鄭英豪、陳建誠、許慧玉（2017）。
國中生在動態幾何軟體輔助下臆測幾何性質之研究。
臺灣數學教育期刊，4（1），1-34。
doi: 10.6278/tjme.20170317.001

國中生在動態幾何軟體輔助下臆測幾何性質之研究

鄭英豪[1]　陳建誠[2]　許慧玉[3]
[1]臺北市立大學數學系
[2]明志科技大學
[3]國立清華大學數理教育研究所

本研究探討國中生如何在動態幾何環境下臆測幾何性質。研究以程序性反駁模式為中介理論架構設計幾何臆測學習單，目的是瞭解國中生如何在動態幾何環境中建構圖形案例，並依據案例來臆測正確的幾何性質。其中，本研究特別強調將動態幾何軟體定位為「例子產生器」，結合幾何圖形案例測量值的紀錄表格，鷹架學生進行臆測活動。研究樣本為15位七年級國中生，以質性分析方法為主、量化資料輔助說明下，研究發現（1）動態幾何環境下，幾何性質本身涉及測量值關係的複雜程度及幾何性質是否容易在圖形上視覺觀察，影響學生造例與臆測表現。同時這兩個因素影響學生在動態幾何環境下的認知行為和學習困難；（2）具備良好的幾何物件分類系統是在動態幾何環境中成功臆測的重要關鍵；（3）學生對圖形進行分解與重組操作有助於在動態幾何環境中察覺圖形中蘊含的特徵或關係；（4）學生能拖曳不同圖形案例並不等同他們能察覺符合命題結果的正反例，進而影響臆測結果；（5）學生仍缺乏動態幾何環境知識以建構原本意圖產生的圖形案例。另，本研究也依據學生在結合動態幾何與案例記錄表格的表現，區辨出不同臆測認知策略：分別為有限隨機離散案例歸納、系統性調整案例臆測以及動態性調整案例臆測。

關鍵詞：動態幾何軟體（DGS）、幾何性質、程序性反駁模式（PRM）、臆測

通訊作者：許慧玉，e-mail：huiyuhsu@mail.nhcue.edu.tw
收稿：2016 年 4 月 6 日；
接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Cheng, Y. H., & Chen, J. C., & Hsu, H. Y. (2017).
Junior high school students conjecture geometric properties in a dynamic geometry software environment.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *4*(1), 1-34.
doi: 10.6278/tjme.20170317.001

Junior High School Students Conjecture Geometric Properties in a Dynamic Geometry Software Environment

Ying-Hao Cheng[1] Jian-Cheng Chen[2] Hui-Yu Hsu[3]
[1] University of Taipei
[2] Ming Chi University of Technology
[3] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

This study investigated how junior high school students conjecture geometric properties in a dynamic geometry software (DGS) environment. Using the proceduralized refutation model as an intermediate theoretical framework, we particularly examined the process and the difficulties that students may have when conjecturing. Specifically, we referred to DGS as an "example generator" and combined it with spreadsheets to support students in conjecturing geometric properties. A total of 15 seventh grade students participated in this study. Based on the qualitative analysis and quantitative data, we demonstrated that (1) the complexity of the relationship among measurements involved in a geometric property and the possibility of visualizing that property play important roles in determining students' performance when conjecturing in a DGS environment; (2) being able to effectively classify geometric objects was the key to successfully perceiving geometric properties and relationships embedded in geometric diagrams; (3) decomposing and recomposing diagrams aided students in recognizing embedded geometric properties; (4) the ability to drag a geometric diagram into different shapes in a DGS environment did not guarantee the ability to discern supportive and counter examples or the ability to use those examples to correct false conditional statements; and (5) a lack of knowledge specific to DGS environments, particularly those related to dragging, hindered students' effective construction of diagram examples. Additionally, we identified three types of conjecture approach: induction by randomly generating a finite number of discrete examples, conjecture by systematically making examples, and conjecture by dynamically altering examples.

Keywords: dynamic geometry software (DGS), geometric property, proceduralized refutation model (PRM), conjecture

Corresponding author：Hui-Yu Hsu，e-mail：huiyuhsu@mail.nhcue.edu.tw
Received：6 April 2016;
Accepted：17 March 2017.

壹、前言

一個好的數學活動設計應提供學生主動思考與建構的機會，而學生參與在這類數學學習活動是改善當前臺灣學生「成就高與態度低」學習表現的主要關鍵（林福來，2010）。在此前提下，臆測是達成此目標、解決臺灣面臨教育問題的策略之一。研究清楚指出臆測是數學問題解決歷程的骨幹（backbone）（Mason, Burton, & Stacey, 1982），亦是發展數學能力的重要樞紐。參與數學臆測活動的學生有充分的主動思考與建構機會，有助於發展學生數學概念知識、數學程序性知識、及問題解決能力，並改善學生學習態度，進而對數學持著正面的態度意向。近年來，臆測與論證已然成為全世界數學教育的核心之一，例如，NCTM（2000）就提出臆測與論證是各學習階段學生應該要學習的課程內容，包含幼稚園、國小階段等，課室教學都應該提供學生有臆測與論證的學習機會（Ball & Bass, 2003; Reid, 2002）。而臆測與論證也是目前推動十二年國教用培養臺灣學生數學素養的重要主張之一。

幾何問題的探索通常需要持續在證明與反駁間交互循環，其歷程提供參與者臆測以及推理論證的機會（Lakatos, 1976）。動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）能鷹架學生探究幾何問題、臆測與推理論證幾何性質，進而瞭解幾何相關知識。本研究所謂的幾何性質意旨國中小教科書出現的定義、定理、引理等等。這些定義、定理和引理在教科書的呈現並不一定遵照「若…則」（if-then）的條件命題敘述，而是以數學事實的陳述方式呈現，其並不強調邏輯的前因後果。如教科書呈現平行四邊形的性質為「平行四邊形的對角線把此平行四邊形分成兩個全等三角形」。探討動態幾何環境對幾何教學與學生學習相關研究進行已經行之有年（Chazan, 1993; de Villiers, 2004; Healy & Hoyles, 2001; Laborde, 2000; Mariotti, 2001; Yerushalmy & Chazan, 1990）。這些研究不但分析動態幾何環境的特性，學生如何與之互動，以及互動對幾何學習的影響等議題，同時，強調教師應該具備所謂的 TPCK（technology pedagogical content knowledge）（Koehler & Mishra, 2009），也就是教師使用科技工具進行教學活動所應具備的相關專業知能。無論課室教學融入何種科技工具，在論述工具融入教學的成效之前，應先瞭解學生對科技工具的理解，如何與科技工具互動，及藉由互動來幫助自己建構數學知識。而這些研究結果是科技融入教學成功與否的重要關鍵。

幾何與代數最大不同之處在於幾何圖形。從認知觀點來說，幾何圖形具備了兩種不同特質，學者 Fischbein（1993）就提出圖形概念（figural concept）來描述個人認知幾何的雙重本質，他認為幾何圖形同時具備圖形性質及概念性質，前者是個人對圖形樣貌的知覺理解；後者則是個人對此圖形所產生的數學意義。個體在進行幾何解題過程中，幾何圖形的兩種性質必須交互作用，並以此為基礎，進行幾何推理。Fischbein 的圖形概念是從個人認知觀點出發，因此，不同

的個體對於相同的幾何圖形就可能產生不同的圖形概念。據此，學者 Laborde（2005）對幾何圖形提出另一種不同的觀點，他聚焦在幾何圖形的外在表徵，區別出圖形的兩種性質：空間圖形的性質（spatio-graphical properties）以及理論的性質（theoretical properties）。空間圖形性質是指圖形的外在特徵，傳達出哪些視覺的特質，例如，這個窗戶看起來好像長方形；理論的性質則是指圖形本身表徵的幾何定義或條件，例如，直角圖形∟的標示就表示此角度必定為 90 度。學者 Fischbein 和 Laborde 的論述顯示出個人認知與客觀呈現兩者間可能的差異。

從學者 Fischbein 的觀點來看，幾何教學通常希望學生同時知覺幾何圖形的概念性質與圖形性質，尤其應從概念來思考圖形，瞭解同一幾何概念下，圖形本身涵蓋的變異性與不變性。因此，教學期望的不只是協助學生建構典型心像（prototypical images），也希望學生能夠將圖形當成數學結構化後的一個有條件變動的物件。更進一步希望學生能夠將圖形視為不同幾何性質組合而成的結構，也就是所謂的論述性理解（discursive apprehension），同時，希望學生能將既有圖形進行拆解、組合與重構，也就是所謂的操作性理解（operational apprehension）（Duval, 1995）。從學者 Laborde 的觀點來看，教學應該提供圖形表徵蘊含的空間圖形的與理論的意涵。學者 Hsu（2008）在教師幾何教學研究中，就提出教師教學過程中常涉及此兩種性質的轉換，例如，教師在黑板上畫出一個看起來很像直角的角，但若未在角度上標示直角，學生不可自行推論此角度為直角。教師藉由兩種圖形性質的轉換歷程，可以清楚地傳達幾何圖形所賦予的意涵，同時亦能夠協助學生瞭解幾何意義，例如，學者 Cheng 與 Lin（2006）的研究則是利用塗色策略，引導學生視覺化圖形的不同組成元素，再由這些組成元素喚起對應的幾何性質，反之亦然，此研究證實塗色策略確實能夠提升學生幾何推理表現。

動態幾何環境是一個提供學生瞭解圖形的理論與空間圖形性質之表徵媒介（mediator）（Klaczynski & Narasimham, 1998）。它可以協助學生建構概念心像，尤其藉由圖形間的對應關係與不變性，幫助學生整合理論的與空間圖形的特徵，建構完備的幾何概念，這也就是學者 Laborde（2005）所謂的幾何性質即是許多變動物件下所共同具備的不變性。現有許多研究分析動態幾何環境如何幫助學生探究、臆測幾何性質（de Villiers, 1999; Laborde, 2000; Leung, 2008），另外，有些研究特別強調動態幾何軟體的拖曳功能（Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002）或是測量功能（Olivero & Robutti, 2007），並探討這些功能如何幫助學生認識幾何性質或是形成幾何臆測。本研究亦使用動態幾何軟體，但不同於這些研究，本研究將動態幾何軟體定位為「例子產生器」，也就是學生根據某些幾何條件並利用其產生出符合條件的案例，此定位理由將於下一章節中清楚陳述。學者 Arzarello 等人（2002）已發現僅提供學生動態幾何環境，不一定能夠有效地協助學生瞭解幾何內涵或是形成幾何臆測，需要其他教學媒介的使用（如：表格），才能有助於空間圖形性質與理論性質的連結與轉換。因此，本研究整合動態幾何軟體與案例資料表

格，協助學生進行幾何性質的檢驗、反駁與臆測活動，以促進學生瞭解特定幾何性質為目標。研究問題為：

學生在整合動態幾何軟體為「例子產生器」與表格的學習單設計下，如何臆測幾何性質？其可能遇到的認知困難為何？學生又有哪些不同的臆測策略？

貳、文獻探討

一、數學臆測

臆測在數學問題解決裡扮演重要的角色。學者 Mason 等人（1982）利用進入（entry）、進擊（attack）和回顧（review）三階段來解析數學家如何解決數學問題，他們從問題解決的思考歷程中辨識出兩組交互使用的基本程序：特殊化（specializing）與一般化（generalizing）、臆測（conjecturing）與取信（convincing）。此四個基本活動是整個數學問題解決的骨幹，其中臆測更是數學思考的核心，簡單地說，臆測是數學問題解決的關鍵數學思考。進一步來說，數學問題解題歷程所涉及的臆測，並非只是某個猜測或判斷，而是個體在面對不明確的樣式或關係，能夠根據已知的知識及資訊，選擇合適的表徵，進行猜測、檢驗、相信或反駁等循環歷程，在此歷程中，個體所提出的猜想並不一定為真，仍需要進一步檢驗（陳英娥、林福來，1998）。

設計臆測活動需要瞭解臆測活動所涉及的數學內容外，更重要的是要瞭解學生是如何形成臆測的，學者 Cañadas、Deulofeu、Figueiras、Reid 與 Yevdokimov（2007）從許多數學教育研究結果整理出形成臆測的類型，包含由離散的有限案例歸納、動態案例歸納、類比、發想和知覺性臆測等五種不同認知過程的類型。無論是哪一種形成臆測的思維歷程，案例始終扮演著承先啟後的關鍵地位，若要協助學生形成臆測，就得先協助學生產出特定的、多樣的或一般的案例，才能有機會從案例中調整或重構臆測出命題。學者 Lin 與 Wu Yu（2005）從例子產生的觀點，提出程序性反駁模式（Proceduralized Refutation Model, PRM）（如圖 1），當作臆測教學設計時，教師與學生互動的歷程模式。此模式是一個以數學專家進行數學反駁的歷程為架構，教師先導入錯誤敘述為起點，而此錯誤敘述可選用學生的迷思概念，透過教師適時的介入來促成學生投入反駁與臆測的歷程，藉以增進學生反駁、臆測甚至是論證的能力。此模式的主要教學活動包含：（1）教師導入錯誤命題，用來引導學生進入命題；（2）教師確認學生理解命題，透過學生產生的案例來確認其理解命題；（3）教師鼓勵學生窮舉案例，用以促進學生提出各種類別案例；（4）教師檢驗/演示數學式，用以促成學生區辨支持例和反駁例及其通性的表達；（5）教師鼓勵學生產生臆測，用以促進學生修改命題形成臆測，以及針對臆測進行論證。此模式希望教師多鼓勵學生主動提出不同類型的案例、主動區別支持例與反駁例、主動找出支持例與反駁例性質、主動修正敘述以及提出臆測等。

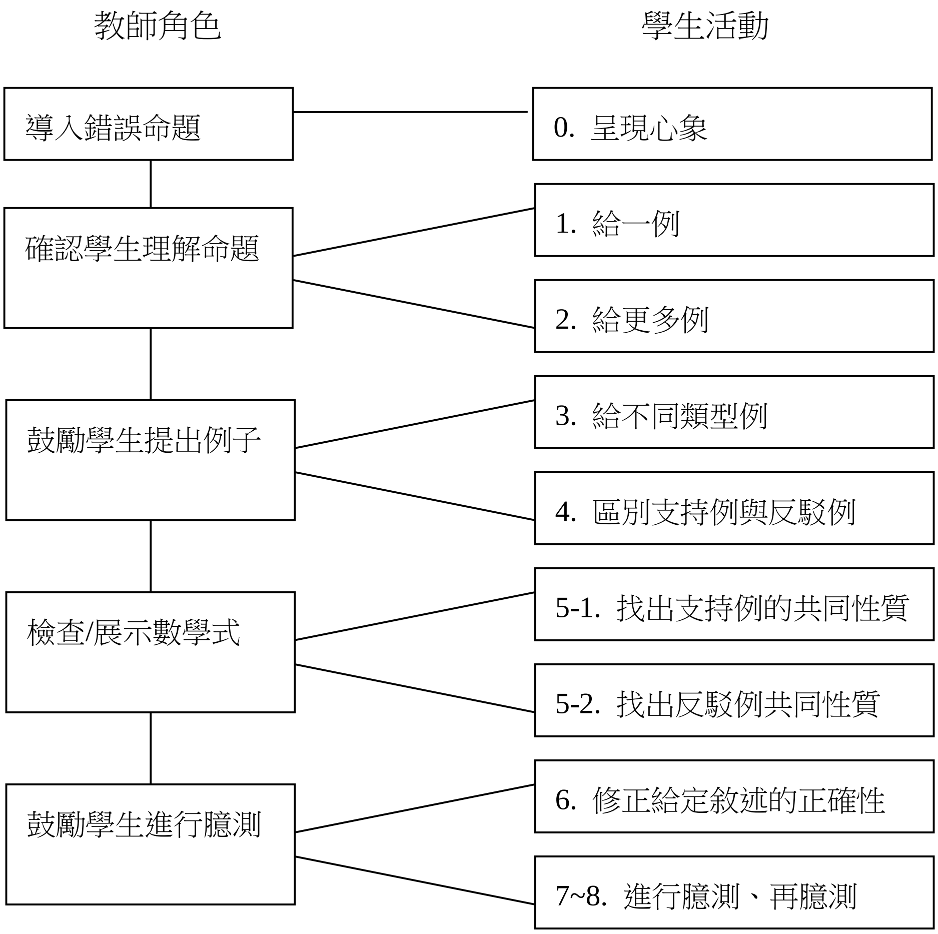


圖 1　程序性反駁模式（Proceduralized Refutation Model, PRM）

二、在動態幾何環境下的教與學

目前常見課室教學使用的動態幾何軟體包括 Cabri, GeoGebra, The Geometer's Sketchpad, The Geometric Supposer…等，這些幾何軟體都可以當成「例子產生器」，協助學生能夠根據特定條件便利地產生幾何案例，學生有了這些幾何案例，才能進一步認識、觀察或歸納出可能的幾何性質。特別是幾何概念或性質的學習中，學生常依據典型例（prototypical examples）來建立幾何的概念心像（concept image）（Tall & Vinner, 1981）。從典型例的觀點來看，動態幾何軟體其中一個重要功能就是提供學生建構各種不同的圖形例子，包括典型例和非典型例，並讓學生對建構出的圖形案例做剛性變化（rigid transformation）（Leung, 2008）。換句話說，動態幾何環境扮演著幾何學習的中介媒介，提供學生在心像和概念上交互作用，形成將來可以多元運用、具有清楚幾何結構的概念心像。

動態幾何軟體會因教師使用的不同方式而對學生學習產生不同的影響，例如，學者 Laborde

（2001）從觀察多位高中老師使用 Cabri 融入課室教學的歷程中，提出 Cabri 整合到教學的角色有四種，蘊含著階層發展的觀點，其包括（1）資料收集：動態幾何環境主要被使用當作協助任務的材料面向，任務本身沒有概念性的改變（相對於紙筆）；（2）形成臆測：動態幾何環境被當成協助發現數學任務的不變性（如：拖曳三角形，但三中線交於一點並不受之改變）；（3）形成問題：動態幾何環境因其工具使用的可能性，進而可以扮演協助學生修正任務，形成解題策略；（4）探索論證：動態幾何環境本身為學生帶來新的意義與推理，成為學生論述幾何的基礎。同樣的，Laborde（2005）論述動態幾何環境下的學習是一種圖形的實驗本質，其因為拖曳動作而產生圖形變化，可以將定義好的圖形關係具體化，更重要的是圖形本身蘊含的變異性與不變性可以藉由拖曳圖形改變而清楚地呈現出。

另外，學者 Arzarello 等人（2002）區分出動態幾何環境下圖形拖曳（dragging）行為可能帶來的不同認知功能。他們認為幾何教學應該是視覺的圖形和理論的性質間的整合，因此，他們從圖形和理論之間的認知互動提出兩種歷程：上升歷程（ascending processes）和下降歷程（descending processes）。其中，上升歷程是指動態幾何軟體的使用是為了探索某個情境、發現規律和不變性，這是從圖形到理論的發展過程；反之，下降歷程是動態軟體的使用是為了驗證、反駁臆測或確認性質，這是從理論到圖形的思考過程。他們更進一步主張拖曳本身是一種認知行為表現，並將拖曳行為區分為不同類型並建立可能的階層型態，包含：（1）徘徊拖曳（wondering dragging）指拖曳本身是隨機的，隨便選擇螢幕上的一個點進行拖曳，其拖曳本身沒有任何要發現規律或不變性的目標；（2）邊界拖曳（bound dragging）是半可拖曳點（semi-dragable point）的移動過程，其所謂半可拖曳指的是這個點已經與某個物件做連結。比如說長方形的點拖曳，無論其如何拖曳必須符合對邊等長，且角度為直角。（3）引導拖曳（guided dragging）為了形成某一個特殊圖形而拖曳圖形的基本構成元素。（4）擬軌跡拖曳（dummy locus dragging）則是為了保持性質的拖曳動作。因此，這拖曳遵循某一軌跡，即使拖曳者並未發現。（5）線段拖曳（line dragging）則是在線段上畫出新的點以保持圖形的規律。（6）連結拖曳（linked dragging）是拖曳而造成某一個點到圖形上。（7）拖曳檢驗（dragging test）拖曳可移動或者是半可移動的點來檢驗是否圖形可以保持原有的性質。學者 Arzarello 等人並沒有明確說明哪幾種拖曳認知行為屬上升歷程；哪幾類屬下降歷程。只有點出前面幾項拖曳類別偏向上升歷程，主要是讓學生藉由一系列圖形觀察出特定的性質並形成臆測；而後幾項拖曳活動則是傾向於下降歷程，主要是讓學生針對特定的猜想進行檢驗、確認或反駁。

動態幾何環境除了產生圖形的功能外，亦可顯示特定邊或角的量測值。不過，有關幾何特有的測量值面向上，Olivero 與 Robutti（2007）指出幾何測量同時具有雙重本質，包括數學中的絕對性與科學中的不確定性。其中，數學的絕對性是指依據幾何性質而決定的測量值是絕對的，

例如，等腰三角形的兩腰邊長的測量值必定相等；科學的不確定性是指在現實環境的科學測量中，測量所得數值是不可能一致的及穩定的。某個程度來說，動態幾何軟體提供的測量值就兼具兩種本質，也就是當圖形是依據幾何性質所建構產生的，其測量所得的數值必須符合數學的絕對性，反之，若圖形是由視覺或實徵所建構產生的，其測量值的不確定性是必然的。兩種看似相互矛盾的本質同時存在於動態幾何環境中，基本上，測量雙重本質帶來的矛盾現象其也同時出現幾何的紙筆環境中。Olivero 與 Robutti（2007）類比 Arzarello 等人（2002）提出的拖曳模式，並結合 Laborde（2005）所提出圖形表徵的空間圖形性質（spatio-graphical properties）和理論性質（theoretical properties）的對應，區分出幾種不同的探索導向測量模式，包括徘徊測量（wondering measuring）、引導測量（guided measuring）、知覺測量（perceptual measuring）、驗證測量（validation measuring）、證明測量（proof measuring）

利用動態幾何環境協助學生形成臆測、進行探索並拓展到幾何證明的教學研究也是新的研究趨勢（Baccaglini-Frank, Mariotti, & Antonini, 2009）。事實上，學生在動態幾何環境下，進行圖形拖曳之前需先建構幾何圖形，而圖形的建構歷程是一種幾何性質的應用而不是幾何性質的學習。學生必須了解幾何性質，甚至是幾何性質如何在動態軟體中如何構築及呈現，才能夠產出具備特定性質的圖形。例如，學生使用動態幾何軟體畫出一個平行四邊形的任務中，即使學生知道平行四邊形是對應邊互相平行的四邊形，但建構四邊形時，如果僅以視覺判別對應邊看起來「像」是相平行的，而非真正對應邊互相平行的四邊形。對於不知道平行四邊形的所需的幾何特徵與相關性質的學生，就更不可能利用軟體建構具備此特徵或性質的圖形。因此，學生要使用動態幾何軟體畫出一個平行四邊形，需要知道平行四邊形的定義（如，對邊平行），或是相關等價性質（如，對角線相互平分），並使用這些定義或性質進行構圖，才能將具備平行四邊形特徵的四邊形畫出。這也正是（Duval, 1995）所謂的幾何作圖所需的序列性理解（sequential apprehension）。

在動態軟體環境所建構的幾何圖形，會利用拖曳來進行不變性或關係的探索，因此，拖曳過程前後是否保持原本的幾何特徵就顯得相當重要。學者 Erez 與 Yerushalmy（2006）就區別兩種不同保持幾何屬性的拖曳方式及理解，其一是拖曳自行建構的幾何圖形並保持幾何屬性，也就是學習者自己依據幾何性質建構幾何圖形，而拖曳歷程將保持幾何特徵、性質或關係等，學生對拖曳的理解即代表其對於拖曳歷程中幾何特徵、性質或關係的理解；其二是拖曳他人建構好的幾何圖形，也就是學生並不需要具有建構圖形所需的幾何知識，以及利用動態幾何軟體建構圖形的知識，因此，學生進行拖曳並不能保證學生理解圖形內涵的重要幾何特徵、性質或關係。Erez 與 Yerushalmy 強調學生拖曳他人已建構好的幾何圖形，必須要能夠知道拖曳所蘊含的幾何特徵、性質或關係，但如何協助學生察覺到拖曳圖形所內蘊的共同特徵或性質，是使用動

態幾何軟體進行幾何教學與學習的需要面對的重要課題。學生對於動態幾何環境圖形在拖曳過程所內蘊的幾何特徵或性質進行臆測，就成為橋接學生認識與理解圖形拖曳蘊含的幾何特或性質的中介策略。就如學者 Arzarello 等人（2002）所謂的上升歷程（ascending process），是從視覺觀察連結到理論進而來回對應，讓學生在拖曳歷程中理解圖形內蘊的幾何特徵或性質。

學者 Baccaglini-Frank 等人（2009）發現學生根據圖形關係來處理圖形的不變性是有困難，他們為了分析學生認知行為與學習困難，將圖形上可拖曳的點區分為基礎點（base point）與建構點（constructed point）：前者是指可任意的或半任意的拖曳的點；後者是指由建構物件交集而形成的點，它是由這些物件所產生的，並不能被拖曳的。根據這樣的觀點，所謂的圖形結構的不變性，就是指拖曳圖形的任何基礎點，該圖形仍具有相同的幾何特徵或性質；所謂的在動態幾何環境中進行臆測，就是指透過動態幾何軟體的協助發現圖形結構的不變性；所謂的證明則是指表達圖形結構不變性的推理與論述過程。不過，學者 Baccaglini-Frank 等人也發現當學生發現圖形結構上的不變性時，並無法直接過渡到認知的不變性，也就是順利證明這結構不變性背後的理由，換句話說，從動態幾何環境中產生的臆測不等同於學生能夠順利地過渡到證明（González & Herbst, 2009）。

三、例子產生器—動態幾何環境的新論述

許多研究文獻主張動態幾何環境有助於學生臆測幾何性質或是瞭解幾何性質，然而，文獻也指出學生使用動態幾何環境來建構幾何知識可能面臨的困難。例如，學者 Erez 與 Yerushalmy（2006）就指出動態幾何環境的拖曳操作經驗，不能保證學生能順利觀察拖曳背後所帶來的關鍵屬性。學者 Arzarello 等人（2002）對於動態幾何環境下圖形拖曳的分類，與 Olivero 與 Robutti（2007）針對動態幾何環境下測量的分類，都說明了學生在動態幾何環境下，他們會以不同的認知模式與其互動，如果學生停留在視覺判斷階段，就不容易成功形成特定性質的臆測，進而瞭解圖形結構所隱藏的特徵或性質。

事實上，這些研究文獻也都點出動態幾何環境可以協助學生產生案例，進而從案例進行觀察或歸納可能性質。本研究雖然依循此方向，不過卻強調動態幾何環境是學生學習歷程所需的「例子產生器」，這樣的主張有以下三點意涵：

第一、將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調案例在學生形成數學臆測或是概念學習歷程的重要性。學者 Michener（1978）為了理解瞭解數學瞭解（understanding understanding mathematics），提出數學瞭解的三個對偶空間結構，此三空間分別是（1）結果（results）空間，包含傳統邏輯演繹的數學元素，通常是指定理（如：畢氏定理）；（2）例子（examples）空間，包含說明的材料，通常是指案例，例如，邊長 3, 4, 5 的三角形為直角三角形；（3）概念（concepts）空間，包含數學定義、啟發性的觀點與看法，通常是指概念，例如，直角三角形的定義或心像。

根據 Michener 所提出的三個對偶空間結構來看，若要數學瞭解當然不可缺少例子，而且好的數學瞭解除了需要例子、概念及結果三者外，更重要的是三者具有對偶關係（dual relations），透過三者對偶關係的聯繫而建立良好的數學瞭解。就以例子空間與結果空間的對偶關係為例，對偶關係可以是用來支持或啟動結果產生的案例，亦可以是用來說明或證明結果的案例，或是根據結果所產出的案例…等，這些關係讓例子與結果緊密連結，因而有助於數學瞭解。更具體來說，若以「畢氏定理」為結果空間的元素，它對應到案例空間的對偶關係可能包含，使用特定案例（如邊長 3、4 和 5 的三角形）支持此結果的合理性，或是利用多邊形及其邊長與面積概念說明或證明，更進一步，有關「畢氏定理」的結果、案例與概念及其對偶關係，亦可以成為「餘弦定理」的特殊結果、案例與概念。另外，從形成數學臆測的歷程來看，無論是離散的案例歸納、動態的案例歸納或是類比形成臆測，都需要適當且正確的案例為基礎，才能進行歸納或類比的推理，因此，學生是否能夠產出適當且正確的案例，就成為是否能夠成功臆測出幾何性質或關係的主要關鍵。不過，此關鍵並無法完全仰賴動態幾何環境協助而得以解決，尤其對弱勢學生或程度較差的學生來說，他們使用軟體產出的例子可能是隨機的、不恰當的或是不正確的，這些缺乏系統的、無關的或是不正確的案例，都無助於學生形成臆測。

第二，將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調學生學習產生具有不同屬性或不同類型的案例的重要性，而不是僅產出沒有屬性或類別區別的案例。學生藉由例子產生器產出支持或反駁特定幾何命題的案例，進而再從不同類型案例找出共通性或差異性，藉以修改或調整幾何命題，同時增進數學瞭解。這樣的論點與目前動態幾何環境的相關文獻上所提出的產生案例之觀點不盡相同，但與程序性反駁（PRM）中提出建構更多樣例子的觀點不謀而合。事實上，建構幾何例子是一個高認知需求的活動，學生通常會受典型心像（prototypical images）所影響，他們產生的案例經常類似典型例。如何有效地使用軟體構圖舉例，這須仰賴學生認知該圖形概念性的心像，也就是掌握一類圖形中不變的及可變的構圖特徵來產生圖形，就以產出直角三角形為例，學生必須瞭解直角三角形中有兩個邊夾出一個直角，其他角及其對應的邊長都是可變的，如果能掌握這個直角三角形不變的與可變的構圖條件，學生才能發展出使用軟體產出各種不同變異的直角三角形案例，如等腰直角三角形，而接續其後的幾何活動就會在一個較相關的、正確的與系統基礎上進行。換句話說，學生要正確建構出幾何圖形案例，他們就需要對幾何圖形進行適當的分解和重組（decomposition and recomposition）。學者 Cheng 與 Lin（2007, 2008）從教學實驗中發現有約三分之一的國中生無法從論證問題的資訊中辨識出證明所需的關鍵元素。換句話說，這些學生無法在附圖中解構出有助於證明的子圖以及理解子圖所對應的幾何性質，並以這些幾何性質來進行論證。學者 Hsu（2010）進一步說明解構幾何圖形辨別幾何性質是解題的重要關鍵，而非幾何證明形式與幾何計算形式的區別。同時，Hsu 也發現圖形的複雜度顯著影

響學生的解題表現，即使題目要求相同的幾何性質進行解題。學者鄭英豪（2010）調查發現，國中生舉出各種不同三角形來檢驗「三角形最長邊的中點可以做一個圓恰好經過三角形三頂點」是否正確的問題中，只有約四分之一的 8 年級學生可以舉出三種以上的三角形來檢驗，約有六分之一的學生會給出非特殊的三角形來檢驗，而大多數學生所舉出的多個案例，其實只是不同大小的一兩種特殊三角形。這個結果顯示我國國中生對於三角形的概念心像是十分狹隘的，學生對於三角形的例子空間非常地窄小，因此當他們被要求要做出三角形時，多半只能憶取部分課本上有命名的特殊三角形。

第三，將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調學生僅靠軟體協助仍無法適當且正確地產出有屬性或類別區分的案例。雖然軟體有助於學生產出案例，但是學生要針對特定幾何問題進行有系統的且正確的產出不同類型案例，仍需要其他配套策略給予學生支撐，才能成功地接續後續的幾何臆測與論證歷程。在動態幾何環境中，學生利用拖曳來改變或產出圖形案例，並不能保證學生能夠看出拖曳前後的案例所隱藏的共同的與不同的幾何性質。基本上，幾何性質是幾何圖形的特徵、不變性或是關係，這些特徵、不變性或關係有時候需要將圖形轉換為測量值才能觀察到。因此，測量值的觀察亦成為歸納形成特定幾何性質臆測的關鍵。由於圖形複雜性特質，學生直接從圖形中觀察測量值，並從測量值的變化歸納出可能的幾何性質並不容易。本研究認為，圖形中同時結合測量值與圖形特徵有其優勢，就如同學者 Olivero 與 Robutti（2007）主張測量本身具備的理論與實徵的觀點，在此觀點下，結合測量與圖形能夠幫助學生概念化幾何特徵或性質，同時可以提升學生拖曳的認知層次與測量的認知層次。不過，兩者的結合並不能完全保證達成目標，從圖形空間的性質來看，每一個圖形的建構會因為特殊的幾何性質而產生特殊處，例如，菱形如果歪斜了，學生可能就無法辨識其為菱形（Fischbein & Nachlieli, 1998），即使在圖形結合測量數值標示，學生已有的典型心像仍會阻礙觀察與轉換數值關係進行可能性質的推論，因此，圖形與測量的結合，需要利用透過其他媒介協助，特別是能夠有助於學生進行有目標地、有系統地與正確地的觀察幾何性質。從另一觀點來看圖形與測量的關係，基本上，幾何性質也可以看成是測量值之間的關係，就某個程度來說，此數值的關係可表示成一個代數式，而學者 Koedinger 與 Anderson（1990）就指出這樣的代數式本身具備不確定性，幾何問題若使用代數符號來表示幾何圖形的測量值，則學生解題表現會有顯著的降低。從 Koedinger 與 Anderson 的觀點來看，根據幾何圖形不同元素測量值而產生代數關係式是相對較高的認知活動。這類的學習活動必須另外設計，特別是結合動態幾何「例子產生器」的功能，引導學生建構類別不同的案例，進而觀察不同類別案例之間的相異性與相同性。據此，本研究用來協助學生結合圖形與測量的媒介是表格，適當的表格具有結構化的功能，能夠有效幫助學生觀察數值間關係的介入工具（Haspekian, 2005）。

參、研究方法

本節分別從研究工具的開發與設計、研究對象的特質及研究時程與資料分析等部分說明。

一、研究工具

本研究根據程序性反駁模式（PRM）為臆測學習單設計的中介理論架構（intermediate theoretical framework）（Ruthven, Laborde, Leach, & Tiberghien, 2009），以動態幾何軟體為媒介工具，完成三份幾何性質臆測學習單的設計。因臆測的本質，三份學習單的幾何性質，均以條件命題（conditional statement）（Selden & Selden, 1995; Wu Yu, Hsu, Lin, & Chin, 2009）的形式呈現。學習單呈現錯誤的幾何條件命題，學生需臆測並提出新的論點來修改錯誤的命題敘述。因本研究將動態幾何軟體定位為圖形例子產生器，學生不需具備動態幾何軟體操作的相關知識。例如：利用平行線性質，操作動態幾何軟體來畫出一個平行四邊形。學生只需拖曳給定的幾何圖形，透過拖曳產生不同的幾何圖形案例。另外，考量幾何性質的獨特性與複雜性，研究工具包含了三個不同幾何性質臆測學習單，以深入瞭解學生在動態幾何環境中製造案例、檢驗錯誤命題、觀察共通性、形成臆測及論證等歷程的認知行為、臆測策略與可能的學習困難。以下分別就三份學習單進行說明如下：

（一）外角定理學習單

外角定理為三角形內角與外角形成固定關係之一。此份學習單的設計則是先給定一個有關外角定理的錯誤命題為起點，該錯誤命題敘述如下圖 2：

「如右圖，在任意三角形 ABC 中，$\angle 1$ 的角度一定等於 $\angle 2$ 加上 $\angle A$ 的角度和。」

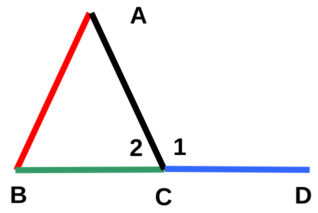


圖 2　外角定理學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 2 所示，此份學習單主要學習目標是讓學生探索出三角形中 $\angle 1$、$\angle 2$ 和 $\angle A$ 三個角度之間的關係，先透過產出案例進行檢驗原錯誤命題，再經由觀察支持案例的共同性來修改錯誤命題，並從而猜測出命題敘述一或命題敘述二，此兩命題敘述分別如下：

命題敘述一：在任意三角形 ABC 中，$\angle 1=\angle A+\angle B$

命題敘述二：三角形 ABC 中，當 AB＝AC，$\angle 1=\angle 2+\angle A$

就命題敘述一來說，學生在動態幾何環境中，使用軟體拖曳出的三角形均符合此命題敘述（外角定理），也就是學生產生的案例均為此命題的正例或支持例。學生如何從自己產出的案例

中觀察與歸納出這三個角度測量值之間的關係便是重點，它是修改原錯誤命題的結論而形成的臆測命題。就命題敘述二來說，學生產生案例反駁原錯誤命題相對容易，但要將原錯誤命題修改為命題敘述二，就需要找到具有原錯誤命題的結論特徵的特例，此三角形特例為等腰三角形，從而修改原錯誤命題而臆測出命題敘述二，也就是具有等腰三角形的性質才會得到∠1＝∠2＋∠A。

在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，先提供學生一個已建構好的三角形，如圖 3 所示，同時標示出此三角形的各角度和邊長測量值。學生可以進行圖形拖曳的部分僅有頂點 A、線段 AB 或線段 AC，其餘頂點或線段均不可移動。無論學生拖曳點的是頂點或線段，三角形上的角度與邊長的測量值都會隨之而改變。

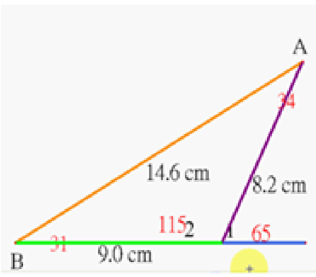


圖 3　動態幾何上學生拖曳外角定理而成的圖形範例

（二）三角形外接圓學習單

外接圓學習單的設計也是先給一個與三角形外接圓有關的錯誤命題敘述為起點，該錯誤命題敘述如下圖 4：

「在三角形中，我們可以用最長邊的中點為圓心，畫出一個剛好連接三個頂點的圓。」

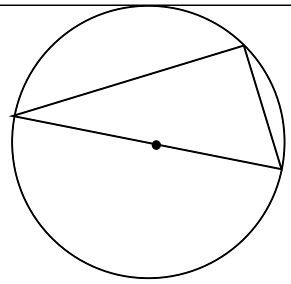


圖 4　三角形外接圓學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 4 所示，此學習單主要目標是希望學生能夠產生案例檢驗出原錯誤命題敘述是錯誤的，進而從案例中觀察出只有特殊的直角三角形為前提下，原錯誤命題的結論才會產生，也就是唯有三角形為直角三角形時，最長邊的中點為圓心才能得到通過三個頂點的圓。

在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，先提供學生一個非特殊的三角形，並在圖形上標示出三角形所有的角和邊的測量值，參考圖 5 內的三角形，接著，學生藉由拖曳三角形的

任一頂點來改變圖形成為某個的三角形，而圖形拖曳過程，標示的角與邊長的測量值也隨之改變。當學生確認不再拖曳改變三角形後，就請學生點選三角形的最長邊，並利用設計好畫圓按鍵執行以最長邊的中點為圓心且最長邊為直徑畫出圓，如圖 5，學生藉由視覺畫圖形關係來決定是否符合原命題敘述。當學生進行一次拖曳形成的三角形並點選完成外接圓後，三角形與外接圓都會被取消，並回到最初給定三角形後，再讓學生進行拖曳改變圖形，形成新的三角形，然後學生再根據新的三角形，再畫出最長邊為直徑的圓，並視覺判斷該圓是否第三個頂點。此種動態幾何軟體使用方式的目的是希望學生意圖產生案例時，便能夠關注圖形案例的幾何特徵，無論是角度或是邊長，而不是只關注在如何把三角形的第三個頂點拖曳到圓形上。希望藉由三角形案例製造和畫外接圓的檢驗，促進學生思考三角形應該具備什麼樣的特徵，它的三個頂點會同時落在最長邊所畫出來的圓（三角形的外接圓）。同時，學生可以利用視覺化判斷三角形的三個頂點是落在圓上、圓內、或圓外。

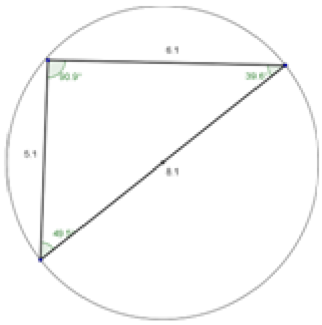


圖 5　動態幾何環境中學生拖曳三角形外接圓形成的圖形案例

（三）直角三角形斜邊上的高學習單

直角三角形斜邊上的高學習單與第一份的外角定理學習單比較相似，希望學生從造例中觀察出直角三角形斜邊的長度與斜邊上高的可能關係，同樣的，先給一個錯誤的命題敘述為起點，此錯誤命題的敘述如下圖 6：

「在一個直角三角形中，斜邊上的高等於斜邊長的一半。」

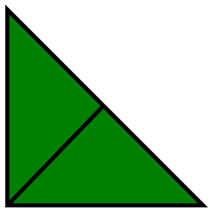


圖 6　直角三角形斜邊上的高學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 6 所示，此學習單希望學生利用拖曳而產生不同的直角三角形，並觀察拖曳過程產生案例的斜邊上的高與斜邊之關係，檢驗原先給定錯誤命題敘述是否正確，並根據邊長的測量值

區辨符合與不符合該命題的正例與反例。學生參與這份學習單的過程中，觀察測量值及其關係，就成了學生回頭檢視原錯誤命題敘述、判斷原錯誤命題的正確性、以及修改錯誤命題成為可能正確命題的臆測重點工作。

第三份學習單的原始附圖選用教科書用來建構學生幾何性質典型心像常見的附圖。在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，會先提供學生一個類似於學習單上的直角三角形的圖形，而此圖形會標示不同角度或不同邊長的測量值。學生只能夠拖曳非直角的頂點來改變圖形，其餘的圖形部分是不可移動的，透過拖曳產生案例並觀察斜邊與斜邊上的高之測量值的可能關係（如圖 7）。

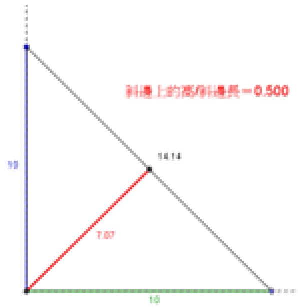


圖 7　動態幾何環境直角三角形斜邊上的高圖形範例

正如前面文獻論述提到將動態幾何軟體當成例子產生器的概念，在動態幾何軟體中拖曳並不一定會幫助學生產生正例與反例，進而觀察出正例或反例的共通性，然後修改或形成新的臆測命題。因此，如同其他學習單一樣，提供給學生不僅是動態幾何軟體外，還搭配記錄圖形特徵的表格，讓學生記錄自己拖曳產生的圖形之角度或邊長的測量值，再藉由觀察表格內的各項測量數值之間的特徵、不變性或關係，提出修改給定錯誤命題的新臆測命題。

學者 Boero（2006）認為一般化（generalization）需要從各自孤立的大量案例中尋找其共通性（commonalities），此共通性是學生形成抽象化的必經之路。因此，三份學習單均提供學生記錄表格，讓學生將使用動態幾何軟體產生圖形的各項測量值記錄下來，藉由表格的系統性或結構性的特徵（Haspekian, 2005），協助學生觀察各項或各類測量值之間的差異性或共通性，據此反駁原有錯誤的幾何命題，進而修改或提出新的臆測命題。就以外角定理提供的表格為例，提供學生圖形測量的記錄表格如下圖 8 所示，包含學生拖曳產出圖形的不同角度和邊長的測量值，此表格內資訊協助學生反駁原有錯誤幾何命題（∠1＝∠2+∠A）外，並能夠歸納出合理的幾何命題一：外角定理（∠1＝∠A+∠B）。另外，為了支撐學生更全面地觀察各案例測量值之間的不變性或差異性，進而能夠進行可能關係的歸納推理，圖 8 特地將原本錯誤幾何命題的測量值（∠1＝∠2+∠A）予以錯開，讓學生的觀察不會只侷限在特定項測量值的特定關係成立與否的判斷上（∠1＝∠2+∠A？），或是僅就鄰近數值相同與否進行表層的判斷。

圖形編號	BC長度（公分）	AC長度（公分）	AB長度（公分）	∠2角度	∠1角度	∠B角度	∠A角度
圖1	9公分						
圖2							

圖 8　外角定理學習單所提供的表格格式

學習單以程序性反駁模式（PRM）為活動設計的中介架構（intermediate framework）（Ruthven, Laborde, Leach, & Tiberghien, 2009）。學習單首先提供錯誤幾何命題，命題敘述旁邊提供一個教科書常用來建構學生典型心像的附圖。動態幾何軟體介面提供與學習單相同的幾何圖形，學生必須利用拖曳功能來產生各種不同圖形案例，並將圖形案例的測量值記錄在學習單表格中。學生利用拖曳觀察到的圖形案例及學習單上表格的測量值來檢驗原先給定錯誤命題是否正確。接續其後的活動序列包含幾項，首先，要求學生區辨正例與反例，也就是要求學生根據自己使用軟體拖曳產生的圖形案例及其測量值記錄，判斷哪些案例符合原先給定錯誤命題的結論，並稱之為正例；哪些案例則是不符合原先給定錯誤命題的結論，並稱之為反例。其次，進一步要求學生觀察與歸納出正例的共同特性。最後，要求學生並根據這個共通性來修改原本錯誤的命題敘述，使它成為新的且合理的臆測命題。就以外角定裡的學習單為例，後續引導學生的問題敘述如下：

- 根據拖曳形成的圖形和表格數據，哪些案例<u>符合</u>「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」？
- 根據拖曳形成的圖形和表格數據，哪些案例<u>不符合</u>「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」？
- 從符合「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」的案例中，觀察這些案例的圖形。想想看，這些圖形有哪些共同性呢？
- 根據你的發現，你會怎麼修改原先給定的錯誤敘述呢？

（四）三份學習單的綜合分析

三份臆測學習單涉及不同幾何性質，學生必須在動態幾何環境中拖曳產生圖形案例，並依據這些圖形案例來臆測學習單設定目標的幾何性質。本研究從試題分析的角度（Greeno, 1980; Resnick, 1975），就動態幾何軟體的特質以及幾何本質，架構出兩維度來檢視三份臆測學習單的共通性與差異性。此兩個維度分別為建構測量值的關係性（relation of measures）及視覺化（visualization）。首先，測量值的關聯性是指學生反駁或臆測幾何命題依據是從不同測量值之間建構其關聯性，這些關聯性可能只要簡單地觀察測量值的不變性，例如，根據邊長測量值看出

三角形可能具有等腰的特徵，亦即看出某兩個邊長測量值相同，但關聯性也可能涉及建構多個測量值之間的複雜關係，例如，根據邊長測量值看出可能的外角定理，這需從多個角度測量值中觀察出特定三個角度值間的特定關係。其次，視覺化的影響是指學生反駁或臆測幾何命題是仰賴觀察圖形的特徵或變化而察覺到該幾何性質的，例如，根據圖形關係看出三角形的三頂點不是共圓的，或是根據圖形特徵看出三角形可能是直角三角形。

表 1 是以測量值的關聯性及視覺化的影響兩個面向分析三份學習單的特徵。從表 1 可以看出，外角定理學習單和直角三角形斜邊上的高學習單，其本質上比較類似，兩份學習單均要求學生觀察不同測量值，並建構出較複雜的關係式，例如，外角定理學習單期望學生從四個角度數值資訊歸納出外角定理：∠1＝∠A＋∠B，因此，這兩份學習單所搭配的動態幾何環境中，學生利用拖曳產生正例或反例的過程，視覺化圖形案例並不一定能夠幫助學生區別正例或反例，當然就不一定有助於學生瞭解正例或反例與學習單給定錯誤命題之間的關聯性。尤其是外角定理學習單，無論是原先給定的錯誤命題或是期望學生臆測的命題，其牽涉到的是四個角度中的特訂三個角度之間的關係式，學生就其拖曳產生的圖形案例進行觀察，對於形成角度關係式的臆測命題之幫助並不大。

表 1

三份學習單綜合分析

學習單名稱	測量值的關係性（relation of measures）	視覺化（visualization）
外角定理	● 三個角度測量值之間的關係	● 不容易直接觀察出
圓內接三角形	● 單一量	● 觀察三角形的三頂點是否在圓上 ● 觀察直角
直角三角形斜邊上的高	● 直角三角形斜邊與斜邊上高測量值之間的關係	● 不容易直接觀察出

相反的，三角形外接圓學習單則仰賴視覺化推理。學生拖曳圖形是否產生特定的圖形，或是產生的兩圖形是否具有特定關係，都必須仰賴圖形視覺化的資訊加以判斷，例如，學生拖曳出特定三角形後，利用造圓按鍵產生相對的圓，透過視覺判斷出三角形的第三個點頂是否在圓上、圓內或圓外。如果三角形的第三個頂點看起來都在圓上時，學生就有機會看出三角形第三頂點所在的角看起來是直角。同樣的，如果第三個頂點落在圓內，學生也有機會視覺化出第三個頂點所在的角度看起來是鈍角。這些圖形或圖形關係的視覺化資訊回饋，提供了學生區別出正例或反例，以及看出正例或反例的共通性的機會，透過這些視覺資訊察覺或猜測出僅在三角形為直角三角形的情況之下，三角形的三個頂點會剛好落在以最長邊為直徑的圓上。

目前動態幾何研究文獻分析的學習單性質大都類似三角形外接圓學習單設計，學生可以直接在動態幾何環境中藉由拖曳來觀察不變性與變異性，進而臆測隱藏的幾何性質。相對的，較少動態幾何研究採用的學習單內容類似外角定理或直角三角形斜邊上的高，其臆測內容需建構多個測量值之間的關係式。

二、研究對象

研究對象為臺灣北部某一國中七年級學生。研究進行過程中，參與的國中學生尚未學習過三份學習單所含括的幾何性質（外角定理、直角三角形斜邊上的高與斜邊的關係、直角三角形與外接圓的關係）。參與對象由該校老師篩選，以數學表現中等且有學習意願為篩選標準。此篩選標準的目的是希望學生具備基本數學及幾何知識，且但對於三份學習單的幾何內容完全未知。除瞭解學生在動態幾何環境下的學習歷程外，也希望瞭解學生可能產生的學習困難。同時，研究者希望進一步檢驗教學介入是否有效的解決學生面臨的學習困難。綜而言之，學生樣本的選擇提供此研究瞭解學生在動態幾何環境造例的認知歷程及可能產生的學習困難。同時，提供檢驗將動態幾何環境視為例子產生器的教學介入的有效性。

共 15 位七年級學生參與此研究，學生隨機分派到不同學習活動。其中 5 位學生參與外角定理學習單；6 位學生完成三角形外接圓學習單，另有 4 位學生完成直角三角形斜邊上的高學習單。

三、研究流程與資料分析

研究流程類似個案訪談方式，參與學生單獨操作動態幾何軟體、單獨完成學習單。每位學生只需要完成分派到的那一份學習單即可。開始先請學生自行閱讀學習單內容，並由施測者提供操作動態幾何環境簡要說明。閱讀完學習單之後，學生可自由拖曳給定的幾何圖形。如何拖曳圖形及停止圖形拖曳由參與學生自行決定。停止拖曳之後，學生需觀察拖曳後的圖形並將圖形例子的測量值記錄在學習單圖表上。學生可自行決定何時需要建構幾個圖形案例，並以這些圖形案例完成學習單其他問題。當建構不同案例之後，學生需分類建構的幾何圖形案例，觀察分類圖形案例的通性，並修改給定的錯誤命題。造例過程中，研究者在旁訪談學生在想什麼，瞭解學生如何造例以及決定案例的背後想法。由於測量數值對以幾何圖形案例進行臆測影響重大，而測量誤差是不可避免的，對此，研究者除在動態幾何軟體設定測量值呈現方式（小數或整數）外，當學生因測量產生的誤差而無法正確臆測並修改錯誤命題時，研究者將介入，與參與學生討論，幫助學生微調圖形，修正錯誤測量值。研究不限時間，直到學生完成為止。

本研究以質性研究方法（Merriam, 1998; Strauss & Corbin, 1998）為主，目的是瞭解學生在動態幾何軟體與表格整合的學習環境下如何進行臆測並修改給定的錯誤命題。同時要瞭解涉及

不同幾何關係的複雜性與不同視覺化需求的學習單對學生建構圖形案例與臆測幾何性質的影響為何。為達成研究目標，在學生與學習單及動態幾何環境互動歷程中，研究者首先晤談學生，瞭解他們的先備知識（如：學生是否已經知道學習單主要的臆測目標），檢視並確認學生發生的認知困難，然後根據這些認知困難採取對應的教學介入。對應到本研究目標，教學介入僅止於協助學生能夠順利產生幾何圖形案例，研究者尤其關注學生是否能夠順利產生符合給定命題的正例和反例。當學生能在動態幾何環境與圖表的輔助下產生出各種正反例之後，學生需自行完成剩餘學習單內容。操作動態幾何軟體、寫學習單及訪談過程全程錄影。同時，以電腦螢幕錄影程式軟體（Camstudio）記錄學生使用動態幾何軟體拖曳過程，追蹤學生如何移動給定幾何圖形的點或邊，何時停止拖曳。資料收集完成之後，研究者採用內容呈現方式（manifest content approach）（Erickson, 2006），進行後續質性資料分析。內容呈現分析方法強調學科內容如何藉由對話、文字表徵、肢體動作、手勢和其他的非語言資訊呈現出來。以內容為主要關注，配合其他資料訊息，包括學生在動態幾何的拖曳行為，用以瞭解學生的想法。因此，口語資料先轉成逐字稿，再將逐字稿、學生肢體動作和動態幾何軟體拖曳結果作一對應，並由不同資料來源來瞭解學生的想法。分析後的資料進一步由三位研究者討論與校正，再次確認資料分析結果的信效度。研究結果呈現以質性分析為主，同時輔以量化資料，主要是將學生的認知行為及學習困難描繪清楚。因此，研究分析資料的呈現不是個別學生，而是這些認知行為的特徵。

肆、結果與討論

本研究將研究結果區分為兩個部分：第一是國中生在動態幾何環境的認知行為。第二是整合學生在動態幾何環境及圖表的學習單設計下，呈現哪些臆測策略。尤其本研究將動態幾何軟體當成例子產生器，其對學生臆測表現影響，將作一討論。

一、學生與動態幾何環境的互動分析

互動分析依據本研究提出的兩個維度：測量值的關係性及視覺化兩者為主要分析結果呈現的考量。三份學習單中，其中有兩份臆測目標的幾何性質本身涉及複雜性較高的關係式（外角定理及直角三角形斜邊上的高）。這兩份學習單學生不易直接在動態幾何環境中視覺觀察出幾何性質。另一份，圓內接三角形，其觀察的幾何量較簡單，學生容易在動態幾何環境中觀察。

（一）學生臆測複雜關係式的幾何性質的認知行為分析

研究分析結果顯示學生在直角三角形斜邊上的高的學習單的認知行為類似於外角定理學習單。受限於篇幅關係，以外角定理學習單的結果分析來呈現學生各種不同的認知行為。外角定理學習單的主要工作任務包括：

- 拖曳給定三角形的底邊或是定點以獲得新三角形。

- 記錄所造三角形的邊長、角度在表格內，觀察表格內符合命題的角度值，臆測這些角度值所形成的數學關係。

學生根據給定的錯誤幾何命題，可修改其錯誤命題的前提或是推論結果，而形成新的命題敘述。學習單預期學生產生的新命題敘述包括：

新命題敘述一：在任意三角形 ABC 中，$\angle 1 = \angle A + \angle B$

新命題敘述二：三角形 ABC 中，當 AB＝AC（等腰三角形），$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$

學生需要根據給定的命題，利用拖曳產生符合給定命題前提與結論的正例，以及符合給定命題前提但不符合結論的反例。學生拖曳產生圖形案例後必須將邊與角的測量值記錄在表格上，藉此觀察與推論出合理的或正確的命題敘述。從這些個案訪談中，研究者發現學生在產生幾何圖形案例有不同的認知表現，以下分別就形成命題一與命題二的臆測，說明如後。

首先，預期形成命題一（外角定理）的臆測來看，無論學生所產生的案例如何變異，都是命題一的正例，也就是任何拖曳出的三角形均符合外角定理，因此，利用拖曳產生案例對學生來說並不困難，困難在於學生如何在這些案例觀察出外角定理三個角度之間的定量關係。分析結果發現，完成外角定理學習單的 5 位學生無法從拖曳圖形改變過程中臆測外角定理三個角度之間的關係。學生必須藉由表格測量值的觀察與歸納才能臆測外角定理。經教學介入後，5 位學生最後都成功臆測出外角定理。

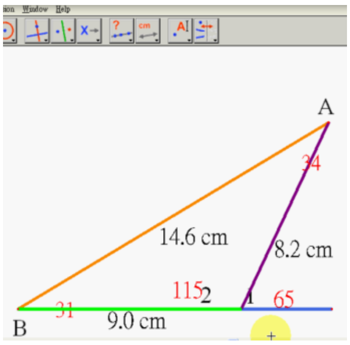
其次，預期學生在動態幾何環境拖曳產生符合原錯誤命題前提但不符合結論的反例並不困難。分析結果顯示學生很容易造出反例。學生的困難反倒是造出符合命題條件的正例，亦即拖曳產生出$\angle 2 = \angle B$ 的三角形特例。學生無法成功建構出符合命題條件正例的主要原因是學習單給定錯誤命題的結論是三個角度的代數關係式（$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$）。此代數關係式涵蓋三個角，其對應在幾何圖形上是三個不同位置，這三個位置的空間關係不容易被觀察、辨識出來。從學生先備知識的角度來看，七年級國中生之前的學習經驗並沒有一個圖形概念心像可延拓銜接到此關係式。學生即便能辨識出給定圖形子圖有一個三角形，也能擷取辨識一些跟三角形有關的幾何知識與圖形心像，但由先備知識與圖形心像到需臆測關係式的認知需求（cognitive demand）過大（Stein, Grover, & Henningsen, 1996），學生很難順利臆測外角定理。另一個可能的理由是原給定錯誤命題所附幾何圖形為三角形，且其底邊線段延長，延長線段形成另外一個角，線段與新增的角可能干擾學生連結與擷取三角形有關的幾何知識；同時也干擾學生在圖形案例上辨識出等長度的兩個邊長，也就是等腰三角形的性質。

由於臆測外角定理的代數關係式對學生產生高認知需求，學生無法單從觀察圖形案例臆測此代數關係。且質性資料分析發現，學生在動態幾何環境拖曳圖形造案例過程中，有不同的認知行為以及對應的學習困難，分項說明於後。

認知行為類型一：隨意拖曳產生案例

就命題一來說，任何案例都是正例，因此，圖表的觀察是臆測正確命題一（外角定理）的關鍵。但就命題二來說，研究者發現學生操作與外角定理有關的圖形來臆測命題二時，學生在拖曳的過程中，表現出沒有目標或隨機的移動頂點或線段，而且學生從拖曳開始到拖曳停止所決定的幾何圖形案例都是隨機的（Arzarello et al., 2002）。因為於學生不知道拖曳改變或產生圖形的目的，所以，即使學生能夠觀察到拖曳產生圖形案例外觀的改變，但學生也不知道拖曳產生的案例與學習單上呈現的原錯誤命題之間的關係。尤其是學生亦沒有辦法藉由視覺化圖形資訊或關係的幫助，觀察出圖形案例與原命題結論之間可能的關係，因此，學生無法根據原命題結論的關係來產生案例。學生難以產生符合原命題的正例的情況下，拖曳所產生的案例都是反例，尤其是無法單就視覺資訊就判斷拖曳的圖形案例是反例或反例。顯見，學生拖曳產生案例的過程其時是與原命題正確與否的判斷的分離的，可視為是兩條沒有交集的思考路徑。

就程序性反駁模式來看，產生的正例與反例是後續形成臆測的基石，學生必須藉由觀察自己所產生的正例或反例的通性，才能夠有機會形成臆測，進而修改原命題的前提或結論成為新的臆測命題。據此，本研究採用兩種不同教學介入，其目的是提供學生自己找到符合原命題結論的正例，而不是只是隨機地產生都是反例的案例。第一種教學介入是鷹架學生在圖形案例上只關注與命題有關的角或是邊。以外角定理為例，研究者將動態幾何軟體顯示的圖形只標示出與原命題有關的三個角度測量值其餘角度及邊長測量值都加以隱藏。如圖 9 所示，左邊是動態幾何環境原提供學生拖曳的圖形，其圖形上四個角度和三個邊長測量值均標示出來。圖 9 右邊圖則是保留與原命題有關的三個角度測量值（原命題的結論為$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$），讓學生能專注於這三個角度，並觀察拖曳對於這三個角度關係的影響。這項介入主要是引導學生視覺上專注在與原命題結論有關的三個角度，目的是讓學生利用拖曳產生符合原命題結論的正例並加以記錄下來。學生才能接續觀察表格的正反例，歸納並臆測出三個角度之間的關係式，及相關的幾何性質。



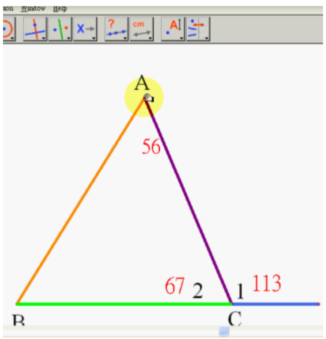


圖 9　左為原動態幾何環境提供標示所有測量值的附圖，右為只標示與命題有關測量值的附圖

第二種教學介入策略則是將原命題結論相關的數值（∠1 與∠2+∠A），顯示在動態幾何軟體圖形案例旁邊（如圖 10）。此策略是幫助學生聚焦呈現在圖形案例的旁邊，以便讓學生拖曳改變或產生圖形時，可以觀察到結論涉及的三個角度特定關係的變化。如，觀察的三角形為正三角形時，學生便可以看到到∠1 為 120°，同時觀察到∠2＋∠A 的角度和也是 120°。藉由此方式幫助學生建構符合原命題的正例。參與 5 位學生，只有 1 位學生可以自己找到正反例，另外 4 位則是在這兩種教學介入後，才得以找到正反例，完成臆測學習單的其他問題。

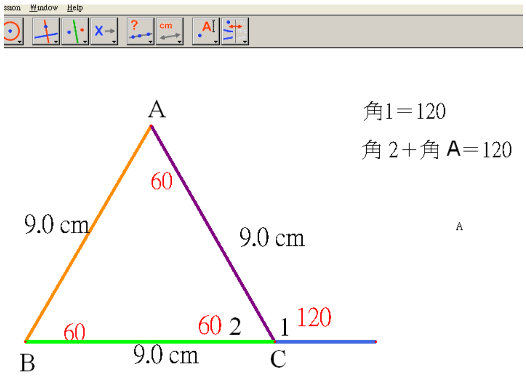


圖 10　測量值關係呈現在動態幾何軟體圖形旁邊

認知行為類型二：拖曳圖形而造出角度關係的困難

質性資料分析發現另外一個操作動態幾何軟體進行造例與臆測的困難，是學生無法有系統地拖曳幾何圖形，以觀察圖形角度或邊長關係的變化。學生在拖曳圖形時沒有意識到拖曳改變圖形特定點的同時亦改變圖形內各角度、邊長及其關係。以「外角定理」為例，當學生意圖拖曳三角形的頂點 A，建構出∠A＝∠B 等腰三角形時（如圖 11），學生會試圖拖曳頂點 A，改變頂點 A 的位置，觀察頂點改變對角度的影響。但學生拖曳幾次後發現，改變頂點 A 位置，會同時影響標示的角度數值都隨之改變。學生必須在拖曳頂點 A 的同時，觀察∠A 與∠B 的角度測量值的變化，才得以順利建構出意圖產生的圖形案例。

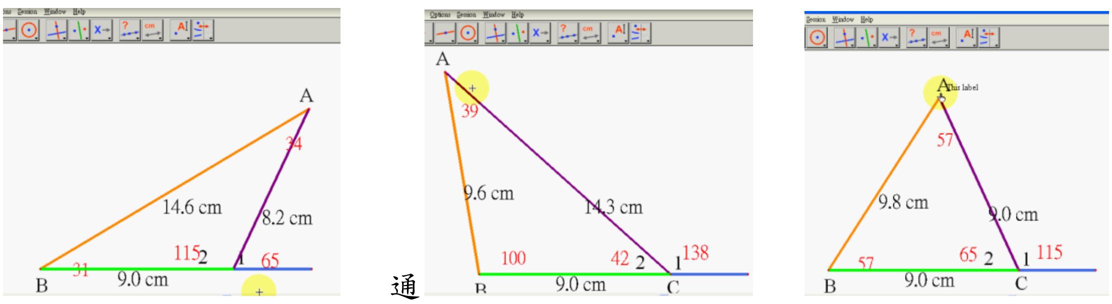


圖 11　動態幾何軟體下學生無法拖曳出預想的特例

如學生意圖拖曳產生的圖形特徵較為簡單，如拖曳一般三角形拖曳出直角三角形。其拖曳過程僅需關注圖形變化或單一角或邊的數值變化，其認知需求會比較低些。然而，若學生拖曳的目的是觀察出圖形角與邊之間的複雜關係，如，將任意三角形拖曳形成符合∠1＝∠2+∠A 關係的圖形時，認知需求就會增加許多。質性分析也發現，學生對於理解關係式與拖曳的移動軌跡作對應是有困難的，學生無法辨識軌跡移動所帶來的幾何意義。例如，當學生拖曳三角形頂點 A 點往右邊平移時，三角形內的∠B 會變小且∠C 會變大。相反的，如頂點 A 往左平移時，三角形內的∠B 會變大且∠C 會變小。若頂點 A 往上移動時，三角形內的∠A 會變小而∠B 和∠C 都會變大。質性分析發現，學生拖曳的認知焦點會放在上述的變化關係上。因為焦點關注於三角形三個角度的變化關係，學生反而沒有意識到學習單預期的臆測目標，亦即命題敘述一（外角定理）和命題敘述二：當 AB＝AC 時，∠1＝∠2+∠A。5 位學生都無法同時關注三角形拖曳軌跡變化與上述兩命題敘述之間的對應關係，順利的在動態幾何環境中臆測正確的幾何性質。

學生無目標的隨機拖曳，即為文獻提到的徘徊拖曳（wondering dragging），通常拖曳是沒有特定方向或規律可言的。因拖曳產生的圖形心像反而增加學生辨識拖曳對於角度改變影響的認知複雜度。學者 Arzarello 等人（2002）論述學生的各種不同拖曳表現時，強調拖曳本身的分類是根據知覺判斷或是幾何理論為基礎的差異性。另學者 Olivero 與 Robutti（2007）也強調測量值如何幫助學生形成臆測想法與後續澄清與論證。但這些研究者並未指出學生利用拖曳形成不同測量值之間的複雜關係式的歷程，拖曳本身引發的複雜性以及學生的認知困難，而這些都將影響學生後續臆測與論證的表現。

認知行為類型三：根據幾何性質進行造例

5 位學生中，其中有 2 位會根據特定圖形屬性或類型當為基礎，利用拖曳產出這些特定的圖形案例。這與學者 Arzarello 等人（2002）所提出引導拖曳類似，也就是學生會從給定圖形資訊聯結或猜測可能的圖形屬性或類型，然後再根據這些屬性來拖曳產出圖形，以符合學生意圖的圖形案例，不過，學生利用此方式拖曳產生圖形案例，並不一定保證就能夠順利產生符合原命題結論的正例，或是根據圖形屬性的差異化產出不同類型的案例。

以其中 1 位學生在動態幾何環境的拖曳行為分析為例，此學生首先拖曳產生的第一個圖形案例是等腰直角三角形（如圖 12）。這位學生建構的圖形案例內蘊三角形的兩個性質：直角與等腰。而這個圖形案例剛好是符合給定命題敘述的正例。雖然，這個正例對於後續修改給定錯誤命題並形成合理的正確臆測相當重要，但分析結果發現，這位學生並沒有系統地利用幾何性質來產生各種不同圖形案例。事後訪談時，學生說：

……拉出這個圖形（等腰直角三角形）只是剛好而已。我覺得這樣的例子不好找，我好像只是運氣好而已………我後來就沒有辦法找到其他像這樣的例子了

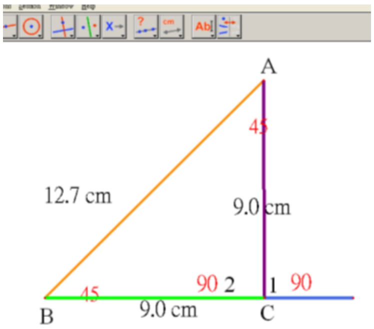


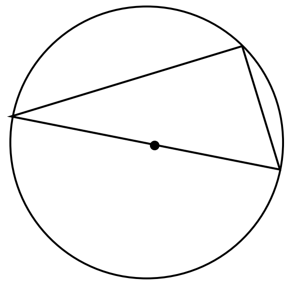
圖 12　學生利用直角三角形性質拖曳出的圖形案例

訪談資料顯示學生只是剛好聯想到等腰直角三角形，並以此造出一個例子。換句話說，這個學生即使利用某些幾何性質在動態幾何環境拖曳建構圖形案例，這幾何性質也只是圖形所引發的心像對應而已（Fischbein, 1993; Fischbein & Nachlieli, 1998）。這些幾何性質的心像通常都是視覺導向的心像表徵，因此，幾何物件旋轉或翻轉之後都可能影響影響學生對此性質心像的認知。此外，視覺建構的幾何心像通常都不可拆解，所以學生無法從幾何物件或心像中抽取出關鍵屬性，以關鍵屬性建構其他不同的幾何案例（鄭英豪，2010）。另一個學生無法造出更多等腰直角三角形案例的原因是這個造例需同時考慮兩個幾何性質：等腰和直角。學生必須理解每一個性質分別對應的概念空間及案例空間（Michener, 1978），同時找到交集。具體來說，當學生建構的直角三角形案例需符合等腰性質時，學生必須思考直角三角形的哪兩個邊可以是等腰。若從學生從等腰三角形來思考直角時，學生必須推論等大的兩底角有沒有可能是直角。若學生無法跳脫直角三角形的典型心像或者是等腰三角形的典型心像，學生就無法建構出各種不同的等腰直角三角形。

總結來說，外角定理提供了研究者瞭解學生在建構較複雜角度關係時，操作動態幾何軟體以建構案例、形成臆測的認知行為及可能的學習困難。

（二）學生臆測單一定量關係式的幾何性質的認知行為分析

本研究另一學習單設計是在動態幾何環境中臆測單一定量的幾何性質。以三角形外接圓學習單為例。此份學習單的工作任務包括：



- 拖曳給定三角形頂點獲得新三角形，依據三角形各邊長測量值，以最長邊為直徑，使用造圓工具鈕造圓，觀察圓與三角形的關係，判斷圓是否通過三角形的第三個頂點。
- 記錄所造三角形的邊長、角度以及圓與三角形關係在表格內，觀察表格內符合命題的三角形邊長與角度值，猜測其共同的特殊性質，也就是「直角」三角形。

這份學習單剛好與外角定理相反，學生在拖曳動態幾何圖形時，可以藉助視覺的幫助來產生正例（Hegarty, 2004）。學生不需要像外角定理學習單一樣推論角度之間的關係。從訪談的案例中，研究者區分幾種不同學生的拖曳圖形的認知表現，而這些認知表現背後存在著學生的在拖曳圖形中可能面臨的困難與挑戰。

認知行為類型一：隨意拖曳產生案例

學生在三角形外接圓學習單利用拖曳產生圖形案例的方式與外角定理學習單一樣，在動態幾何環境下，容易採取隨意拖曳圖形產生圖形案例。對學生來說，拖曳並沒有特定目標，只是為了產生圖形案例。學生拖曳過程通常相當快速，且通常獲得的是反例。在外角定理學習單時，學生並不清楚建構的圖形案例是正例還是反例。但在三角形外接圓活動時，完成這份學習單的6位學生均可以從觀察動態幾何軟體所呈現的圖形案例，得知建構的案例是反例。因此，隨機的拖曳幫助學生瞭解並非所有三角形圖形案例都是符合原命題結論，亦即並非所有三角形都剛好三點會在圓上（如圖13）。學生可以藉由視覺判斷得知三角形的其中一個頂點並不在圓上。但即使學生能隨意拖曳產生圖形案例，卻無助於產出符合原命題結論的正例，就因為如此，學生便沒有機會去進行利用程序性反駁模式所產出的學生區辨正例與反例的認知活動。

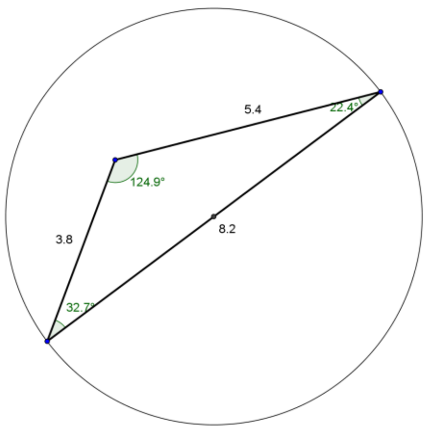


圖 13　學生拖曳後形成三角形與外接圓所形成的反例

認知行為類型二：拖曳調整反例成正例

研究者預設學生先利用拖曳產生特定的三角形案例，再使用造圓按鍵產出圓並判斷關係後，如圖 13，便不再使用該圖形案例，然而，此類型的學生並非依照研究者預設方式，學生會繼續使用該圖形案例，再利用拖曳改變不在圓直徑上的三角形第三個頂點，藉此將不符合原命題的反例調整成為符合命題的正例，因此，學生有了這樣的經驗後，利用拖曳產生正例的意圖並不是如何產出特定三角形，而是聚焦在利用拖曳調整圖形關係成為正例。例如，學生利用拖曳給定三角形而產生一個鈍角三角形（拖曳產出特定三角形），並以最長邊為直徑造圓（如圖 13），但當學生觀察到圓並沒有通過三角形的第三頂點時，接著使用拖曳將第三頂點移動到圓上（拖曳調整圖形關係成正例）（如圖 14）。研究者發現這樣的學生，其拖曳的意圖在於將圖形關係調整成符合命題的正例，然而是否符合命題的判斷卻是藉由視覺，因此，視覺判斷的誤差容許程度將導致測量數值亦有誤差可能（Olivero & Robutti, 2007），如下圖 14，三角形的第三頂點被學生認為在圓上，不過，而定點的內角測量值顯示為 90.9 度，這誤差卻導致學生無法從測量值的記錄表中觀察出「直角」的特殊屬性。

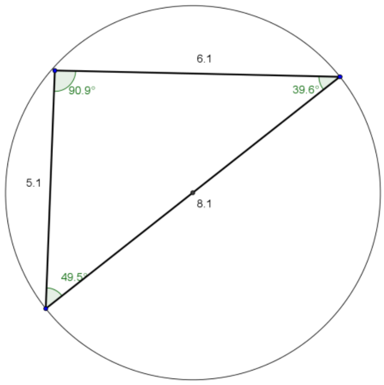


圖 14　學生意圖調整反例成正例

認知行為類型三：拖曳成想像正例

就這類的學生來說，利用軟體拖曳圖形的意圖是為了產生合乎原命題結論的正例，因此，學生利用拖曳產生特定的圖形案例後，並不會立即將其視為圖形案例，這與認知類型一的學生是不同的（立即當案例），學生會在經由想像來判斷是否符合圖形關係，也就是說，學生會先想像最長邊為直徑造出圓的樣子以及該圓是否通過三角形的第三個頂點，因此，這類型的學生經常需要多次的「拖曳造例-想像判斷」行為後，才會將拖曳產生的圖形案例當成要進行造圓檢驗的案例。然而，學生想像的圖形關係（圓通過三角形三個頂點）通常都沒有確實產生，而且沒有如同認知類型二的學生一樣，再利用拖曳調整圖形案例成為符合圖形關係的正例，因此，這類型學生利用拖曳所產生的圖形案例亦缺乏正例，就與認知類型一的學生相同，沒有機會進行程序性反駁中區辨正反例的認知活動。

認知行為類型四：拖曳成特定屬性的案例

就這類的學生來說，學生在利用拖曳產生圖形案例前，就會先觀察正例的圖形、正例的測量值或圖形分類的特徵，臆測正例可能具有的特定屬性（Cañadas, et al., 2007），並將圖形拖曳成具有此屬性的圖形案例，再用造圓產生圖形關係來檢驗猜測是否正確，這時學生拖曳產生圖形案例所關注的便是三角形的特定屬性，亦即具有特定邊長關係或角度測量值的三角形。例如，學生從學習單給定命題所附加的圖形案例（圓通過三角形三頂點的圖形）觀察該三角形的特徵，或觀察自己隨意拖曳產出的正例記錄的測量值，或是因三角形名稱欄位所引動的三角形分類觀點等，進而猜測出三角形須具備「直角」的屬性才是正例，因此，學生利用拖曳產生圖形案例時，會關注三角形的特定內角角度值的變化，使其成為具有內角 90 度的三角形。不過，當學生利用已經產出的圖形正例猜測出某個符合正例的特定屬性時，便容易局限在此屬性下而無法轉向其他屬性，例如，有位學生產出的正例是等腰直角三角形，他從記錄表的邊長與角度測量值發現此三角形的某個兩邊長相等，因此，猜測「等腰」是正例具備的屬性，其後並以屬性拖曳產生圖形案例，然而，學生仍因執著於此邊長特徵而無法轉向角度特徵，即使造出許多不符合命題結論的反例。另外，學生利用拖曳產生特定三角形案例時，由於拖曳特定頂點會造成三角形兩個邊長測量值的同時變動，而且變動的可能性包含兩邊同時變長、同時變短或一邊變長與一邊變短，當然，拖曳特定頂點也會造成三角形三個內角測量值的同時變動，而且變動的可能性包含拖曳點的角度增加與其他兩角度減少，或是拖曳頂的角度減少而其他兩角度增加，因此，當學生無法同時掌握兩個邊長或三角角度的變化關係時，就無法拖曳出正三角形，也就無法拖曳出所想要的「正三角形」。

二、藉由動態幾何軟體與圖表鷹架下的臆測類型

學者 Cañadas 等人（2007）提出五種臆測類型，包括有限離散案例歸納、動態案例歸納、類比、回溯、知覺經驗所得臆測。其中，學者 Cañadas 等人說明動態案例歸納的特質是學生從無限、連續的動態案例觀察中臆測數學。動態幾何軟體是引發此種臆測類型的重要環境。本研究則是探究當學生無法在動態幾何環境中，直接臆測動態案例背後的數學時，藉由將動態幾何環境當成「例子產生器」的觀點，結合表格使用之下，學生形成哪些臆測策略。整合上述學生在動態幾何環境中的認知行為及學習困難，本研究提出學生三種不同臆測策略的類型，分別為有限隨機離散案例臆測、系統性調整案例臆測及動態性調整案例臆測。

臆測歷程一：有限隨機離散案例歸納

15 位學生中，有 4 位學生無法臆測出正確的幾何命題。進一步分析其主要原因則是這些學生只仰賴表格上紀錄的幾何圖形案例對應的測量值，並試圖以這些測量值來進行臆測。而由於

這些測量值來自於徘徊拖曳（wondering dragging），所以幾何圖形案例與案例所帶來的測量值也是隨機的。因此，不一定能夠同時找到符合命題的正例與反例。有的時候也會找到非例。正如前述的分析中，案例的屬性與幾何命題本身有重要的關係。如：三角形外接圓，學生容易找到的是反例，而非正例。若學生無法找到正例，學生就無法臆測不同正例之間的不變性，進而以此不變性來修改給定的錯誤命題。

臆測歷程二：系統性調整案例臆測

系統性調整案例臆測指的是學生先隨機建構幾何圖形案例，然後將圖形案例的測量值記錄在圖表中，藉由圖表的觀測，慢慢形成臆測想法。然後學生再度回到動態幾何環境中檢測自己的臆測想法。學生在動態幾何環境中會改變測量值（如圖形的邊長或角度），並系統性的觀測圖形的變化歷程直到學生有足夠的訊息能夠形成新的命題想法。通常學生能夠建構出正例與反例，並以此來臆測正確的幾何命題。15 位學生中，有 6 位學生是以此策略臆測正確命題的。

臆測歷程三：動態性調整案例臆測

剩餘的 5 位學生則是藉由在動態幾何環境中拖曳給定的圖形歷程中形成自己的臆測。這些學生會來來回回拖曳圖形的某一個點。由拖曳過程中逐漸形成自己的臆測想法。對這些學生來說，他們會慢慢的拖曳某一個點直到某一個位置以觀察測量值之間的對應關係。同樣的，他們也會建構反例來再次驗證自己的臆測是否正確。此歷程有助於學生對於「若且唯若」（if and only if）與命題判斷之間的理解。

伍、結論與討論

本研究藉由文獻分析與支持提出動態幾何軟體的新論述，將其視為「例子產生器」來幫助學生幾何學習。研究以程序性反駁模式為中介理論架構，選擇錯誤命題為起點，藉由動態幾何環境中拖曳認知行為產生不同的圖形案例，讓學生得以區辨正反例，尋找其共通性，並進一步臆測正確的幾何性質。利用質性分析為主，量化資料為輔，深入探究國中生在動態幾何環境中的認知行為以及學習困難。

首先本研究呈現學生在動態幾何環境下拖曳圖形、形成臆測想法的不同認知行為及發生的學習困難。參與學生都能在動態幾何環境中拖曳形成幾何圖形案例，然而學生利用拖曳產生圖形有不同的認知行為和對應的學習困難，其亦影響後續形成臆測的策略。這些結果不同於紙筆情境下學生臆測幾何性質的表現，可以提供八、九年級融入動態幾何軟體進行幾何教學的參考，特別是將動態幾何軟體視為例子產生器的教學設計。其次，學生具備良好的幾何物件分類系統（de Villiers, 1994）並能夠用來產生不同類型的案例是相當重要的：儘管學生意圖利用軟體產生符合命題的正例，而且有些學生能夠使用某些特徵產生特定類型案例，如等腰與直角的屬性，

但是，如果學生不清楚那些特徵對應的分類系統，僅能固著該特徵並產生特定圖形案例，便無法產出其他類別案例進而探索出符合命題的正例類型，相反的，如果學生清楚特徵對應的分類系統，就有機會產出不同類別案例進而獲得正例與反例，有助於學生對於該命題的瞭解及後續臆測歷程的進行。因此，培養學生有系統的幾何物件分類概念，並能夠用來產出不同類別案例，在教學設計中就顯得相當重要。這也是國中小幾何課程設計與教學必須關注的重點之一。

另外，學生對圖形進行分解（decomposition）和重組（recomposition）的操作有助於他們察覺圖形中蘊含的特徵或關係（Gal & Linchevski, 2010）：儘管學生會利用軟體產生圖形案例並得到其測量值，然而多數學生無法聚焦在數個特定測量值的可能關係上，因此，研究者就某些個案研究會改變軟體顯示的測量資訊，協助學生聚焦在拖曳產生圖形的特定角度或邊長測量值上，進而探索這些測量值的可能關係。這樣的介入確實成功引導學生形成可能關係的臆測，而研究者猜測此項介入能夠成功的主要原因是，學生有機會對自己拖曳產生的圖形案例，進行有目標的分解與重構的認知操作，進而激發（activate）學生對該圖形案例有關的幾何特徵或關係的提取與應用，不過，此項猜測仍需要再檢驗。

研究同時顯示學生能使用一次拖曳產生一系列的圖形案例，並不意味著學生能夠同時察覺不符合與符合命題結論的反例與正例：儘管學生可以利用拖曳產生一系列的圖形案例，然而，這些動態的圖形案例不見得都可以成為學生檢驗命題的案例，有些情形可以，特別是命題結論是可以視覺化的圖形關係，例如，圓通過三角形三個頂點，學生拖曳產生一系列圖形案例時，便可從視覺化的圖形關係立即判斷是否符合命題結論；但有些情形不可以，特別是命題結論是不容易視覺化的測量值關係，例如，特定三個角的代數關係式，學生拖曳產生一系列圖形案例時，這些角度測量值隨之快速變動且幾乎都不符合該代數關係式，若不是靜止狀態，亦即有特定的測量值顯示，就無法判斷代數關係是否成立，因此，學生無法就一次拖曳產生正例與反例，需要累積出多個靜止案例後，才能夠從這些案例的數值資料進行關係的探索。

學者 Healy 與 Hoyles（2001）指出科技媒體融入教學的可能性與限制性。本研究進一步提出學生利用動態幾何軟體產生的圖形案例與學生原本意圖產生的案例之間會仍有落差；儘管學生有動態幾何軟體輔助來產生圖形案例，然而，他們仍無法利用軟體產出意圖中的圖形案例，造成認知想像的與實際產出的圖形落差原因主要來自於：（1）拖曳動作的限制，學生可能無法確實地拖曳圖形頂點到特定的位置或特定的數值上，例如，學生想要將三角形第三頂點拖曳到特定的圓上，但無法精確地協調手部的拖曳動作達到特定的位置；（2）視覺判斷的限制，學生如可能無法精確地看出圖形的特定關係，例如，學生想要判斷產出的圓是否通過三角形三頂點時，因為軟體預設圓與點均有寬度，再加上相對的螢幕解析程度，雖然不重疊的兩者，卻在某個視覺容許的範圍內便被看成是重合；（3）測量值的限制，學生可能誤以為軟體呈現的測量值

是精確無誤的值，例如，學生利用拖曳產生三角形案例，三角形內角值分別為 68.6, 47, 64.5 度，學生通常相信這些數值，並沒有察覺內角總和超過 180 度，以及認識到這是因為軟體以四捨五入取到小數第一位所造成的。當然，學生拖曳產生圖形案例時，這些限制會交互持續地出現，若學生沒有察覺這些限制及相互帶來的影響時，就光是判別案例是否符合命題結論時便會產生問題，當然就會影響到後續形成臆測的認知表現。

不同於學者 Cañadas 等人（2007）提出的五種臆測認知歷程，研究者從學生在動態幾何環境下的臆測歷程區分三種認知路徑，包括有限隨機離散案例歸納、系統性調整案例臆測及動態性調整案例臆測。研究結果論述提供將動態幾何軟體視為「例子產生器」，並融入案例記錄表格教學設計與課室教學互動的重要依據。

目前臺灣國中階段的幾何課程規劃在八和九年級。八年級主要教學目的之一是培養學生能理解幾何性質，並利用性質進行幾何推理，銜接幾何論證。九年級則是進一步預期學生能具備建構幾何證明的素養能力。而本研究以七年級學生為研究對象，提出尚未進入八年級幾何課程可能面臨的學習困難，尤其強調在臆測、圖形分解與重組、動態幾何軟體使用可能產生的學習限制上，具體描述這些學習困難。這些觀點可以提供八、九年級進行幾何教學，尤其採用動態幾何軟體為教學媒介的參考依據。其中，無論是八年級幾何推理與論證初始學習階段還是九年級正式進入論證課程，其學習的根基之一是學生必須對架基幾何論證基礎的幾何性質必須有相當的瞭解。本研究清楚描述幾何性質概念的建構，尤其藉由動態幾何環境中，學生如何能夠正確的建構幾何性質。雖然，本研究提出使用動態幾何進行教學可能面臨的教學限制，但其軟體工具提供學生由特定性質衍生的多樣圖形，建構學生思考同一性質下，圖形的多樣性，以及此例子空間的擴張對後續幾何學習的重要性，具有實質上的意涵。

在教學介入方面，原本研究者只界定於幫助學生順利建構正反案例，以觀察案例之間的共通性，得以順利進行幾何臆測。在研究的目標及分析架構下，描述學生的認知行為以及這些教學介入對於學生在動態幾何環境中進行臆測的影響。學生如何造例、造例的困難與學生形成臆測想法則是可進一步研究探究的主題之一。

參考文獻

林福來（2010）。數學臆測活動的設計、教學與評量：總計畫。載於楊德清（主編），**行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告-數學教育學門專題研究成果討論會**（B 冊，89－100 頁）。嘉義：國立嘉義大學。【Lin, Fou-Lai (2010). Designing, teaching, and assessing mathematical conjecturing activity: Leading project. In Der-Ching Yang (Ed.), *Conference proceedings for research reports in mathematics education discipline: National Science Council research project report* (Volume B, pp. 89-100). Chiayi: National Chiayi University. (in Chinese)】

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），192-218。【Chen, Ing-Er, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of mathematical conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, *6*(2), 192-218. (in Chinese)】

鄭英豪（2010）。數學臆測與證明學習連續性的教與學研究。載於林福來（主編），**數學臆測活動的設計、教學與評量**（27-52 頁）。臺北：國立臺灣師範大學。【Cheng, Ying-Hao (2010). Coherence of mathematical conjecturing and proving: A study of teaching and learning. In Fou-Lai Lin (Ed.), *Designing, teaching, and assessing mathematical conjecturing activity* (pp. 27-52). Taipei: National Taiwan Normal Univeristy. (in Chinese)】

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A congnitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.89-96). Thessaloniki, Greece: PME.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principals and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.185-192). Prague, Czech Republic: PME.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387. doi: 10.1007/BF01273371

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2006). Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.289-296). Prague, Czech Republic: PME.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2007). The effectiveness and limitation of reading and coloring strategy in learning geometry proof. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Seoul, Korea: PME.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2008). A study on left behind students for enhancing their competence of geometry argumentation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 305-312). Morelia, Mexico: PME.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

de Villiers, M. (1999). A sketchpad discovery involving areas of inscribed polygons. *Mathematics in School*, *28*(2), 18-21.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724. doi: 10.1080/0020739042000232556

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-57771-0_10

Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle..." Young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 271-299. doi: 10.1007/s10758-006-9106-7

Erickson, F. (2006). Definition and analysis of data from videotape: Some research procedures and their rationales. In J. L. Green, G. Camilli, & P. B. Ellmore (Eds.), *Handbook of complimentary methods in education research* (pp. 177-191). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211. doi: 10.1080/0950069980201003

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 163-183. doi: 10.1007/s10649-010-9232-y

González, G., & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 153-182. doi: 10.1007/s10758-009-9152-z

Greeno, J. G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In R. E. Snow, P. Federico, & W. E. Montague (Eds.), *Aptitude, learning, and instruction, Vol. 2: Cognitive process analyses of learning and problem solving* (pp. 1-21). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematic teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141. doi: 10.1007/s10758-005-0395-z

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potential and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256. doi: 10.1023/A:1013305627916

Hegarty, M. (2004). Diagrams in the mind and in the world: Relations between internal and external visualizations. In A. Blackwell, K. Marriott, & A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference: Third international conference, diagrams 2004, Cambridge, UK, March 2004 proceedings* (pp. 1-13). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-540-25931-2_1

Hsu, H. Y. (2008). *Learning opportunity of reasoning: The interplay between gestures and diagrammatic properties.* Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Hsu, H. Y. (2010). *The study of Taiwanese students' experiences with geometric calculation with number (GCN) and their performance on GCN and geometric proof (GP).* (Unpublished doctoral dissertation). University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Klaczynski, P. A., & Narasimham, G. (1998). Representations as mediators of adolescent deductive reasoning. *Developmental Psychology*, *34*(5), 865-881. doi: 10.1037/0012-1649.34.5.865

Koedinger, K. R., & Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, *14*(4), 511-550. doi: 10.1207/s15516709cog1404_2

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151-161. doi: 10.1023/A:1012793121648

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317. doi: 10.1023/A:1013309728825

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/0-387-24040-3_11

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: The Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(2), 135-157. doi: 10.1007/s10758-008-9130-x

Lin, F. L., & Wu Yu, J. Y. (2005). *False proposition - As a means for making conjectures in mathematics classrooms.* Paper presented at the Invited speech in Asian Mathematical Conference, Singapore.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281. doi: 10.1023/A:1013357611987

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* London, UK: Addison-Wesley Pub. Co.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science*, *2*, 361-383. doi: 10.1016/S0364-0213(78)80052-4

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*(2), 135-156. doi: 10.1007/s10758-007-9115-1

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29. doi: 10.2307/749867

Resnick, L. B. (1975). *Task analysis in instructional design: Some cases from mathematics*. Pittsburgh, PA: Learning Research and Development Center. Retrieved from ERIC database. (ED 115486)

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, *38*(5), 329-342. doi: 10.3102/0013189X09338513

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123-151. doi: 10.1007/BF01274210

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488. doi: 10.3102/00028312033002455

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Wu Yu, J. Y., Hsu, H. Y., Lin, C. J., & Chin, E. C. (2009). *Validating a conditional statement: The role of empirical examples.* In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 492). Thesalloniki, Greece: PME.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 199-219. doi: 10.1007/BF00305090