最好先讓他們不自覺地置身於數學情境之中，再逐步引領他們進入 Lockhart（2009）所謂的數學實境（mathematical reality）。在此提供一個「臆測與論證」的案例以說明數學知識建構的階段。

案例二：點、線、平面、與空間

一個點最多可以將一直線分為 2 段，兩個點分為 3 段，三個點分為 4 段，……，那 n 個點呢？很容易可以推論出一般化的結果：「n 個點將一條直線分為 n+1 段」。這是歸納猜想的結果，而讀者可以輕易地藉由數學歸納法證明這結果。繼續思考進階問題：「n 條直線最多可以將平面分割為幾個區域？」。一條線將一平面分為 2 個區域，兩條直線分為 4 個區域，三條直線分為 7 個區域，……那 n 條直線呢？此時紀錄觀察過程就顯得很重要。表 2 紀錄著直線數目與平面被分割之區域數目之間的對應，5 條直線最多可以將一平面分割為幾個區域？若只透過實際操作可能有些困難，此時可以開始進行猜測（guessing），猜測可能是隨意的（guess and test），也可能是基於觀察推理的（plausible reasoning）。我們發現區域數目所形成的數列{1, 2, 4, 7, 11,…}的後項減前項恰為{1, 2, 3, 4,…}，所以依此規律猜測5條直線最多可以將一平面分割為16個區域。這又是歸納猜想的結果，然而這規律正確嗎？為什麼？觀察圖 6 看看能否發現問題背後的本質。

表 2

直線分割平面區域數

直線數目	0	1	2	3	4	5	…	n
區域數目	1	2	4	7	11	?	…	?

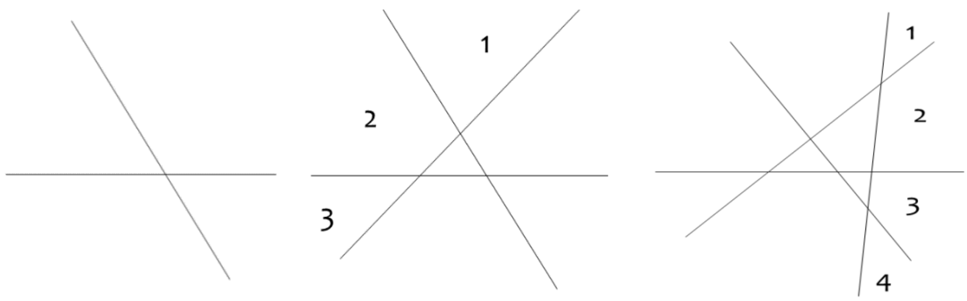


圖 6 直線分割平面區域

從圖 6 可以發現當平面中每增加一條直線時，「增加的區域數恰等於總直線數」。為什麼會這樣？為了得到最多的區域分割數，新增的直線必須從外部與原先所有直線相交，因此除保留原有區域數之外，新增的外部區域數恰會等於總直線數。當我們能認知這個關係後就能以遞迴關係進行演繹證明。設 R(n)表示 n 條直線將一平面所能分割出的最多區域數，則以下關係成立：

R(1)=2

R(2)=R(1)+2

R(3)=R(2)+3

R(4)=R(3)+4,

…

R(n)=R(n–1)+n

將等號左右兩邊的 n 個式子全部加總並消去等號兩邊相同項，就得到

R(n)=2+2+3+4+…+n =1+1+2+3+4+…+n=[n(n+1)/2]+1。

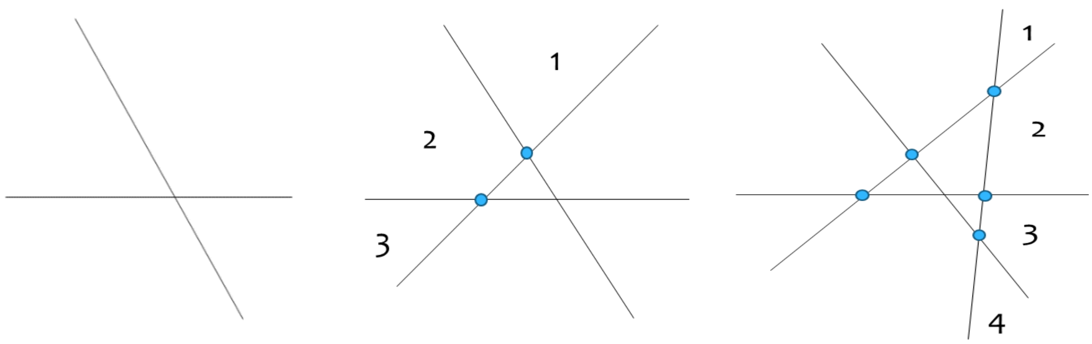


圖 7　直線分割平面區域

值得注意的是，論證方式有時相當多元，觀察圖 6 時，可能有些人另外發現「增加一條直線後，新增的區域數比新增的交點數多 1」（圖 7），這是另一種歸納猜想。為什麼會這樣？這就是前面提到「n 個點將一條直線分為 n+1 段，而每一段都與一個新區域相鄰」。這又可以引出另一個遞迴關係式，只是必須藉助高中的組合概念。由於第 n 條直線與 n–1 條直線產生 n–1 個交點，這 n–1 個交點將第 n 條直線劃分為 n 段，而每段均劃出新區域，所以多出 n 個區域。又因為 n 條直線會產生 C_2^n 個交點，而 n 條直線比 n–1 條直線多 $C_2^n - C_2^{n-1}$ 個交點，所以多出 $C_2^n - C_2^{n-1} + 1$ 個區域，由此得到各項遞迴關係如下：

$R(1)=2$

$\mathrm{R}(2)=R(1)+C_2^2+1$

$R(3)=R(2)+C_2^3-C_2^2+1$

$R(4)=R(3)+C_2^4-C_2^3+1$

...

$R(n)=R(n-1)+C_2^n-C_2^{n-1}+1$

將等號左右兩邊的 n 個式子全部加總並消去等號兩邊相同項，便得到：

$R(n)=2+n-1+C_2^n=1+n+C_2^n=\mathrm{C}_0^n+C_1^n+C_2^n$（阮圓真，2012）。

這是另一種角度的演繹證明。由此可知，數學之妙在於隨觀者角度不同，便產生不同論證模式，因而導出同質異型的結果。這些同質異型的結果無好壞之分，但有深淺之別。例如第一個遞迴關係適合國中，而第二個則適合於高中。當然比較深層的結果具備較大之延展性。例如我們可以問更深層的問題：「n 個平面最多可以將空間分割為幾個區塊？」，這顯然比較複雜，但我們能先進行臆測嗎？其中是否隱藏某些規律呢？現將前述結果整理如下：

(1) n 個點將一條直線分割為 n+1=$C_0^n+C_1^n$ 段。

(2) n 條直線將一平面分割為 $C_0^n+C_1^n+\mathrm{C}_2^n$ 個區域。

這裡是否出現一個漂亮的規律？我們似乎可以大膽臆測：「n 個平面最多可以將空間分割為 $C_0^n+C_1^n+\mathrm{C}_2^n+\mathrm{C}_3^n$ 個區塊」。只是正確嗎？阮圓真（2012）替我們展示這美麗的遞迴關係在三維空間確實還是成立。而阮圓真的結果也是透過投稿和專家審查（也是社群辯證的必要過程）而被確認。

只是我們不禁又問，這結果對任意 m 維空間都成立嗎？m 維空間是否最多可以被 n 個超平面（hyperplanes）分割為 $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\mathrm{C}_3^n+...+C_m^n$ 個區塊？這種透過反覆臆測、論證和社群辯證，如螺旋般拾級而上的類比思考過程，正是數學知識建構過程中最為獨特的思維文化。

陸、結論

從本文一貫的脈絡可以理解數學與文化關係密切，更是人類發展的智識結晶。本文所引述的東西方學者也都一致指出文化在數學素養中的關鍵角色，所以有數學素養的人必應具備某種程度的數學文化內涵。歐美與對此議題早已著墨多年。知名的出版社 Springer 自 2004 年開始推出 *Mathematics and Culture* 系列叢書。英國的「倫敦數學學會」和「藝術與人文研究委員會」（Art and Humanity Research Council）從 2012 年開始舉辦數學文化研討會（https://sites.google.com/site/mathematicalcultures/home）。而中國大陸近年來這方面的推廣更是積極，早於 2003 年的《普通高中數學課程標準》即指出數學課程應幫助學生瞭解數學在人類文

明發展中的作用；逐步形成正確的數學觀。2015 年新公告的課程標準更直接將「數學文化」列為學習主題，與「函數與應用」、「向量與幾何」、「機率與統計」等傳統數學主題並列。反觀國內談數學素養已將近十年，但對數學文化的概念卻仍然陌生，也不見深度論述。所幸 104 年 11 月 9 日公告的《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》中除宣告「數學是一種語言」和「數學是一種實用的規律科學」之外，更特別強調「數學是一種人文素養」（http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-10635,c1174-1.php?Lang=zh-tw），其目的即在於讓學生理解數學雖然有自己內在理路的發展走勢，但也必然因為回應社會的需求，而在文明裡扮演不可或缺的角色，可以說是臺灣回應數學文化研究的初聲。我們相信，透過數學文化融入教學，可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係，應能改善前述臺灣學生「高成就、低態度」的現象。然而徒文不足以自行，當務之急是喚起大家對研究數學文化和培育學生數學文化素養的重視，以進一步發展數學文化教材、建立數學文化素養指標、以及進行與數學文化教學相關的實證研究。不過苟長義與顧沛（2008）提醒我們，在教學中融入數學文化應遵循「整體的」、「有機的」、「恰如其分」、「水到渠成」、與「畫龍點睛」等五項原則，切不可為融入而融入。

本文秉眾家之言，從數學與文化的關係著手，定義數學文化素養、論述數學文化素養的內涵、並提供實際案例分析，旨在建立一個概念框架，希冀成為未來數學文化素養之教學、評量、與研究的理論基礎。

參考文獻

方延明（2007）。**數學文化**。北京：清華大學。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical Culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】

丘成桐（2013）。一本具國際觀的數學普及雜誌。**數理人文**，**1**，1。【Yau, Shing-Tung (2013). A Popular Mathematics Journal with Global View. *Humanities of Mathematical Sciences*, *1*, 1. (in Chinese)】

何定照（2012 年 12 月 9 日）。數學皇帝 丘成桐：盲求奧林匹亞 畸形發展。**聯合報**，A3 版。【He, Ting-Chao (2012, December 9). The emperor of math – Shing-Tung Yau: Pursuing math Olympiad blindly is an abnormal development. *United Daily News*, p. A3. (in Chinese)】

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告**。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Chang, Yang, Te-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *Final report for educating citizen literacy in mathematics*. Project Office for Improving Citizen Literacy, unpublished. (in Chinese)】

汪曉勤（2013）。**數學文化透視**。上海：上海科技。【Wang, Xiao-Qin (2013). *Perspectives of mathematical culture*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press. (in Chinese)】

阮圓真（2012）。一個公式的推演。**科學教育月刊，353**，45-48。【Juan, Yuan-Chen (2012). Deduction of a formula. *Science Education Monthly*, *353*, 45-48. (in Chinese)】

易南軒、王芝平（2007）。**多元視角下的數學文化**。北京：科學。【I, Nan-Hsuan, & Wang, Chih-Ping (2007). *Mathematical culture in terms of multiple perspectives*. Beijing: Science Press. (in Chinese)】

洪萬生（1991）。**孔子與數學**。臺北：明文書局。【Horng, Wann-Sheng (1991). *Confucius and mathematics*. Taipei: Ming-Wen Press. (in Chinese)】

苟長義、顧沛（2008）。以數學文化的融入改進文科數學教學。**數學教育學報，6**，5-7。【Kou, Chang-I, & Ku, Pei (2008). Integrating mathematical culture for improving teaching in liberal arts mathematics. *Journal of Mathematics Education*, *6*, 5-7. (in Chinese)】

陳進傳（1982）。峰迴路轉：明代的科技。載於洪萬生（主編），**中國文化新論．科技篇──格物與成器** （頁 227-283）。臺北：聯經。【Chen, Chin-Chuan (1982). Science and technology of Ming dynasty. In Wann-Sheng, Horng (Ed.), *A new discourse on Chinese culture - Technology volume* (pp. 227-283). Taipei: Linking Publishing. (in Chinese)】

黃友初（2013）。歐美數學素養發展狀況簡述。收錄於李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（編著），**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告**（頁 195-234）。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Huang, Yu-Chu (2013). The developing status of mathematical literacy in Occident. In Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Chang, Yang, Te-Ching, & Liu, Po-Hung (Eds.), *Final report for educating citizen literacy in mathematics* (pp. 195-234). Project Office for Improving Citizen Literacy, Unpublished. (in Chinese)】

張一藩（1997）。資訊時代之國民素養與教育。收錄於謝清俊（主編），**資訊科技對人文、社會的衝擊與影響期末研究報告**（頁 77-100）。行政院經濟建設委員會委託之專題研究成果報告（編號：(86)023-602），未出版。檢自 http://cdp.sinica.edu.tw/project/jcatalog.htm【Chang, Yi-Fan (1997). Citizen literacy and education for information era. In Hsieh, Ching-Chun (Ed), *Report of project for studying the influence of information technology on humanity and society* (pp. 77-100). The Council for Economic Planning and Development (Rep. no.: (86)023-602), unpublished. Retrieved from http://cdp.sinica.edu.tw/project/jcatalog.htm (in Chinese)】

張之傑（1997）。文藝復興時期藝術家對科學的貢獻。**科學月刊，28**（9），736-740。【Chang, Chih-Chieh (1997). The contribution of Renaissance artists on sciences. *Science Monthly*, *28*(9), 736-740. (in Chinese)】

張奠宙（2005 年 12 月 23 日）。數學文化。檢自 http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/jxyj_1/zjlt_1/201008/t20100824_713684.htm
【Chang, Tien-Chou (2005, December 23). Mathematical culture. Retrieved from http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/jxyj_1/zjlt_1/201008/t20100824_713684.htm (in Chinese)】

張楚廷（2006）。**數學文化**。北京：高等教育。【Chang, Chu-Ting (2006). *Mathematical culture*. Beijing: Higher Education Press. (in Chinese)】

張維忠（2005）。**文化視野中的數學與數學教育**。北京：人民教育。【Chang, Wei-Chung (2006). *Mathematics and mathematics education in terms of cultural perspectives*. Beijing: People’s Education Press. (in Chinese)】

張維忠（2011）。**數學教育中的數學文化**。上海：上海教育。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】

張維忠、唐恒鈞（2008）。民族數學與數學課程改革。**數學傳播**，**32**（4），80-87。【Chang, Wei-Chung, & Tang, Heng-Chun (2008). Ethnomathematics and mathematics curriculum reform. *Mathmedia*, *32*(4), 80-87. (in Chinese)】

蕭文強（2008 年 8 月）。從離散數學到數學文化。**專題演講發表於 2008 組合數學暨新苗研討會**，國立交通大學。檢自 http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf 【Hsiao, Wen-Chiang (2008, August). From discrete mathematics to mathematical culture. *A Lecture given at 2008 Symposium for Combinatorial Mathematics*, National Chiao Tung University. Retrieved from http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf (in Chinese)】

劉昭民（1982）。理性的發皇：燦爛的宋金元科技。載於洪萬生（主編），**中國文化新論・科技篇──格物與成器**（頁 165-226）。臺北：聯經。【Liu, Chao-Min (1982). The Flourishing of Reason. In Wann-Sheng, Horng (Ed.), *A new discourse on Chinese culture - Technology volume* (pp. 165-226). Taipei: Linking Publishing. (in Chinese)】

Bullock, A. (1985). *The humanist tradition in the west*. London, UK: Thames and Hudson.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. La Salle, IL: Open Court Publishing.

Crowther, G. (1959). *15 to 18: A report of the Central Advisory Council for Education*. London, UK: Her Majesty’s Stationary Office.

de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy*: *Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.

Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity*: *A real and imaginary history of algebra*. Washington, DC: Joseph Henry Press.

Descartes, R. (1997). *A discourse on method* (J. Veitch, Trans.). London, UK: J. M. Dent. (Original work published 1637).

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford, UK: Oxford University Press.

Højgaard, T. (2009). Competencies, skills, and assessment. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 225-231). Palmerston North, NZ: MERGA.

International Life Skills Survey (2000). *Policy research initiative*. Ottawa, Canada: Statistics Canada.

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (2nd ed.). New York, NY: Addison-Wesly.

Kirsch, I. S., Jungeblut, A., Jenkins, L., & Kolstad A. (2002). *Adult literacy in America: A first look at the findings of the national adult literacy survey* (3rd ed.). Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York, NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1982). *Mathematics*: *The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.

Kouba, V. L., Champagne, A. B., Piscitelli, M., Havasy, M., White, K., & Hurley, M. (1998). *Literacy in the national science and mathematics standards: Communication and reasoning. Report Series 3.14.* Retrieved from ERIC database. (ED 417396)

Kroeber, A. L., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture: A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Livio, M. (2006). *The equation that couldn't be solved: How mathematical genius discovered the language of symmetry*. New York, NY: Simon & Schuster.

Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament*: *How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form*. New York, NY: Bellevue Literary Press.

National Research Council. (2001). *Adding it up*: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and mathematical learning–Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Denmark: Roskilde University.

OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework*: *Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: Author. doi: 10.1787/19963777

Plato. (1952). The Republic. In R. M. Hutchins (Ed.), *Great books of the western world* vol.7 (B. Jowett, Trans.) (pp. 295-441). Chicago, IL: Encyclopedia Britannica. (Original work published 360 B.C.).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pugalee, D. K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House*, *73*(1), 19-22. doi: 10.1080/00098659909599632

Singh, S. (1998). *Fermat's enigma*: *The epic quest to solve the world's greatest mathematical problem*. New York, NY: Anchor Books.

Steen, L. A. (Ed.). (1990). *On the shoulders of giants*: *New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academy Press. doi: 10.17226/1532

Steen, L. A., Burrill, G., Ganter, S., Goroff, D. L., Greenleaf, F. P., Grubb, W. N., … Wallace, D. (2001). The case for quantitative literacy. In L. A. Steen (Ed.), *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy* (pp. 1-22). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines. Retrieved from http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/MathAndDemocracy.pdf

Struik, D. J. (1948). *A concise history of mathematics*. New York, NY: Dover Publication.

UNESCO (2003). *Literacy: A UNESCO perspective*. New York, NY: Author.

Wilder, R. L. (1950). Cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical society. Retrieved from http://www.mathunion.org/ICM/ICM1950.1/Main/icm1950.1.0258.0271.ocr.pdf