期刊網址：http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74
黃德華（2016）。
「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現。
臺灣數學教師，37（2），17-49。
doi: 10.6610/TJMT.20160629.01

「課堂學習研究」提升「本科知識」和「教學內容知識」之探究：判定「全等三角形」新發現

黃德華[1]
[1]香港教育大學數學與資訊科技學系

本文透過分析專業數學教師的基本條件，利用一個「課堂學習研究」的實例，帶出「課堂學習研究」確實能夠有效提升數學老師的「本科知識」與「教學內容知識」，從而提升數學的教學的效益。是次研究選取的課題是中學一年級判斷「全等三角形的條件」。這個研究課主要教授學生了解『SAS 和 SSA』之差異，並找出『RHS 與 SSA』的關係。在實踐這個「課堂學習研究」，老師和研究員一起分析和討論教授這課題所需要的「本科知識」與「教學內容知識」。從討論中，發現了判斷「全等三角形」的新條件『SSO』-- O 是鈍角，並找得判斷「全等三角形」的新方法。這些新教材和新教學方法反映了「課堂學習研究」確實能有效提升老師的「本科知識」和「教學內容知識」，從而令數學老師更專業化。

關鍵詞：本科知識；全等三角形條件；教學內容知識；課堂學習研究

通訊作者：黃德華，e-mail：twwong@eduhk.hk
收稿：2016 年 5 月 26 日；接受刊登：2016 年 6 月 29 日。

壹、 緒論

一、研究背景

香港中學數學教學內容和教學模式，大多是參照教科書，以教科書內容和教學策略為中心的。所以一般香港中學數學老師的教學模式是變化不多的。因此，老師的教學成效大部份是依賴教科書內容和學生的個人質素。所以若老師的教學單依照教科書內容，依書直說，集中以單向的「講授方式」（Lecture Method）教學，即俗語所為的「Chalk and Talk」教學，再配以大量的操練，而較少透過討論活動誘導學生探究、了解數學概念；這樣黑板乏味的教學方法，試問又如何能培養出學生的學習興趣？如何能令他們喜愛數學？因此老師應該明白「理解」遠勝於「強記」、多樣化教學方法遠勝於獨孤一味的「Chalk and Talk」教學。正如課程發展處（1999）在《中學課程綱要 – 數學科（中一至中五）》第五章[教學建議] 中清楚說明為準備學生面對二十一世紀的挑戰，中學數學的教學策略必須著重：

(一) 學習過程；

(二) 照顧學習差異；

(三) 適當運用資訊科技去學習及施教；

(四) 適當運用各式各樣的教學資源（38 頁）。

因此，為使學生能夠清楚了解學習的數學知識、有效掌握解難方法、培養正確的數學態度，老師的教學必須是多樣化的;如透過具趣味的數學活動、探究討論、科技應用等等，鼓勵學生多參與，多表達個人意見，從而達至培養學生的「傳意」、「探究」、「歸納」及「推理」等能力。

故筆者認為老師應該多分析教學內容、多就學生的能力決定教學內容的深淺及範圍的多寡。老師不應單單依循學校用的教科書之單一內容作教學安排，應考慮所教學生的質素；若學校採用的教科書的內容和教學策略未能配合自己所教的班別的[學與教]的要求，老師就應多參考書籍，進行課程調適。

二、研究動機

美國史丹福大學舒文教授（Shulman, 1987）認為作為專業教師，不應單具備良好的本科內容知識，更應兼備優秀的教學內容知識。筆者極同意舒文教授的分析。筆者也曾

以香港數學教師為研究對象，探研得要成為一個專業數學教師應具備以下列足夠的知識和正確的教學態度（Wong, 2002）：

(一) 數學本科知識（Subject Content Knowledge）

(二) 數學教學內容知識（Pedagogical Content Knowledge）

(三) 數學教學態度（Attitude toward Math Teaching）

1. 數學本科知識

Schofield（1981）, Shulman（1987）和 Ball（1991）都認為數學本科知識泛指在大學、中小學所修讀的數學課程的知識；這些知識也被學校廣泛地用來量度數學老師的數學成就（mathematics achievement）。

2. 數學教學內容知識

Ball（1991）和 Shulman（1986）認為數學教學內容知識是指老師在中小學用來教授數學給學生所用到的教學知識。它包括：了解中小學數學課程的知識、編寫教案、設計教具、設計問題…等等知識；這些知識也被學校用來量度數學老師的教學成效（mathematics teaching performance）。

3. 數學教學態度

香港教育學院的學校體驗視導評核表中也有教學態度評核這一欄；目的在評核實習老師的教學熱誠與投入；它包括評核他們喜歡數學和教數學嗎？有愛心和有耐性教學生嗎？

4. 教育改革及課程研究

近年，香港教育界進行了很多不同的教育改革及課程研究，目的都是為了改善教學質素，提升「學」與「教」的成效。惟這些改革和研究的成效都不十分理想。究其原因，大多是它們都未能直接針對影響上述「學」與「教」的三大因素。最近十年，筆者參加了由前香港教育學院（現為香港教育大學）盧敏玲教授負責策劃的香港『課堂學習研究』（learning study）。從筆者參與了的十多個中小學數學科的『課堂學習研究』的成果中，筆者十分認同盧敏玲（2002）說:『課堂學習研究』是一種透過提升老師的「本科知識」、「教學內容知識」和「 教學態度」而提升教學成效的實際『行動研究』(action research）。香港教育大學院的「課堂學習研究」是有別於日本的「授業研究」或「課堂教學研究」（Lesson Study）。它和日本的「授業研究」的主要分別是「課堂學習研究」是以 Marton

（1997）的「變易學習」理論作為教學設計的基礎。「變易學習」理論的詳細內容見下文研究方法中的理論架構內文。

根據 Calhoun（1993)所說，行動研究主要有三種：個人的行動研究（individual action research）、協同行動研究（collaborative action research）和全校性行動研究（school-wide action research research）。香港『課堂學習研究』是屬於協同行動研究。它不是一般的『集體備課』、『集體編寫教案』；它主要是由一群教授相同科目的老師和大學導師，透過選擇了的課題，分析老師和學生在「學」與「教」的過程中所遇到的困難，從而分析該課題的關鍵特徵；經過深入的協同討論，找出能夠幫助老師和學生「學」與「教」的有效方案。因此『課堂學習研究』是能夠直接提升「教」與「學」的內容和方法；更透過溝通、討論、交流和分享，大大提升了老師的「本科知識 」、「教學內容知識」和「教學態度」。這正正與舒文所提及的三大影響「學」與「教」的因素吻合。

三、研究目的

本文目的是透過一個中學一年級的數學科『課堂學習研究』的個案，說明『課堂學習研究』是一種有效提升教師的「本科知識」、「教學內容知識」的行動研究。希望藉著這個實例，能讓老師明白要成為一位專業的數學老師，「本科知識 」、「教學內容知識」和「教學態度」是缺一不可的。

貳、 研究方法

一、理論架構

是次研究主要是根據香港教育學院的「課堂學習研究」（Learning Study）的流程及理論架構進行的。圖 1 展示了整個研究架構和運作流程。在整個研究流程中，主要涉及三個層面的探究和分析：

(一) 教材層面：分析現有教材，優化研究課題的教學內容和教學模式；

(二) 老師層面：探討既科學又可行的教學模式，切實地提高教學質素；此外透過同儕研討、大學導師的交流，提升教師的專業「本科知識」和「教學內容知識」。

(三) 學生層面：探究學生的學習興趣和學習能力能否藉着教材和教學方法的優化，從而得到提升（黃德華，2011）。

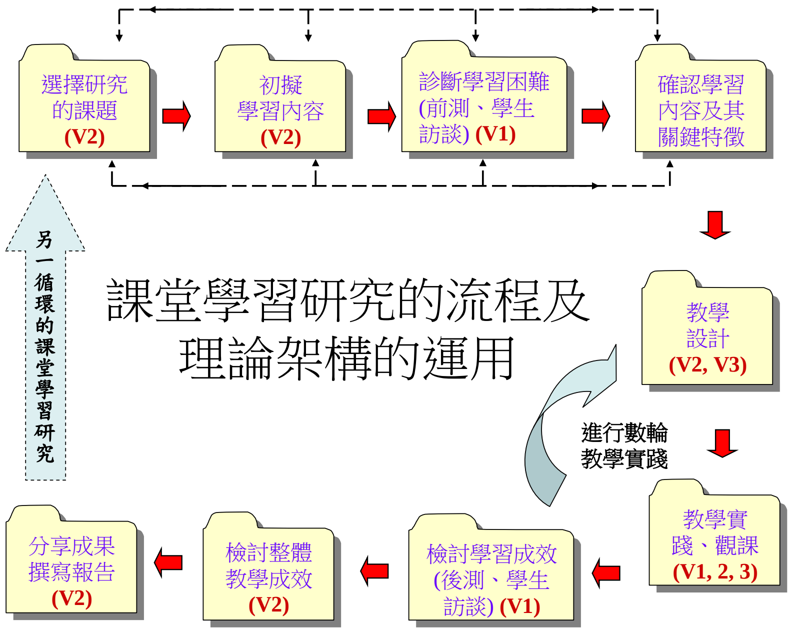


圖 1　「課堂學習研究」的流程及理論架構

此外在圖 1 的運作流程中，每一環節都會涉及人物（包括老師和學生）對事物(包括教材和教學方法）的認知和了解。由於不同人物對事物都在認知和了解能力上上有所差異，所以 Marton（1997）透過他的「變易學習」理論，把這些變易（variations）分為三個不同的變易：

第一個變易（Variation 1, V1）是指不同的學生對學習內容都有不同的見解。Marton 強調若老師能洞悉學生對學習內容的不同見解，從而加以分析，找出不同學生的不同學習問題，然後作出教學上的調適，這樣教學效益便能大大提升。

第二個變易（Variation 2, V2）是指不同的老師對同一的教學內容、教學重點都有不同的見解及處理的方法。Marton 認為若老師能相互溝通、分享教師心得，抱著「捨短取長」的心態，這樣便能設計出更有效益的課堂教學計畫。

第三個變易（Variation 3, V3）是指利用恰當的「變易圖式」作為指導教學設計的工具。Marton 強調基於老師對 V1 和 V2 的認知程度，透過分享、交流意見，老師可利用「變易圖式」，編寫或修訂教學計畫。因此，「變易圖式」的運用，主要集中在教學設計中。例如，原文參照，老師可以利用變易圖式設計不同的繪圖練習，讓學生明白判定全等三角形的其一正確條件 SAS 是不會受「角」的大少改變（變：銳角、直角、鈍角）而改變其恰當性的（不變：仍只能繪畫得一個三角形）。詳細內容見研究結果中的原文：教學設計與變易圖式的運用。

由於是次研究只集中討論 如何提升老師對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」的認識，所以本文只集中討論圖 1 理論架構的首五個環節：

(一) 選擇研究的課題（V2）

(二) 初擬學習內容（V2）

(三) 診斷學生學習困難（V1）

(四) 確認學習內容及其關鍵特徵（V2）

(五) 教學設計（V2、V3）

上述五個環節的特徵及進行過程，將透過是次研究課題「判定全等三角形條件」作深入解說。詳文見研究結果內文。

二、研究對象

是次研究是以香港某中學中一年級全部四班學生，共 123 人為對象。由於這是一個行動研究，目的在於提高老師和學生的「教」與「學」的效益，所以並沒有如一般傳統研究般設立實驗班及對照班。參與是次研究的中學老師有四人，另香港教育大學派出的數學科導師有一人（筆者本人），研究顧問有一人。老師們的背景資料見下表 1：

表 1

老師們的背景資料

老師	教授科目	職位	教學年資
甲	高中數學	數學科主任	二十多年
乙	初中數學	訓導主任	二十多年
丙	主教初中科學 兼教初中數學	永久編制老師	二十年
丁	初中數學及初中電腦	合約老師	三年

從上表得知，老師甲和乙都是資深數學老師，教授數學有二十多年了；老師丙主教初中科學兼教初中數學，也教了二十年。老師丁最年輕，主修物理，他只教了初中數學及初中科學三年。下文是是次研究，經過六次會議（每次開會大約兩小時多），研究員和老師經過深入的討論後所得的結果。

參、 研究結果

下文所述內容，涉及各老師和筆者參與的每次「課堂學習研究」會議和個人自修的內容；經過討論、歸納，而取得各環節的共識和研究結果。這些結果，包含了老師們在討論和總結的過程中，不自覺地提升了他們對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」的認識。

由於是次研究只集中討論如何透過「課堂學習研究」提升老師對該課題的「本科知識」和「教學內容知識」，所以下文只集中討論「課堂學習研究」的首五個環節所獲得的豐盛成果，並付以該環節增長了老師甚麼知識。

一、選擇研究的課題(V2)--- 「教學內容知識」

於中學芸芸課題中，值得老師探討的課題甚多，如演繹幾何、概率概念、面積公式、函數圖像等等。筆者在與老師作第一次會議前，要求老師們事前需考慮選擇哪一課題作為是次的研究課。在決定課題前必須提供選擇該課題的原因。以下是老師們選擇中學一年級判定「全等三角形的條件」的原因：

(一) 屬香港中學文憑考試數學必修部分，公開試的常見題目

根據《中學課程綱要 – 數學科（中一至中五）》（1999），課程發展處建議學校安排中一至中三年級分十四課節完成《全等與相似》課題；其中涉及全等三角形的有以下幾個學習重點。

1. 認識全等三角形及相似三角形的性質；
2. 探究全等三角形及相似三角形所需具備的條件；
3. 認識固定一個三角形的起碼條件；
4. 能列舉簡單理由判定兩個三角形是屬於全等三角形或是相似三角形（第 22 頁）。

於香港中學數學課程綱要，建議學生應掌握探究全等三角形所需具備的條件；並能列舉簡單理由判定兩個三角形是屬於全等三角形。研究課的老師任教的中學為全香港級別二的中文中學（香港中學水平分三級，一級最佳，三級最差），學生普遍數理能力較一般，大部分學生：

1. 能夠了解全等三角形的特性及其中三個條件（SSS、ASA / AAS、RHS）；
2. 部分學生混淆了 SAS 和 SSA，認為 SSA 也是全等三角形的其中一個條件。

此外在中學文憑考試，初中的判斷全等三角形所佔的分數雖然不多，但這幾分較容

易取得,也對級別二的學生於數學必修部分拿取第二或三級成績甚為重要(成績分五級：一級最差，五級最佳；五級又細分五、五*、五**。考入香港各大學，數學最低要求是二級)，因此實不容忽視。

(二) 教科書內容不足

1. 教科書並沒有向學生解釋 SAS 和 SSA 的分別。此外，探究活動也不足夠，學生不明白為何 SAS 是全等三角形的其中一個條件，但 SSA 卻不是；也不知道 RHS 是 SSA 的特殊例子（Exceptional case）。
2. 教科書也沒有說出 SSA 和 RHS 的關係。

二、初擬研究課的學習內容（V2） --「本科知識」和「教學內容知識」

根據老師們的初步選題，確定了是次研究以中學一年級判斷「全等三角形」的條件作為這個研究課的課題。後經導師和老師們的討論和交流，決定了以下三個教學重點為這個研究課的學習內容有：

(一) 了解『SAS 和 SSA』之差異；

(二) 找出『RHS 與 SSA』的關係；

(三) 探究除了 SSS、ASA、SAS、RHS 還有新的判定「全等三角形」的條件嗎？

三、診斷學生學習問題 / 困難（V1） --「教學內容知識」

為了確實判斷該校學生在依以往教學，學習了這單元後，是否真的會出現上述學習問題，研究員編寫了一份測驗卷給予中學二年班同學試做。目的是利用中二學生的表現作為評估中一學生的表現之參照。並據此結果，擬定是次研究課的教學內容。在是次研究，稱這份測驗卷為教學前測卷。當中一學生上完研究課後，他們會做同一份測驗卷（我們稱它為後測卷）。然後利中一和中二同學的成績作比較，這樣便可得知經「課堂學習研究」設計得的教材和教學方法是否真的能提升教學效益。**教學前測卷題目內容見附件 1**。以下表 2 展示了中二同學解答前測卷的結果及分析。

表 2

前測卷結果及分析

部分	分析	參考題號	答對率(%)
前置知識	• 絕大部分學生未能了解全等圖形的基礎概念	Q1	20%
	• 大部分學生了解全等三角形的特性及其中三個條件（SSS、ASA/ AAS，RHS）	Q2 及 Q3	70%
研究課重心	• 大部分學生認識全等三角形的第四個條件 SAS	Q4、Q5 及 Q9（a）	60%
	• 大部分學生未能按照對應角的次序寫出全等三角形的名稱	Q4、Q5 及 Q6	30%
	• 大部分學生認為 SSA 是全等三角形的其中一個條件	Q7 及 Q8	70%
	• 部分學生能辨別全等三角形的其中兩個條件 --- SAS 與 RHS	Q7 及 Q8	40%
	• 部分學生能辨別全等三角形的正確條件 SAS 與不正確條件 SSA	Q7 及 Q8	30%
知識轉移	• 絕大部分學生能掌握非圖形及文字性問題	Q9（b）、Q10 及 Q11	80%

前測後，研究員亦訪問了三位不同數學程度的中二學生。訪談內容分為三部分：前置知識、全等三角形的第四個條件 SAS 及探究 SAS 與 RHS / SSA 及 SAS 之分別。 表 3 展示了訪談結果及分析，整體上大致與前測卷結果吻合。

表 3

前測後訪談結果及分析

部分	分析
前置知識	• 所有受訪學生均能指出 SSS、ASA 及 RHS 是全等三角形的其中三個條件。 • 三位同學都指出 AAS 是全等三角形的其中一個條件。 • 所有受訪學生都明白 R、H 及 S 的意思。 • 最差程度的受訪學生將相似及全等的條件產生混淆。 • 所有受訪學生均表示 SSS 代表三邊相等，即三對對應邊相等。 • 所有受訪學生都知道直角的對邊稱為斜邊。
全等三角形的第四個條件 SAS	• 只有一位學生未能指出 SAS 是全等三角形的其中一個條件。
探究 SAS 與 RHS / SSA 及 SAS 之分別	• 所有受訪學生均對 RHS、SAS 及 SSA 產生混淆 • 除了程度最好的一位學生能指出 SSA 不是全等三角形的其中一個條件，其餘兩位同學皆以為 SSA 也不是全等三角形的其中一個條件。他們認為 SSA 與 SAS 是相同條件。 • 全部同學都不明白這些條件是怎樣得來的。 • 他們說祇靠死記哪些條件是對，哪些是不對的。
前置知識	• 所有受訪學生均能指出 SSS、ASA 及 RHS 是全等三角形的其中三個條件。 • 三位同學都指出 AAS 是全等三角形的其中一個條件。 • 所有受訪學生都明白 R、H 及 S 的意思。 • 最差程度的受訪學生將相似及全等的條件產生混淆。 • 所有受訪學生均表示 SSS 代表三邊相等，即三對對應邊相等。 • 所有受訪學生都知道直角的對邊稱為斜邊。

整體而言，學生前測和訪談的結果及分析都與老師們選擇研究課課題所列出的學習問題和困難非常吻合。所以是次研究課的課題便可確定，其學習內容（Object of Learning，OL）也就確定如下：

四、確認學習內容（OL）及其關鍵特徵（Critical Feature，CF）：

(一) 確認學習內容（OL）

1. 教授全等三角形的第四個條件 SAS；
2. 探究 SAS 與 SSA 的分別；
3. 探究 RHS 與 SSA 的關係；
4. 探究可有第五個判定全等三角形的條件。

因此，在上研究課前，各老師也就需要完成以下各教學要點，使它們成為研究課的**前置知識**。

1. 全等圖形的基礎概念
2. 全等三角形的特性及其中三個條件：
   A. SSS
   B. ASA/ AAS
   C. RHS

(二) 關鍵特徵（Critical Feature CF）--「本科知識」和「教學內容知識」

探討教授上述學習內容所涉及的關鍵特徵及教學設計，正正也涉及老師個人的「本科知識」和「教學內容知識」的認知，這也正是本文的主要研究目的。主因筆者希望透過這個中學『課堂學習研究』的個案，說明『課堂學習研究』是一種有效提升數學教師的「本科知識」、「教學內容知識」的行動研究。希望藉著這個實例，能讓數學老師明白要成為專業的數學老師，「本科知識　」、「教學內容知識」是缺一不可的。以下是筆者在和老師們在進行教學設計的多次會議中，討論得的結果：

1. **關鍵特徵（CF）：**
   (1) 已知一個三角形有三條邊、三隻角；當兩個三角形是全等時，它們的相對邊、相對角都必定相等。但要判斷兩個三角形是否全等三角形，**我們並不需要知道全部三對對應邊、三對對應角是否全部相等；我們只要知道其中的三對相等便可以了。但哪三對？它們的位置有關係嗎？**
   (2) **當已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等時：**
      A. 若兩組對應邊的夾角相等，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 SAS；
      B. 若該組對應角並不是夾角，但是直角時，該兩個三角形便是全等三角形，

條件是 RHS；

C. 若該組對應角並不是夾角，也不是直角時(或鈍角--課本內容沒有提及)，該兩個三角形便不一定是全等三角形。因此，判定全等三角形並沒有 SSA 這個條件。

2. **關鍵問題（Key Questions）：**

因此，當已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角是相等時，它們是否全等？答案可以是全等，也可以不是全等。關鍵是看：

(1) **該對對應角是否是該兩組對應邊的夾角？**

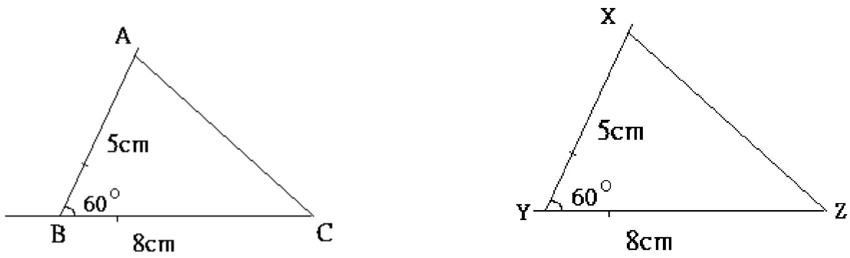
(2) **若不是夾角時，它是否是一直角（或一隻鈍角）？**

看以下例子：

(1) 條件是正確的：

若兩組對應邊及它們的夾角相等，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 SAS。

例如：



$\Delta ABC \cong \Delta \underline{XYZ}$ (SAS)

(2) 條件是錯誤：

若該組對應角並不是夾角或直角時，該兩個三角形便不一定是全等三角形；

SSA 不是判定全等三角形的其中一個可行的條件。

例如：

已知在 ΔIJK 和 ΔYXZ 中，IJ=XY，JK=YZ，$\angle K = \angle Z$。

ΔIJK 和 ΔYXZ 不是全等的

問題： SAS 和 SSA 有甚麼分別？它們都是已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等，為甚麼 SAS 是全等，SSA 不是全等？

關鍵是：

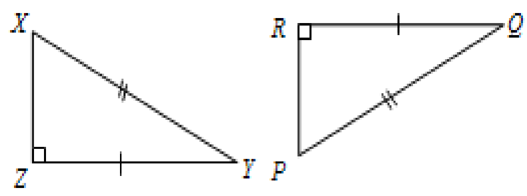
- SAS 是兩組對應邊及它們的**夾角相等**；A 在兩組相等對應邊中。

- SSA 是該組對應角 A **並不是夾角**，不是在兩組對應邊中間。

(3) 條件是正確：

若該組對應角並不是夾角，但是直角時，該兩個三角形便是全等三角形，條件是 RHS。

例如:



ΔPRQC ≅ Δ<u>XYZ</u> (RHS)

問題：RHS 不是和 SSA 一樣嗎？它們都是已知兩個三角形的兩組對應邊及一組對應角相等，但該組對應角並不是夾角（角不是在兩組對應邊中間）嗎？但為甚麼 SSA 不是全等，RHS 卻是全等?

關鍵是：

- SSA 的 A 不是直角，所以 SSA 不是判斷全等三角形的其中一個條件。
- RHS 的 R 是直角，所以 RHS 是判斷全等三角形的其中一個條件。
- 因此，RHS 是 SSA 的一個特殊例子（Exceptional case）。
- SSA 除了 RHS 還有其它特例嗎？有當 A 是鈍角。

註: 我們可以透過很多不同的教學方法，讓學生明白 SAS、SSA 和 RHS 的關係。並讓他們了解、知道 SAS 和 RHS 都是判定全等三角形的正確條件，而 SSA 則不是。這留待另兩次的教學設計會議中進行討論。利用不同老師的意見（V2），考慮不同學生的學習及認知能力（V1），而結合設計得適合該校學生的教學內容、教學設計成果（V 3）（見以下部份）。

五、教學內容、教學設計成果（V3）--提升了老師的「本科知識」和「教學內容知識」

老師們和筆者在教學內容會議中分享了各老師教授此課題的經驗及意見，從中大家歸納結集得以下結果：

(一) 以往的教學，大多著重於將判斷全等三角形的四個條件(SSS、SAS、ASA/ AAS、 RHS）逐一獨立解說，很少強調它們之間的關係，（例如：探究 SAS 和 SSA 的分別；RHS 和 SSA 之分別）；

(二) 以往的教學，大多以老師常用的 chalk and talk 直接解說，甚少讓學生自己作探究。因此學生會不明白 SAS 和 SSA 的分別, 也不知道 RHS 是 SSA 的特例。

(三) 教學流程：今次研究課的上課模式是透過老師誘導學生作繪圖探究，讓學生自己探究得 SAS 是判定全等三角形的其中一個條件、SSA 不是判定全等三角形的條件，但 RHS 是 SSA 的特例，也是判定全等三角形的其中一個條件。

(四) 教具：除圓規直尺作繪圖外，老師也可考慮以幾何條及兩腳釘或電腦作輔助教學。

以下是在教學設計會議中，老師和筆者的談話，討論解說 SAS、RHS 是判定全等三角形的條件，但 SSA 不是判定全等三角形的條件。

筆　者：你們以往是怎樣教授學生判斷全等三角形的條件的？

老師丁：大多依照教科書，告訴他們SSS、ASA、RHS和SAS是判定全等三角形的條件；然後透過例題，告訴他們判斷的步驟。

筆　者：那麼你怎樣知道SSS、ASA、RHS和SAS是判定全等三角形的正確條件？怎樣說服及讓學生明白它們是正確的？有甚麼方法嗎？

老師丁：中學一年級只學應用。我沒考慮過。

老師乙：對，中二有用繪圖方法讓學生明白，若提供的三個已知量度（兩邊一角或兩角一邊或三邊），各同學們都只能繪畫得一個相同的三角形，則哪便是正確的條件。

老師丁：我沒有教中學二年級，我只知應用。

筆　者：那麼你們覺得把繪圖法和應用結合一拼讓學生在中一學習是不是更好嗎?

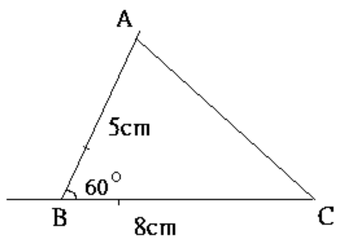
老師們和筆者都同意並集體設計教學活動。 以下是利用繪圖方法解說 SAS 是判定全等三角形條件和 SSA 不是判定全等三角形條件的教學設計例子。

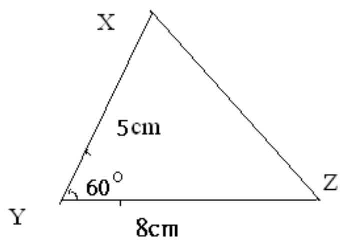
(一) 教學設計與變易圖式的運用（筆者和老師合作設計的）

1. 教學內容一：透過繪圖方法認識判定全等三角形的其中一個條件：兩邊及夾角相等（SAS）

活動一：學生以兩人為一組，一人繪畫 ∆ABC，另一人繪畫 ∆XYZ。

已知在 ∆ABC 和 ∆YXZ 中，AB =XY=5cm，BC=YZ=8cm，∠B =∠Y= 60°。

<table>
<tr><td colspan="2">老師透過提示，帶領學生利用圓規、 量角器、 直尺和鉛筆，繪畫 ∆ ABC 和 ∆ XYZ。</td></tr>
<tr><td>繪畫 ∆ABC，
其中 AB 長 5cm，∠B=60°， BC=8cm。
完成後， 嘗試量度 AC 的長度。


AC 的長度是：7cm
觀察全班每一位同學所繪畫的 ∆ABC 是否全等？（是）</td><td>繪畫 ∆XYZ，
其中 XY=5cm，∠Y=60°， YZ=8cm。
完成後， 嘗試量度 XZ 的長度。


XZ 的長度是：7cm
觀察全班每一位同學所繪畫的 ∆XYZ 是否全等？（是）</td></tr>
<tr><td colspan="2">觀察你們每組繪畫的 ∆ABC 和 ∆XYZ，把它們剪出來，它們是否全等？ （是）</td></tr>
<tr><td colspan="2">我們也可以用 SSS 判定它們是全等，試在_____上填上適當線段或數字。
因為我們量度得：
AC=XZ =7cm（量度得）；AB=XY=5cm（已知）；BC=XZ=8cm（已知）
所以 ∆ABC 全等 ∆XYZ（SSS）</td></tr>
</table>

老師可以利用以下的變易圖式設計不同的繪圖練習，讓學生明白 SAS 是不受角的大小影響的。

2. **變易圖式**

判斷全等三角形的條件	變	不變	審辨
SAS	角的大小（鈍角→直角→ 銳角）	兩對對應邊的長度	當對應角是夾角時，無論角是鈍角或直角或銳角，該兩個三角形都是全等三角形，SAS 是判斷全等三角形的正確條件。

3. 練習

(1) 已知在 ΔABC， AB=5cm，BC=8cm，角 B=90°。繪畫 ΔABC。

(2) 已知在 ΔABC， AB=5cm，BC=8cm，角 B=120°。繪畫 ΔABC。

你和同學畫得的 ΔABC 是一樣的嗎？

4. 結論

由此活動，學生明白若兩邊及夾角相等, 只能繪畫得一個三角形。因此，若兩個三角形有同等的兩對對應邊及同等的一對對應夾角，它們就一定是全等三角形。所以 SAS 是正確判定全等三角形的條件。

活動二：

目的: 解說 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。

若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對同等的對應夾角，但該對對應角並不是夾角，則該兩個三角形便不一定是全等三角形（因該對應角可以是銳角），所以 SSA 不是正確判定全等三角形的條件。

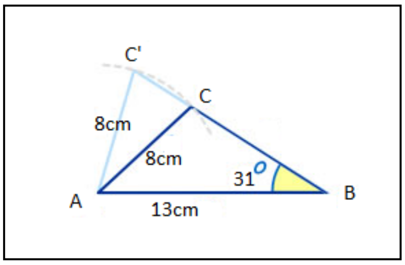
老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫 ΔABC。

繪畫 ΔABC，步驟：

(i) 先利用直尺和量角器畫角 B=31° ；

(ii) 畫 AB=13cm

(iii) 利用 A 作圓心，半徑是 8cm，作一弧；
使弧和角B的另一臂產生兩個交点;命名為C和C’。
完成後，連接 AC 和 AC’，AC=AC’=8cm（半徑）。



每組同學，一個剪出繪畫得的 ΔABC，另一個剪出繪畫得的 ΔABC’。

把它們重疊一起，ΔABC 和 ΔABC’是否全等？（不是）。

因此，我們可以判斷得：若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對對應夾角，但該組對應角並不是夾角，該兩個三角形便不一定是全等三角形，所以 SSA 不是正確判定全等三角形的條件。

(二) 繼續進行教學內容、教學設計討論（V2）、（V3）

其後，筆者引導老師自己發現 RHS 和 SSA 的關係；並發現 RHS 是 SSA 的特殊例子（Exceptional case）。跟着，也有老師發現若 SSA 中的角 A 是一鈍角，則 SSO（O 是鈍角）也 SSA 的特殊例子。

筆　者：你們可有發現RHS和SSA有甚麼相同和相異的地方？

老師乙：它們同是有同等的兩對對應邊及一對對應夾角，該組對應角並不是夾角；但

RHS是判斷全等三角形的條件，而SSA不是正確判定全等三角形的條件。

老師丁：除了RHS是SSA的特殊例子，還有其它嗎？

老師甲：有，若SSA中的角A 是一鈍角，則它也SSA的特殊例子。

筆　者：那麼，你們覺得我們有需要教授這些課本以外的知識給我們的學生嗎？

各老師皆同意。他們更強調有些公開考試也有考課程以外的延伸知識呢！下文便是透過「課堂學習研究」的「變易圖式」，讓學生探究得上述的「SSA 的特殊例子」---「RHS」，亦即「SSR」和「SSO」，O 是鈍角。

(三) 變易圖式

SSA：判斷全等三角形的條件	變	不變	審辨
SSA 註：在 SSA 中，A 代表任何角；因此，我們不知道 A 是銳角，還是直角？還是鈍角？	角的大小（銳角→直角→鈍角）	有兩對對應邊及一對對應角（不是夾角）	當對應角**不是夾角時**，該角由銳角改為直角或鈍角，我們仍會像活動二繪畫得該兩個大小不相同的三角形？

活動三：

目的: 解說 RHS 是判斷全等三角形的正確條件；它是 SSA 的特例（Exceptional case）。

RHS 亦即 SSR（A → R）。

每個學生獨自繪畫 ∆ABC。

已知在 ∆ABC 中，AB=4cm，BC=5cm，∠A=90°。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫 ∆ABC。

繪畫 △ABC，步驟：

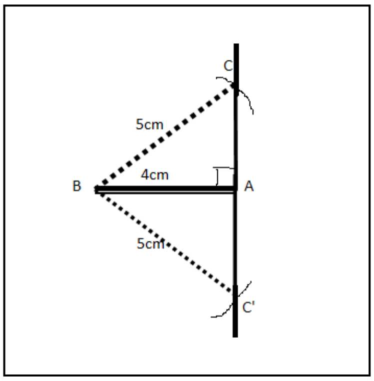
(i) 先利用直尺和量角器畫∠A=90^0（直角）；

(ii) 畫 AB=4cm

(iii) 利用 B 作圓心，半徑是 5cm，作一弧；

使弧和角 A 的一臂產生兩個交皁；命名為 C 和 C’。

完成後，連接 BC 和 BC’，BC=BC’=8cm（半徑）。



觀察同學所繪畫的△ABC 和△ABC’是否全等？（是）

因此，若兩個三角形有同等的兩對對應邊及一對對應角，雖然該組對應角並不是夾角，但若它是一直角，則繪畫得的兩個三角形也是全等的，所以 RHS 是正確判定全等三角形的條件。

RHS 亦即 SSR（A → R），SSA 的特例。

活動四(新發現):

目的: 解說 SSO（O 是一鈍角）也是判斷全等三角形的正確條件；它也是 SSA 的特例。

每個學生獨自繪畫 △ LMN。

已知在 ΔLMN 中，MN=7.6cm，LN=12.4cm，角 M=125°。

老師透過提示，帶領學生利用圓規、量角器、直尺和鉛筆，繪畫 △LMN。

繪畫 △LMN，步驟:

(i) 先利用直尺和量角器畫 角 M=125° ；

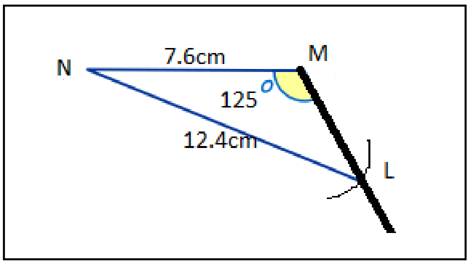
(ii) 畫 MN=7.6cm

(iii) 利用 N 作圓心，半徑是 12.4cm，作一弧；

使弧和角 M 的另一臂產生一個交皁；

命名為 L。

完成後，連接 LN=12.4c（半徑）。



我們只能繪畫得一個三角形 LMN。因此有同等的兩對對應邊及一對對應角，雖然該組對應角並不是夾角，但若它是一鈍角時，則繪畫得的三角形是形也是全等的，所以 SSO 也是正確判定全等三角形的條件。

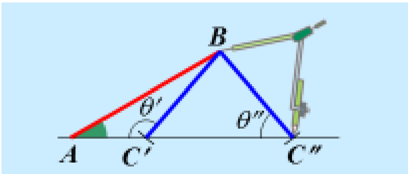
(四) 再繼續進行教學內容、教學設計討論（V2）、（V3）

其後，筆者再引導老師自我發現得除了用「繪圖法」，也可以用「邏輯推論」用來說明「RHS 和 SSO」是「SSA」的特殊例子(Exceptional case)，「RHS 和 SSO」是正確判定全等三角形的條件。

下文是筆者和老師們利用「邏輯推論」說明 RHS（亦即 SSR，A→R）和 SSO（A→O，O 代表鈍角）是判定全等三角形的正確條件，亦即是 SSA 的特殊例子。

1. 利用「「邏輯推論」」判定全等三角形條件

下圖是前文的繪圖法，用來解釋 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。



$\angle$A 是一銳角（已知）；$\angle BC'C'' = \theta''$ (isos. Δ)

$\therefore \theta''$ 一定是銳角（因為$\Delta BC'C''$ 是不可能有兩隻鈍角內角的）

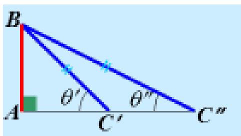
從上解，可繪畫得以下兩個三角形，ΔABC’ 和 ΔABC”；

所以，**SSA 不是**判定全等三角形的正確條件。

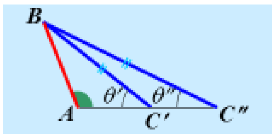
現再慮另外兩個情況：

情況一（Case1）：∠A 是一直角　　和　　情況二（Case2）：∠A 是一鈍角。

我們可假設能夠繪畫得以下兩圖：



Case 1: ∠A=90^0



Case 2: ∠A=鈍角

探究問題：

問題 1：在上述兩個情況，θ" 是一銳角，還是一鈍角呢？Case1 和 Case2 的圖有可能繪畫得嗎？

問題 2：在上述兩個情況，它們能夠繪畫得兩個三角形（ΔABC’ 和 ΔABC”）嗎？

情況一（Case 1）：已知∠A=90°；因此，∠ABC'和 θ'一定小於 90^0。

∵ $\angle BC'C''$ =90° + ∠ABC'（三角形外角）

$\angle BC'C''$ > 90^0

∴ $\angle BC'C''$ 是一鈍角。

∵ $\angle BC'C'' = \theta''$（BC'= BC", isso. ∆）

∴ ∆ $BC'C''$是一定不能繪畫得的(因不可能有任何三角形,它的內角和大於 180 度)。

因此，我們只能繪畫得一個三角形 ABC'。

再者，由於給定的兩條邊長之長邊一定是給定的直角（Right angle (R)）的對邊；因些該長邊必定是直角三角形的斜邊（Hypotenuse (H)），而另一給定的短邊則為直角三角形的其一邊（Side (S)）；所以得出 RHS（亦即 SSR，A→R）是判定全等三角形的正確條件，亦即是 SSA 的特殊例子 。

同理，情況一（Case 2）：

∵ $\angle BC'C''$ =鈍角 + ∠ABC'（三角形外角）

$\angle BC'C''$ > 90°

∴ $\angle BC'C''$ 是一鈍角。

∵ $\angle BC'C'' = \theta''$（BC' = BC"，isso. ∆）

∴ ∆ $BC'C''$是一定不能繪畫得的(因不可能有任何三角形,它的內角和大於 180 度)。

因此，我們只能繪畫得一個三角形 ABC'。所以，SSO（A→O，O 代表鈍角）是判斷全等三角形的正確條件，亦即是 SSA 的特殊例子 。

2. 利用「解三角」判定全等三角形條件（V2）、（V3）

在和老師們討論教學設計的過程中，我們發現「解三角」也可以說明 SSA 不是判定全等三角形的正確條件，而 SSO 和 RHS 卻是 SSA 的特例，它們都是判定全等三角形的正確條件。

筆　者：老師們，我們都知道若果兩個三角形是全等的，則它們的三對對應邊、三對對應角必定是相等的。對嗎？

老師們齊齊點頭，並說對。

筆　者：你們記得甚麼叫做「解三角」（Solving Triangle）？可以利用它**判定全等三角**

形條件嗎？

老師甲：我在高中班級有教「解三角」，我們可以用**Sine Rule**（**正弦定律**）解得給定的兩邊一角或兩角一邊的三角形的其餘未知邊和未知角的數值。

老師乙：對，若解得的三角形的角和邊的數值，連給定的邊和角，多於三隻角、三條邊；那即代表給定的兩邊一角或兩角一邊能出現在兩個不一樣的三角形上，所以它不是正確判定全等三角形的條件。

老師丁：我也明白了！若解得的三角形的角和邊的數值，連給定的邊和角，只有三隻角、三條邊的數值；那即代表給定的兩邊一角或兩角一邊只能出現在一個三角形上，所以它是正確判定全等三角形的條件。

老師甲：對！我在高中教「解三角」，忘記告訴學生解三角形有這樣的作用。

老師丙：啊！我也明白了！那麼我們也可以用「畢氏定理」和「三角函數」解給定一直角和兩條邊的值的直角三角形，說明 RHS 是判定全等三角形的正確條件。

經過討論，筆者和老師們清楚知道利用「解三角」判定全等三角形條件，即是利用計算出三角形的餘下所有未知角、未知邊的值，判斷給定的兩邊一角或兩角一邊能否出現在兩個不一樣大小的三角形上？若能，即表示給定的條件不是正確判定全等三角形的條件。反之，若不能，即表示給定的條件是正確判定全等三角形的條件

以下例子是筆者和老師們利用「解三角」說明 SSA 不是判定全等三角形的正確條件，SSO 是判定全等三角形的正確條件。

例一：已知 $\triangle ABC$，AB=6cm，BC=4cm，$\angle A=30°$；

(i) 解 $\triangle ABC$，

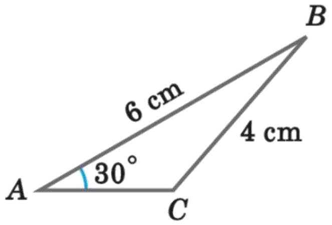
(ii) 根據解得（i）的結果，給定的 AB=6cm，BC=4cm，$\angle A=30°$ 能否出現在兩個不全等的三角形上呢？

(iii) 根據（ii）的結果，說明 SSA 是判定全等三角形的正確條件嗎？

解：

(i) 利用正弦定律（Sine Rule）：

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle C}$$
$$\frac{4\text{ cm}}{\sin 30°}=\frac{6\text{ cm}}{\sin\angle C}$$
$$\sin\angle C=\frac{6\sin 30°}{4}$$
$$\angle C=48.590°\ or\ 180°-48.590°$$
$$=48.6°\quad or\ 131°, cor.\ to\ 3\ sig.\ fig.$$



$\angle B$ = 101.4° 或∠B = 19°

$$\frac{AC}{\sin(\angle B)}=\frac{BC}{\sin(\angle A)}$$

$$\frac{AC}{\sin 101.4°}=\frac{4}{\sin 30°} \quad 或 \quad \frac{AC}{\sin 19°}=\frac{4}{\sin 30°}$$

$AC=7.84cm$　　　AC =2.60cm　*cor. to 3 sig.fig*

(ii)　根據解得（i）的結果，我們可以得到以下兩個大小不一樣的 △ABC。

第一個 △ABC	第二個 △ABC	
AB=6cm	**AB=6cm**	（給定）
BC=4cm	**BC=4cm**	（給定）
AC=2.60cm	AC=7.84cm	
∠A=30°	**∠A=30°**	（給定）
∠B=19°	∠B=101.4°	
∠C=131°	∠C=48.6°	

因此，給定的 AB=6cm，BC=4cm，∠A=30° （SSA）是可以出現在兩個不一樣大小、不全等的三角形上的。

(iii)　根據（ii）的結果，說明給定的 SSA 的值能夠出現在不一樣大小的兩個三角形上。因此若有兩個三角形都有這樣的給定 SSA 值，它們就不一定是一模一

樣的全等三角形。所以 SSA 不是判定全等三角形的正確條件。

例二：已知 △ABC，BC=7.6cm，AC=12.4cm，∠B=125°，

(i) 解 △ABC，

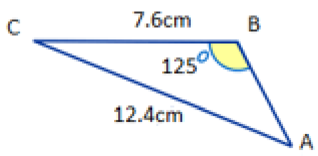
(ii) 根據解得的（i）的結果，給定的 BC=7.6cm，AC=12.4cm，∠B=125°會否出現在兩個不全等的三角形上？

(iii) 根據（ii）的結果，說明 SSO（O 代表鈍角）是判定全等三角形的正確條件嗎？

解：

(i) 利用正弦定律（Sine Rule）：

$$\frac{\sin(\angle A)}{7.6} = \frac{sin125°}{12.4}$$



$$\frac{\sin(\angle A)}{1} = \frac{7.6\ x\ sin125°}{12.4}$$

$$Sin(\angle A) = 0.502$$

$\angle A = 30.1°$ or $149.9°$

$\because \angle B = 125°$（已知） $\angle A$ 不可以等於 149.9°.（三角和不可大於 180°）

$\angle C = 180° - 125° - 30.1°$

$\angle C = 24.9°$

$$\frac{\sin(\angle C)}{AB} = \frac{sin125°}{12.4}$$

$$\frac{\sin 24.9°}{1} = \frac{AB\ x\ sin125°}{12.4}$$

AB = 6.37cm

(ii) 根據解得（i）的結果，我們只找得以下一個 △ABC。

AB=6.37cm	BC=7.6cm （給定）	AC=12.4cm（給定）
∠A=30.1°	∠B=125^0 （給定）	∠C=24.9°

(iii) 根據（ii）的結果，說明給定的 SSO 的值只能夠出現在一個三角形。因此若

有兩個三角形都有這樣的給定的 SSO 值，它們就一定是一模一樣的全等三角形。所以 SSO 是判定全等三角形的正確條件。

以下練習題可以利用 Sine Rule、畢氏定理和三角函數解得直角三角形；從而說明 RHS（亦即 SSR，A→R）亦是判定全等三角形的正確條件。解直角三角形留待讀者作練習吧！

練習： 已知在 ΔABC 中，AB=4cm，BC=5cm，角 A=90°。

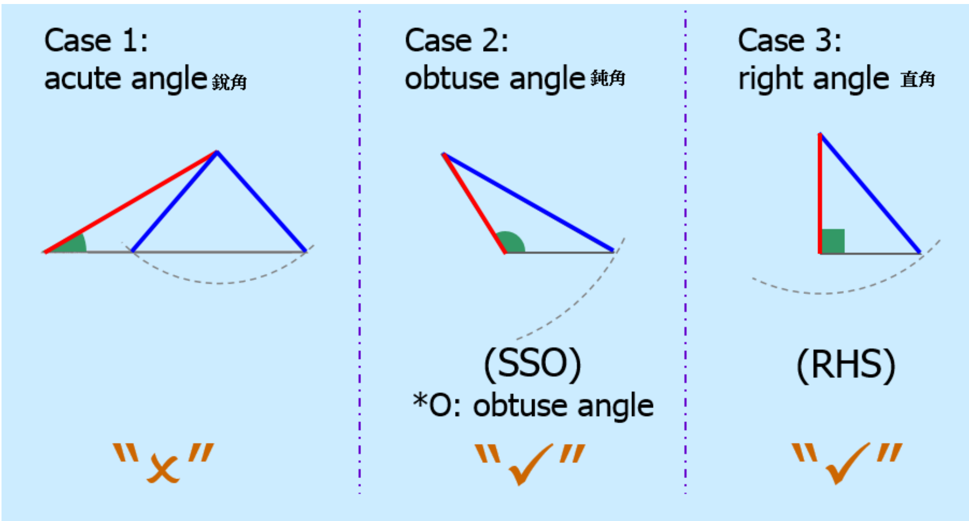
(i) 解 ΔABC。

(ii) 根據解得的（i）的結果，給定的 AB=4cm，BC=5cm，角 A=90°會否出現在兩個不全等的三角形上？

(iii) 根據（ii）的結果，說明 RHS 是判定全等三角形的正確條件嗎？

總結：筆者和老師經過多次教學設計的會議，我們發現以下的結果：

(i) 當已知一個三角形給定的兩邊及一個非夾角的大小時，SSA 不是判定全等三角形的正確條件；RHS 和 SSO 是 SSA 的特例，它們都是判定全等三角形的正確條件。



(ii) 在說明這些判定全等三角形的條件，老師可以根據學生的能力及就讀年級，決定以哪一方法（可以多於一種）教導學生。是次研究，共探究得以下三種方法：

A. 利用「繪圖法」判定全等三角形條件
B. 利用「邏輯推論」判定全等三角形條件
C. 利用「解三角」判定全等三角形條件

六、「課堂學習研究」與老師的「本科知識」和「教學內容知識」的提升

是次研究，老師和筆者在分析教學內容及設計教學活動的多次會議中，經過深層次的討論和分析教授此課題所需要的「本科知識」和「教學內容知識」。老師們都十分認同「課堂學習研究」確實提供了一個平台，讓他們有機會和不同背境和經驗的同工和大學導師一同做研究，讓他們認識了許多教科書以外的「本科知識」和「教學內容知識」；讓他們深入學習了不同級別的中學數學課題的內容和了解到它們的關連性。是次研究更讓他們學習了很多不一樣的教學方法。例如，老師們學習了利用變易圖式設計教學活動或練習、學會運用不同的方法教學。在這研究中，他們等別深徹體會到探究式教學的好處。從他們的交談中，知道他們都十分認同探究式教學不單能提升學生的學習興趣，更能提升學生的數學思維能力。因此，老師們都深覺「課堂學習研究」確實能提升他們的專業成長。表 4 撮述了老師們在是次研究增長了的主要「本科知識」和「教學內容知識」。

表 4

老師們的主要新增「本科知識」和「教學內容知識」

主要新增「本科知識」	主要新增「教學內容知識」
1. RHS（A→R）是 SSA 的特例	1.認識課題的關鍵特徵及學習難點
2. SSO（A→O）是 SSA 的特例	2.利用變易圖式設計練習
3.利用「圓規繪圖」判定全等三角形條件	3.設計探究活動，探究 SAS 與 SSA 的分別
4.利用「邏輯推論」判定全等三角形條件	4.設計探究活動，探究 RHS 與 SSA 的關係
5.利用「解三角」判定全等三角形條件	5.設計探究活動，探究 RHS 與 SSA 的關係

七、前後測成績的比較

鑑於是次研究，主要目的是指出「課堂學習研究」確實能夠有效提升數學老師的「本科知識」與「教學內容知識」。因此，文章並沒有太多著墨於學生在課堂上的學習情況，也沒有詳細介紹研究課的具體教案及教具設計。但為了反映是次研究課的教學成效，以下表 5 展示了前後測成績的比較；根據數據比較，確實能夠反影得是次「課堂學習研究」

是成功的，是有效提升了是次教學的效益的。

表 5

前後測卷成績比較

部分	內容	題號	前測答對率(%)	後測答對率(%)
前置知識	• 了解全等圖形的基礎概念	Q1	20%	80%
	• 了解全等三角形的特性及其中三個條件（SSS、ASA/ AAS，RHS）	Q2 Q3	70% 70%	90% 90%
研究課重心	• 認識全等三角形的第四個條件 SAS	Q4	60%	90%
	• 按照對應邊和角的次序寫出全等三角形的名稱	Q5	30%	80%
	• 判定 SSA 不是全等三角形的其中一個條件	Q6	60%	80%
	• 辨別全等三角形的其中兩個條件：SAS 與 RHS	Q7	70%	80%
	• 辨別全等三角形的正確條件 SAS 與不正確條件 SSA	Q8	40%	80%
知識轉移	• 掌握非圖形及文字性問題	Q9 Q10 Q11	80% 80% 80%	90% 80% 90%

肆、結論

從是次研究，筆者發現大部份數學老師的「本科知識」是很不錯的；五位老師中有三位在大學是主修數學的。即使是兼教中學一年級數學的那位年輕老師，他也能理解中五的「解三角」數學問題。這也許由於他是理科出身，在大學是主修物理，因此數學基礎也不弱吧！

但「教學內容知識」方面，則略覺他們差了一點。也許由於香港的中學數學課程的內容過多，而編排上課的節數又不足夠，所以他們大多只能依書直說，集中以「講授方式」教學，使教學能趕上進度。從老師交流中，得知大部份老師都很少藉著參考其它外國數學教學書籍或數學論文，提升他們的「教學法」和「教學內容知識」。他們也較少實踐香港教育局總課程發展主任（數學）吳少階（2011）所說的「新課程內增設了的「數學的進一步應用」和「探索與研究」兩類活動」。這兩類活動目的是作為學生的延展學習，也讓學生欣賞數學。這兩類活動大多以作業（task）形式，進行一些探究性學習。目的是希望學生能在活動的過程中，把知識應用於另一知識層面或具體生活事情上。吳少階（2011）更強調「數學的進一步應用」更應橫跨數個數學課題，看學生是否能融合貫通。是次研究正正實踐了課程的要求。例如探索 SSA 的特例：RHS（SSR）和 SSO；探索「解三角」、「畢氏定理和三角函數」與判定「全等三角形」的關係，這正正突顯學生是否能融合貫通，了解這些橫跨數個數學課題的知識的關係。

因此，筆者極之認同 Shulman（1987）所說：一個專業的數學老師，單有良好的「本科知識」，仍是不夠的；優良的「教學內容知識」也是不可缺的。

從這次「課堂學習研究」中，老師經過集體研究、討論，對判定『全等三角形』條件的教學認識加深了。而且各中一班學生在後測的表現比前測中二班的成績有明顯的進步，這都強化了老師對「課堂學習研究」的信念。 所以，老師在課研後進行檢討，都認為多元化教學確實能夠提升學生對抽象的數學概念的學習興趣和理解。透過具體探究活動，確實能夠使他們更易於明白其中的抽象數理。整體而言，老師和教育大學導師們對是次「課堂學習研究」都抱正面的應同，認為是研究並不是集體備課（group lesson preparation），它包含了專業發展（staff development）、個案研究（case study）的元素。所以課堂學習研究是具探究性（exploratory）和描述性（descriptive）的。因此，是次課堂學習研究，確實能為老師們提供一個正確的、新穎的教學方向，並能讓老師們認識及體會課堂學習研究的運作模式及了解其內在的功能。是次研究，更讓老師們擴闊了個人

的視野，並藉著匯集各人的長處，在集思益廣的有利環境下提升了教師的專業知識。

參考文獻

吳少階（2011）。強調批判解難，結合知識生活。**星島日報，教育版**。日期：2011 年 9 月 1 日，香港。doi: 10.9747/jars.18.1_53

香港課程發展議會（1999）。**中學課程綱要－數學科**（**中一至中五**）。香港：政府印務局。doi: 10.6610/ETJMT.20070301.02

香港課程發展議會（2000）。**數學教育學習領域：數學課程指引（小一至小六）**。香港：政府印務局。doi: 10.6173/CJSE.2007.1505.05

黃德華（2011）。香港數學課程改革與課堂學習研究。梁玉麟、勞傅燕華、江巧妍，**數學課堂學習研究實踐與數學基本概念的教學**，頁 3-32。安徽：安徽教育出版社。doi: 10.6610/ETJMT.20090601.02

盧敏玲（2002）。**課堂學習研究**，院校協作與教學實踐發展中心通訊：香港:香港教育學院。doi: 10.6222/pej.3803.200509.0906

Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*,Vol. 2, pp. 1 - 48. Greenwich, CT: JAI Press. doi: 10.1016/S1479-3687(01)80021-3

Calhoun, E. F. (1993). Action research: Three approaches. Educational Leadership, 51 (2), 62-65. doi: 10.4135/9781483329369.n12

Fullan, M. (1997). The complexity of the change process. In M. Fullan (Ed.), *The challenge of school change*. Illinois: Skylight Training and Publishing. doi: 10.4135/9781452218991.n2

Schofield, A. H. (1981). 'Teacher effects on cognitive and affective pupil outcomes in elementary school mathematics'. *Journal of Educational Psychology*, 73, 462-471. doi: 10.1037//0022-0663.73.4.462

Shulman, l. s. (1986). 'Those who understand: Knowledge growth in teaching'. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). 'Knowledge and teaching: Foundations of new reform'. *Harvard*

Educational Review, 57(1), 1-22. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Wong, T. W. (2002). Competency in Mathematics Teaching: Subject Content knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Attitudes Toward Teaching Mathematics. *Doctoral dissertation*, University of Leicester. doi: 10.1016/j.tate.2014.11.004

附件一

<u>中一級數學科前測卷</u>

時間： 25 分鐘

班別： F. 1 (   )　　　　　　　　姓名：____________________ (   )

1. 在下列哪種情況下，肯定圖形是全等的?

    I. 它們相似。

    II. 它們的對應角相等。

    III. 它們的面積相等。

    A. 只有 I

    B. 只有 II

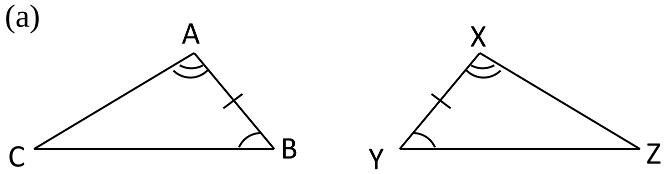
    C. 只有 III

    D. I 及 III

D

2. 試判斷下列每組三角形是否全等。 若是，則寫下理由。

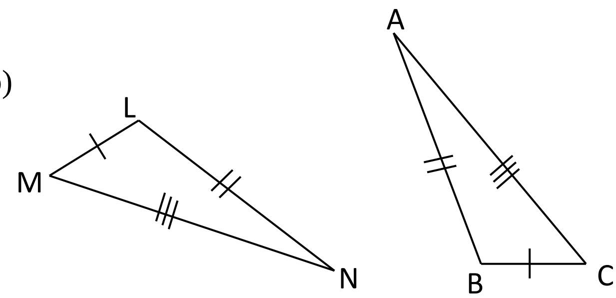
(a)



[√] 是　理由： ___**ASA**______

☐ 不是

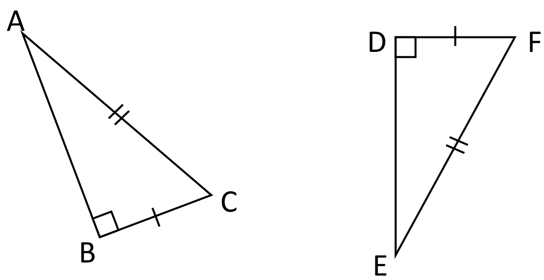
(b)



[√] 是　理由： ___**SSS**______

☐ 不是

(c)



[√] 是　理由： ___**RHS**______

☐ 不是

3.

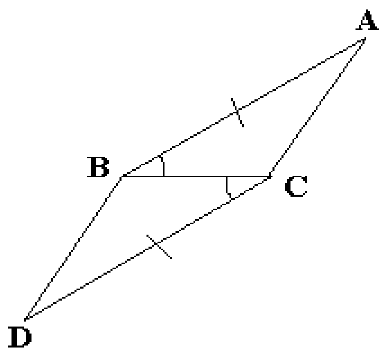
已知ΔABC ≅ ΔPQR，則

(a)　∠A = ___∠P___　(b)　∠C = ___∠R___　(c)　∠Q = ___∠B_____

(d)　___AB____ = PQ　(e)　BC = ____QR____　(f)　AC = ____PR____

題 4 至題 6。 觀察附圖，你能否在圖中找到兩個全等三角形？若能夠，請在 _____ 上填上三角形的名稱，並於(　　　)內寫上全等的理由。

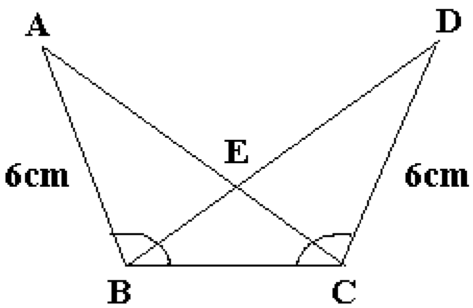
4.



[√]　能　ΔABC ≅ _ΔDCB___ (SAS)

□　否

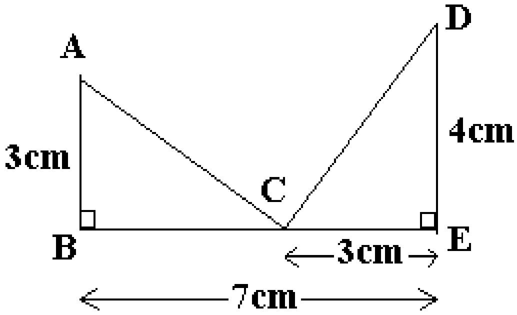
5.



[√]　能　ΔABC ≅ _ΔDCB___ (SAS)

□　否

6.



[√] 能 ΔABC ≅ _ΔCED___ (SAS)

□ 否

題 7 至題 8。選出正確的答案。

7 已知在ΔIJK 和 ΔYXZ 中，IJ = XY'、JK = YZ、角 K = 角 Z。

A. ΔIJK 和 ΔYXZ 不是全等的

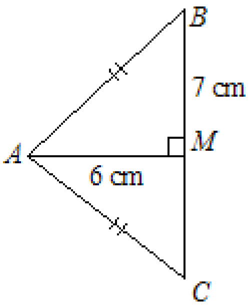
B. ΔIJK ≅ ΔYXZ (SSA)

C. ΔIJK ≅ ΔYXZ (AAS)

D. ΔIJK ≅ ΔYXZ (ASA)

A

8.



A. ΔABM ≅ ΔAMC (RHS)

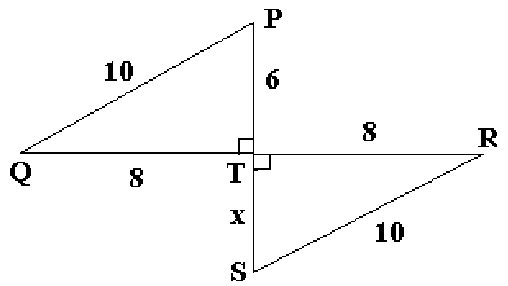
B. ΔABM ≅ ΔACM (SAS)

C. ΔMBA ≅ ΔMCA (SSA)

D. ΔABM ≅ ΔACM (RHS)

D

9. 已知 ΔPQT ≅ ΔSRT, 且 PTS 及 QTR 都是直線。 請寫出它們全等的理由及找出圖中的未知量 x。



(a) ΔPQT ≅ ΔSRT 的理由：(RHS)

(b) x = 6

10. 已知 ΔPQR ≅ ΔXYZ。 判斷下列句子是否正確。 「√」表示正確的，「×」表示錯誤的。

(a) ΔPQR 和 ΔXYZ 的所有對應角相等。 □ √

(b) ΔPQR 和 ΔXYZ 的所有對應邊相等。 □ √

(c) ΔPQR 和 ΔXYZ 的周界是相等的。 □ √

(d) ΔPQR 和 ΔXYZ 的面積是相等的。 □ √

11. 判斷下列句子是否正確。 「√」表示正確的，「×」表示錯誤的。

(a) 任何兩個周界相等的三角形均是全等的。 □ ×

(b) 任何兩個面積相等的三角形均是全等的。 □ ×

(c) 所有直角三角形均是全等的。 □ ×