

連文宏、洪儷瑜 (2017)。

數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析。

臺灣數學教育期刊, 4 (1), 35-62。

doi: 10.6278/tjme.20170317.002

數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析

連文宏^{1,2} 洪儷瑜^{2,3}

¹臺北市立大理高級中學

²國立臺灣師範大學特殊教育系

³國家教育研究院

數感和基本計算一直被認為是數學學障的核心缺陷，國中的數學學障學生在小學接受補救教學之後，其在基本數學技巧上表現是否可以被補救？本研究擬以 4 位國中數學學障生，探討單純數學學障與數學合併閱讀障礙國中生在個位數、多位數計算及其對應之文字題解題能力的表現特徵，並比較彼此的差異。以單純數學學障和數學合併閱讀障礙各 2 人為研究對象，實施二套計時性質之標準化數學診斷測驗，據以進行計算正確性與計算速度之量化分析，在施測過程中蒐集個案的計算策略與錯誤類型資料，據以進行個位數、多位數計算與文字題解題能力發展之質性分析。研究結果發現，個位數加法和減法數學事實自動化提取的困難，是數學學障的核心能力缺陷，此特徵反映在個位數計算速度的緩慢，並不影響其正確性，計算策略分析顯示兩組學生的數數策略發展有所差異。多位數計算能力方面，不管是否合併閱讀障礙，數學學障主要的核心缺陷仍為數學事實提取困難，均呈現計算速度緩慢的問題，遇到大數字或更複雜的題型時，數學合併閱讀障礙的學生，其計算速度更為緩慢，也開始出現計算正確性的問題。加法和減法文字題解題能力方面，單純數學學障的解題速度不受影響，偶而出現運算符號錯誤，合併閱讀障礙後，其計算正確性與計算速度則明顯受到影響，據此，文字題解題能力可能不是數學學障的核心能力缺陷。

關鍵詞：計算能力、數學事實提取能力、數學學障、閱讀障礙

通訊作者：洪儷瑜，e-mail：t14010@ntnu.edu.tw

收稿：2016 年 5 月 31 日；

接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Lien, W. H., & Hung, L. Y. (2017).

Profile of arithmetic knowledge of junior high school students with mathematics learning disabilities with/without reading disabilities.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 4(1), 35-62.

doi: 10.6278/tjme.20170317.002

Profile of Arithmetic Knowledge of Junior High School Students with Mathematics Learning Disabilities with/without Reading Disabilities

Wen-Hung Lien^{1,2} Li-Yu Hung^{2,3}

¹ Taipei Municipal Dali High School

² Department of Special Education, National Taiwan Normal University

³ National Academy for Educational Research

Number sense and arithmetic are considered the core deficit of mathematics learning disabilities (MLD). Can these basic skills of the junior high school students with MLD be remediated after receiving remediation from the elementary school to junior high school? This study aims to investigate the single- and multi-digit arithmetical abilities of junior-high-school students with mathematics learning disabilities (MLD-only) and those comorbid reading disabilities (MLD-RD). The subjects, two MLD-only and two MLD-RD students, were administered two standardized and timed diagnostic tests, and with observations made and interviews conducted during or after the test. Both quantitative and qualitative data were analyzed, including the arithmetic accuracy, speed, strategies and error-patterns. The results revealed that single-digit addition and subtraction and math-fact retrieval are the core deficits in students with MLD. The deficit in math-fact retrieval affects their arithmetical speed. An analysis of their arithmetical strategies showed that development of counting strategies differed between MLD-only and MLD-RD students. In multi-digit arithmetic, MLD students, whether comorbid RD or not, performed poorly with low arithmetical speed, especially when encountering problems with large numbers and complex procedures for calculations. Furthermore, the arithmetical speed of MLD-RD students was found to be slower than that of MLD-only students. When solving word problems, the speed of MLD students was not affected, but among MLD comorbid RD students, speed was significantly affected. Therefore, word problems are not considered the core deficit of students with MLD.

Keywords: arithmetic, math fact retrieval, mathematics learning disabilities, reading disabilities

Corresponding author : Li-Yu Hung , e-mail : t14010@ntnu.edu.tw

Received : 31 May 2016;

Accepted : 17 March 2017.

壹、緒論

數學學障 (mathematical learning disability, 簡稱 MLD) 是學習障礙的亞型之一, 相較於閱讀障礙 (reading disability, 簡稱 RD) 研究發展之豐富, MLD 研究相對不足 (Gersten, Jordan, & Flojo, 2005; Jordan & Hanich, 2003)。往年, 國內 MLD 之鑑定多採學習潛能和數學表現之間的差距標準 (林秀柔, 1989; 蕭金土, 1995), 因此鑑定工具就需要標準化數學成就測驗作為數學表現之判斷依據, 再與智力測驗所測得之學習潛能進行差距評估。直到民國 89 年柯華葳以核心能力的構念編製《基礎數學概念評量》, 才把鑑定 MLD 之重點轉到核心能力之缺陷 (柯華葳, 2005)。這個改變與美國精神醫學會 (American Psychiatry Association) 的心理疾患統計診斷手冊 (The Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, 簡稱 DSM) 演變一致, 2013 年新出版的 DSM-5 不再採用 2004 年 DSM-IV 及更早版本強調能力與成就之差距標準, 改以核心缺陷的特徵作為 MLD 之診斷標準, 並提出兩種困難類型, 一是難以學會數感、數學事實提取或計算, 此與傳統醫學名稱「失算症」或「計算障礙」(dyscalculia) 之概念接近 (Butterworth, 2005; Chiappe, 2005); 另一種是難以進行數學推理, 亦即運用數學概念、數學事實和計算程序進行推理與解題出現困難, 前後版本之標準如表 1。

綜觀國外文獻以 MLD 作為研究對象時, 在操作上多由標準化個位數和多位數計算能力測驗之表現所界定 (Geary, Hoard, Byrd-Craven, & DeSoto, 2004; Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent, & Numtee, 2007; Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003; Raghubar, et al., 2009), 而研究指出 MLD 和 RD 會有共病情形, 所謂共病是指個體同時符合兩種以上障礙診斷或疾病之情形, 且二者沒有因果關係 (Noyes, 2001; Wittchen, 1996)。MLD 合併 RD 的出現率從 2.3% 到 7.6% 之間 (Badian, 1999; Dirks, Spyer, van Lieshout, & de Sonneville, 2008; Lewis, Hitch, & Walker, 1994), 而兩者的共病率則高達 57% 至 64% 之間, 視 MLD 的診斷標準而定 (Barbarese, Katusic, Colligan, Weaver, & Jacobsen, 2005)。很多探討 MLD 的研究會採用是否合併 RD 的共病設計, 目的在於釐清哪些數學表現困難的特徵是 MLD 的核心缺陷 (當此困難特徵在兩者均出現時), 合併 RD 後是否加重此核心缺陷的嚴重程度, 以及哪些困難特徵是合併 RD 後才浮現, 據以推論該困難特徵非 MLD 的核心缺陷。

據此, 近年的研究多關注單純 MLD (以下簡稱 MLD-only) 和 MLD 合併 RD (以下簡稱 MLD-RD) 之不同亞型, 彼此在計算能力表現的特徵與差異, 計算能力的範疇包括個位數計算, 又稱數學事實提取能力 (math facts retrieval) (Geary, et al., 2004; Jordan, et al., 2003)、多位數計算能力 (Raghubar, et al., 2009) 和文字題解題能力 (Fuchs & Fuchs, 2002; Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001; Jordan & Hanich, 2000; Jordan & Montani, 1997; Pellegrino & Goldman, 1987) 等。

然而，國外文獻在計算能力的研究議題上多是分開探討，而且研究對象也集中在小學階段且尚未經過補救教學者，因此，他們在小學階段經過身心障礙資源班的數學科小組補救教學後，到了國中階段，彼此在計算能力上的整體表現特徵及其差異為何，是一個值得探討的議題。

綜合上述，本研究目的為以國小階段經過數學科補救教學迄今之 MLD-only 和 MLD-RD 國中生為對象進行個案研究，探討 MLD-only 和 MLD-RD 這兩種不同亞型之 MLD 個案在個位數計算、多位數計算及文字題解題能力之表現特徵及彼此的差異。

表 1

DSM-IV 和 DSM-5 數學障礙之診斷標準

版本	標準內容
DSM-IV (American Psychiatric Association, 2004)	A: 在標準化個人測驗中，數學能力顯著低於預期應有程度。此預期依據其生理年齡、測量得到的智能，以及與其年齡相稱之教育而判定。 B: 準則 A 之障礙顯著妨害其學業成就或日常生活需要閱讀技能的活動。 C: 若有任何感覺能力缺陷，此數學困難也遠超過此缺陷通常影響所及。
DSM-5 (American Psychiatric Association, 2013)	A: 學習學業技能有困難，出現如下任一症狀超過六個月，即使對這些困難有提供介入： 5. 難以學會數感、數學事實或計算 6. 難以數學推理，利用數學概念、事實、程序去解決問題 ^{註一} B: 這些困難顯著低於其就讀年級所有之水準，且顯著影響其學校學業和工作相關活動的表現。

註一：僅列數學學習障礙，未列出的 1-4 是閱讀和書寫障礙。

貳、文獻探討

為支持本研究目的之重要概念，以下依據數學計算有關的數學事實自動化提取、多位數計算和文字題等能力發展之文獻，與其在數學學障學生相關研究結果分述如下。

一、數學事實自動化提取能力之發展

數學事實自動化提取能力是指，學生能自動化地將個位數計算的答案直接從記憶庫中提取出來，要達到如此流暢的計算能力，不少文獻已指出大致可分為三個發展階段，第一階段稱為數數階段，或稱為建立數學事實的程序性知識 (procedural knowledge) 階段；第二階段則是將已知的數學事實與未知的數學事實建立關係，據以記住未知數學事實的階段；第三階段則是直接提取數學事實，或是知道數學事實的陳述性知識 (declarative knowledge) 階段 (Ando & Ikeda, 1971; Ashlock, 1971; Bezuk & Cegelka, 1995; Carnine & Stein, 1981; Garnett, 1992; Garnett &

Fleischner, 1983)。Hopkins 與 Lawson (2002) 則進一步將數數階段再加以細分成二個階段，兒童能夠直接提取數學事實之前，他必須先習得數字的概念知識，並建構出越來越精緻而有效率的數數策略，據此指出數數策略的發展是從「全部數 (counting-all)」進展到「數上去 (counting-on)」策略，其中「全部數策略」又細分為長數數加總 (long-sum) 和數數加總 (sum-counting) 程序等二個發展階段，這二者均是從 1 開始數，只是前者在「加數」從 1 數一次，「被加數」也從 1 數一次，最後二個數字合起來從 1 再數一次，而後者是二個數字合起來從 1 開始數直到結束。至於「數上去策略」也細分為二個發展階段，分別為以第一個數字為基礎數上去 (count-from-first) 和以大數字為基礎數上去 (min-counting) 程序，前者是以第一個數字 (亦即加數) 為基礎數上去，而後者是以大的數字 (可能是加數或被加數) 為基礎數上去。此外，Hopkins 與 Lawson 將上述文獻的第二階段和第三階段分別稱為分解與重組 (decomposition and regrouping) 和數學事實提取 (math facts retrieval) 階段 (Hopkins & Lawson, 2002)，其中分解與重組能力是一種彈性運用能力的展現，透過已建立的數學事實導出另一個數學事實，如「 $6+7$ 」先提取已知的「 $6+6=12$ 」這個事實，然後這個「部份的合」再加上 1 就導出答案，當孩童的計算能力進展到數學事實提取階段，表示他們遇到任何的個位數算式 (如 $3+5=$ 、 $8+5=$ 、 $9-6=$ 、 $14-5=$ 、 $6\times 7=$ 、...) 都可以直接從記憶庫中提取出答案，研究指出學童從數數策略轉換到數學事實提取策略，大致發生在小學二年級到三年級之間 (Ashcraft, Fierman, & Bartolotta, 1984)，到了小學四年級，數學事實直接提取已成為其主要的加法策略 (Ashcraft, 1982)。Hopkins 與 Lawson 四個發展階段整理如表 2，並與之前文獻所指出的三個階段進行對照。

表 2

Hopkins與Lawson的四個發展階段與之前文獻的三個發展階段對照表

之前文獻的三階段論	Hopkins 與 Lawson 的	
	四階段論	次階段
數數 (程序性知識) 階段	全部數階段	long-sum
		sum-counting
	數上去階段	count-from-first
		min-counting
已知與未知事實建立關係階段	分解與重組階段	
數學事實提取 (陳述性知識) 階段	數學事實提取階段	

當計算策略發展到以記憶為基礎時，在解題歷程中，由於運用快速且精熟的自動化數學事實提取策略而降低工作記憶的負荷，就可以讓出更多的認知資源以解決複雜的問題，如多位數計算或文字題，甚至理解更抽象的數學概念 (Dehaene, 1997; Geary & Widaman, 1992)。而且，

學童如果能運用數學事實的自動化提取能力，快速地完成數學習題，那麼他將有更多的機會也能更輕鬆地練習其他的題目，而這些經驗會進一步強化其計算的正確性、流暢性和彈性運用能力 (Ivarie, 1986; Skinner, Bamberg, Smith, & Powell, 1993; Skinner, Belfiore, Mace, Williams, & Johns, 1997; Skinner, Pappas, & Davis, 2005)。

二、多位數計算能力之發展

一般學生在多位數計算能力的表現，可以從計算錯誤的訊息中加以探討其計算程序與概念知識的發展 (Resnick, 1984)，例如，孩童開始學習多位數減法計算時，會忽略每個位值之被減數與減數的大小，常犯一律以大的數字減小的數字之錯誤類型 (如 $624 - 461 = 243$)，此計算程序的錯誤可能反映孩童仍缺乏十進位 (base 10 system) 的數學概念 (Fuson & Kwon, 1992)。van Lehn (1982) 指出多位數計算除了缺乏數學概念導致穩定而一致的錯誤外 (如上述缺乏十進位概念)，也會因為缺乏穩固的計算程序或數學事實提取錯誤而導致偶發性的錯誤，反映出學童從長期記憶中提取數學事實有困難或錯誤使用數數程序等。其他型態的多位數計算錯誤，包括直式轉換時的數字空間欄位對位有誤、誤讀或誤寫數字等，此現象可能與視覺-空間 (visual-spatial) 或視覺-監控 (visual-monitoring) 能力不佳有關 (Russell & Ginsburg, 1984)。到目前為止，針對 MLD 學生在多位數計算能力的研究仍是相當不足，Russell 與 Ginsburg (1984) 利用聽寫多位數計算題目，並將寫下的題目加以計算的方式進行研究，發現國小四年級的 MLD 學生，相較於同齡的控制組而言，較無法辨識出他人計算程序的錯誤，包括數字空間欄位對位的錯誤、誤寫數字等，而且有較高比例的數學事實提取錯誤，據此指出數學事實提取的錯誤和視覺-監控能力不佳是 MLD 學童進行多位數計算的主要特徵。

Raghubar 等人 (2009) 則進一步以國小三、四年級的 MLD-only、MLD-RD、RD-only 學生和正常發展的控制組等為對象，進行多位數加法和減法計算能力的研究，並依據下列的錯誤類型加以編碼，包括數學事實提取錯誤、計算程序錯誤、視覺-空間錯誤和計算題型轉換錯誤等。數學事實提取錯誤是指計算時將個位數加法或減法的結果算錯；計算程序錯誤包括借位時忽略需要在借位的位值減掉 1、一律以大數字減小數字的錯誤、進位時未在下一個位值加 1 等；視覺-空間錯誤包括誤認或誤寫數字、空間位值欄位對位錯誤或數字在空間上的書寫相當擁擠不整齊等；計算題型轉換錯誤是指從一個題型 (如減法) 轉換到另一個題型 (如加法) 有困難，應該轉換到加法計算，但仍進行減法計算。研究結果指出 MLD-only 和 MLD-RD 學生，在多位數計算的錯誤型態上沒有明顯差異，其中數學事實提取錯誤和 MLD 有關，和 RD 無關；RD 學生，不管是否合併 MLD，則會犯較多的視覺-空間錯誤的類型，此現象和研究的預期不一致 (Raghubar, et al., 2009)。

三、數學文字題解題能力的發展

數學文字題的解題能力牽涉到相當複雜的認知能力，根據 Mayer (1985) 的觀點，數學文字題的解題歷程包括四個階段，分別為問題轉譯 (problem translation)、問題整合 (problem integration)、解題計畫 (solution planning) 與解題執行 (solution execution) 等，而且每個歷程底下都牽涉到特定的知識和技巧與之對應。問題轉譯是指解題者發現一些關鍵語句並將它們轉譯成此文字題的內在表徵，此階段牽涉了基本語言和生活經驗的事實知識，透過這些知識在文字題內選出與解題可能有關的數字，此稱為數字選擇技巧；問題整合是指解題者能以符合邏輯的方式，整合前一階段所形成的數個內在表徵或基模，此階段涉及了基模知識，透過基模知識的整合加以判斷算式符號，此稱為決定算式符號的技巧；解題計畫是指解題者能利用策略知識擬定解題方案，此時需要運用選定數字並做出解題步驟及其順序的技巧；解題執行是指解題者能運用算則知識，執行每個步驟所列出算式的計算，此稱為完成計算的技巧 (Mayer, 1985)。此外，數學文字題的難度與複雜度會隨著解題步驟、運算符號及無關訊息的增加而提高 (Powell, 2011)。

Fuchs 與 Fuchs (2002) 將數學文字題利用總字數、總句數、平均每句字數、動詞數、出現的數字大小及個數、解題需要的步驟量 (一步驟到三步驟) 以及是否出現不相關數字等向度，列出三種難度的文字題，分別為算術故事題 (arithmetic story problem)、複雜故事題 (complex story problem) 和真實情境題 (real-world problem solving)。算術故事題只需一步驟解題，只出現 2 個數字，且加法總和或被減數在 9 以下；複雜故事題則需 1-3 步驟解題，出現 2 個數字以上 (但不出現無關數字)，數字大小則包括 1 位數和 2 位數；真實情境題則是 2 步驟以上的解題，出現 3 個數字以上，包括與解題無關的數字，數字為多位數。這三種難度文字題的總字數、總句數和平均每句字數、出現的動詞數等，彼此之間均有顯著差異。研究者利用這三種難度的文字題，以國小四年級 MLD-only、MLD-RD 和一般發展的學童為對象進行研究，結果發現 MLD 學生，不管是否合併 RD，在三種難度的文字題，其列式正確性與計算正確性均顯著低於一般學生的表現，就 MLD 不同亞型的比較而言，在算術故事題方面，MLD-only 和 MLD-RD 學生的列式正確性和計算正確性的表現無顯著差異，但是在複雜故事題和真實情境題方面，MLD-only 學生的列式正確性顯著高於 MLD-RD 學生，至於計算正確性方面則無顯著差異。

Kingsdorf 與 Krawec (2014) 以 Mayer 的模式為基礎，建立了 4 種文字題解題的錯誤類型分析，包括數字選擇錯誤 (number selection error)、運算符號錯誤 (operation error)、缺漏步驟錯誤 (missing step error) 和計算結果錯誤 (computation error) 等，該研究以國中七、八年級的學習障礙 (未進一步細分學習障礙的亞型) 和同齡的一般發展學生為對象進行分析，結果顯示學習障礙學生產生數字選擇錯誤和運算符號錯誤的比例顯著高於一般發展學生，而產生計算結果

錯誤的比例則是邊緣顯著高於一般發展學生 (Kingsdorf & Krawec, 2014)。

基於上述計算能力與文字題解題能力發展的文獻，而且研究 MLD 學生的表現時是分開探討，有些文獻也並未針對 MLD 的亞型進一步討論，因此，研究 MLD 是否合併 RD 之不同亞型在計算能力的差異時，宜整合個位數、多位數計算能力及其相對應的文字題解題能力之向度，進行完整的分析，如此才能對 MLD 不同亞型學生之計算能力有全面性的瞭解。本研究擬蒐集個案在標準化個位數計算、多位數計算及相對應的文字題解題之測驗表現，以及利用答題過程中，學生計算策略的觀察與訪談及錯誤類型分析等質性資料，據以推論其數學事實提取、多位數計算和文字題解題能力的發展，經由上述整合量化與質性資料的分析方式，探討他們在經過小學補救教學後至國中階段，計算能力的表現特徵及彼此之間的差異。據此，本研究針對計算能力提出整體性的分析架構，包括個位數計算能力（含基本和複雜題型）、多位數計算能力（含基本和複雜題型）、及其相對應的文字題解題能力，如圖 1 所示，相關細節於研究方法章節詳述。

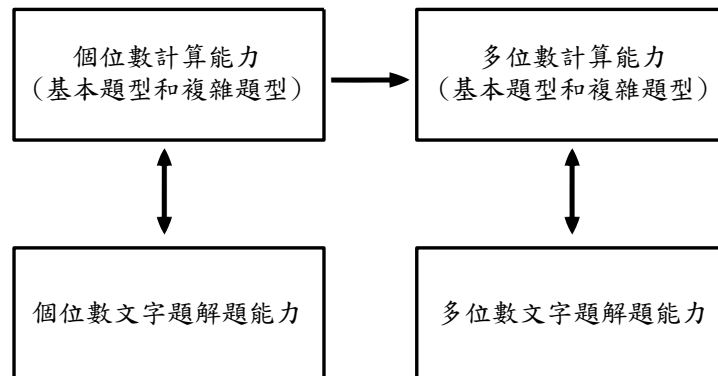


圖 1 本研究之計算能力分析架構圖

參、研究方法

一、研究對象

以國中階段 8 年級或 9 年級已被鑑定為 MLD-only 和 MLD-RD，且於國小階段接受身心障礙資源班數學科小組補救教學迄今，各二位臺北市的學生為研究對象，分別命名為 MLD-only1、MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2。臺北市學習障礙學生的鑑定乃依據身心障礙及資賦優異學生鑑定辦法（教育部，2012），其鑑定基準如下：

- (一) 智力正常或在正常程度以上。
- (二) 個人內在能力有顯著差異。
- (三) 聽覺理解、口語表達、識字、閱讀理解、書寫、數學運算等學習表現有顯著困難，且經確定一般教育所提供之介入，仍難有效改善。

因此進行學習障礙學生的資格鑑定時，除了相關學習困難的質性觀察外，會實施魏氏兒童

智力測驗以釐清智力水準，以及與聽覺理解、口語表達、識字、閱讀理解、書寫、數學運算等學習表現有關的診斷測驗，並以百分等級 15 以下做為是否顯著困難的切截分數。本研究樣本的數學運算能力運用柯華葳（1999）所編製「基礎數學概念評量」之「借位減法」、「空格計算」和「三則計算」，其中三則運算是柯華葳（1999）編製的數學基本概念評量之分測驗之一，該測驗僅設計加、減、乘三種計算，未包括除法，故稱為三則運算。而閱讀能力的標準化測驗則包括「中文年級認字量表」和「國中閱讀推理測驗」，所以兩組個案都是在數學運算能力之標準化測驗低於切截點，但是單純 MLD 在識字和閱讀理解之得分高於切截點，而合併 RD 的則是識字或閱讀理解之得分低於切截點。

為考慮其他能力的影響，本研究二組學生另控制智力（取自魏氏兒童智力測驗第三版的全量表智商）與工作記憶（取自魏氏兒童智力測驗第三版的記憶廣度分測驗之量表分數）的能力變項，如表 3 所示。他們在 MLD 和 RD 診斷測驗的結果如表 4 所示，結果顯示 MLD-only1 和 MLD-only2 在借位減法、空格和三則等計算能力上有顯著困難，MLD-RD1 除了計算能力有顯著困難外，合併有識字和閱讀理解能力的顯著困難，至於 MLD-RD2 除了計算能力有顯著困難外，合併有識字困難，但沒有明顯的閱讀理解困難，因此，MLD-RD1 和 MLD-RD2 所呈現的閱讀障礙亞型是不同的。

表 3

MLD-only和MLD-RD個案在智力與工作記憶能力測驗之得分

個案	MLD-only1	MLD-only2	MLD-RD1	MLD-RD2
認知能力				
智力（魏氏智力測驗第三版之全量表智商）	96	95	88	94
工作記憶（記憶廣度分測驗之量表分數）	7	4	7	4

表 4

MLD-only和MLD-RD個案在數學與語文標準化診斷測驗的成績表現

診斷內容	診斷測驗	診斷標準	MLD-only1	MLD-only2	MLD-RD1	MLD-RD2
數學計算能力	借位減法	正確指標低於切截分數				✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
	未知數空格計算	正確指標低於切截分數			✓	✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
	三則運算	正確指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
語文能力	識字量	得分低於切截分數			✓	✓
	閱讀理解	得分低於切截分數			✓	

註：數學計算能力診斷測驗摘自「基礎數學概念評量表」之後三項分測驗；語文能力診斷分別摘自「中文年級認字量表」及「國中閱讀推理測驗」。

二、研究工具

本研究的個位數和多位數計算又分為基本和複雜題型，利用標準化且計時的「基礎數學概念評量」(柯華葳, 1999)和「基本數學核心能力測驗」(洪儷瑜、連文宏, 2015)作為研究工具，所有的題目均以橫式計算的方式呈現，各分測驗得分可以轉換為「正確指標(答對題數除以做完題數)」和「速度指標(答對題數除以全部題數)」，這兩套測驗均提供常模參照百分等級 15 以下作為有無顯著困難之篩選標準。此外，在個案計算或文字題解題過程中，觀察(必要時進行訪談)其使用的計算策略並分析錯誤類型為何，透過量化的正確指標和速度指標的常模參照及觀察與訪談的質性資料進行整體計算能力發展之分析。底下將計算與文字題解題能力的測量工具及其題型分別進行描述，並整理如表 5 所示：

表 5

不同計算能力之分析架構表

範 題	疇 型	測驗工具	分測驗名稱	例題
個 位 數	基 本	基礎數學 概念評量 表	個位數不進位加法	$1+4$ 、 $5+2$ 、 $3+3$
			個位數進位加法	$7+5$ 、 $8+3$ 、 $7+7$
			個位數不借位減法	$9-2$ 、 $6-3$ 、 $8-5$
			個位數乘法	3×9 、 5×5 、 7×4
計 算	複 雜	基本數學 核心能力 測驗	二位數與二位數不進位加法和不借位減法	$14+33$ 、 $76-54$
			二位數與個位數不進位乘法	13×3 、 24×2
			三位數與二位數不進位加法和不借位減法	$314+33$ 、 $776-54$
多 位 數 計 算	基 本	基礎數學 概念評量 表	二位數減個位數借位減法（十位數為 1）	$10-3$ 、 $12-7$
			二位數減個位數借位減法（十位數為 2）	$20-7$ 、 $24-6$
			二位數減個位數借位減法（十位數為 6）	$65-8$ 、 $63-9$
	複 雜	基本數學 核心能力 測驗	三位數與二位數進位加法 and 借位減法	$329+34$ 、 $743-19$
二位數需進位乘法			54×7 、 54×28	
文 字 題	個 位 數	基礎數學 概念評量 表	應用題	小明有 5 顆糖，小華又給小明 3 顆，請問小明現在有幾顆糖？
			應用題	桌子上有 51 枝筆，16 枝是紅筆，19 枝是藍筆，其他都是黑筆，請問桌子上有幾枝黑筆？

（一）個位數計算能力

利用「基礎數學概念評量」的個位數不進位加法、個位數進位加法、個位數不借位減法和個位數乘法等四個分測驗，以及「基本數學核心能力測驗」的二位數與二位數不進位加法和不借位減法、二位數與個位數不進位乘法、三位數與二位數不進位加法和不借位減法等三個分測驗，共計七個分測驗進行施測與計算策略分析。「基礎數學概念評量」的四個分測驗稱為『基本題型的個位數計算』；「基本數學核心能力測驗」的三個分測驗則稱為『複雜題型的個位數計算』，雖是多位數所組成的加法、減法和乘法，然而計算過程不涉及進位或借位，因此在計算上，每個位值可以分開計算，仍是測量個位數的計算能力。

(二) 多位數計算能力

利用「基礎數學概念評量」的十位數分別為 1、2 和 6 減個位數之借位減法等三個分測驗，以及「基本數學核心能力測驗」的三位數與二位數進位加法與借位減法、二位數乘個位數和二位數乘二位數之進位乘法等二個分測驗，共計五個分測驗進行施測與計算策略或錯誤類型分析。「基礎數學概念評量」的三個分測驗稱為『基本題型的多位數計算』，因為這是多位數借位減法最基本的形式，借位後，十位數僅需減掉 1 即可；「基本數學核心能力測驗」的二個分測驗則稱為『複雜題型的多位數計算』，在執行進位或借位程序後，數字位值的空間欄位對位須正確，且每個位值須再進行計算，可以說是多步驟的複雜計算程序。

(三) 文字題解題能力

利用「基礎數學概念評量」的文字題以及「基本數學核心能力測驗」的文字題，共計二個測驗做為評量工具並分析其計算策略與錯誤類型。「基礎數學概念評量」的文字題稱為『個位數題型的文字題』，因為題目中只出現二個個位數且只需一步驟解題，因此符合 Fuchs 與 Fuchs(2002)所指稱的『算術故事題』；「基本數學核心能力測驗」的文字題稱為『多位數題型的文字題』，因為題目中出現二至三個數字（不出現無關數字），所使用的數字均為二位數，而且需 1-2 步驟解題，符合 Fuchs 與 Fuchs 所指稱的『複雜故事題』。

三、分析方法

(一) 量化分析

本研究利用計時的標準化測驗可以獲得正確指標和速度指標兩個數據，依序進行以下的分析：(1) 個案的正確指標和速度指標是否低於常模百分等級 15 以下的顯著困難標準；(2) 個案的計算或解題速度是否緩慢之分析，可以分為二個程度，如果「速度指標低於正確指標」，表示個案在時限內未能完成全部的題目，據以推論其計算或解題速度緩慢，若速度指標進一步低於常模百分等級 15 以下，表示該個案的計算或解題速度有顯著困難；(3) 由於樣本數僅四人，無法進行組間的統計考驗，僅能根據組內二人在速度或正確指標所構成的數值區間，和另外一組的組內二人之數值區間是否有所重疊，來進行初步的可能差異趨勢之比較，亦即 MLD 不同亞型的兩組在這兩種指標的數值區間未重疊，表示兩組在計算/解題正確性或速度可能呈現有所差異之趨勢。

(二) 質性分析

本研究針對個案在個位數計算、多位數計算及文字題解題過程中，進行其計算策略與錯誤類型分析，分別描述如下：

1.個位數計算策略分析

以 Hopkins 與 Lawson(2002)所提出數學事實自動化提取能力之發展階段,包括「全部數」、「數上去(再細分為 count-from-first 和 min-counting 策略)」、「分解與重組」及「自動化提取」作為觀察指標,個案在計算時沒有明顯的停頓且直接把答案寫出來,則視為使用自動化提取策略,如果在計算過程中有停頓且明顯使用可觀察之手指或口語數數,則進一步分析是使用全部數或數上去策略;如果在計算過程中有停頓,但沒有明顯數數行為,則在分測驗結束後,針對這些題目進行訪談,詢問個案:「我剛剛看到你在算這一題時有停了一下,請告訴我這一題你是怎麼算的?」依據個案的回答進行計算策略的分析,等個案回答後,再進一步追問:「有哪幾題也是這樣算的?」,藉以評估計算過程中,使用全部數策略、數上去策略之 count-from-first 或 min-counting 程序,以及拆解與重組或數學事實提取等策略之使用情形。

2.多位數計算策略與錯誤類型分析

計算策略的分析方式如前項所述,錯誤類型分析則依據 Raghubar 等人(2009)所提出的「數學事實提取錯誤」、「計算程序錯誤」、「視覺-空間錯誤」和「計算題型轉換錯誤」等四項類型作為觀察指標。

3.文字題解題計算策略與錯誤類型分析

計算策略的分析方式如前項所述,錯誤類型分析則依據 Kingsdorf 與 Krawec (2014)所提出的「數字選擇錯誤」、「運算符號錯誤」、「缺漏步驟錯誤」和「計算結果錯誤」等四項類型作為觀察指標。

肆、結果與討論

一、個位數計算能力方面

正確與速度指標整理如圖 2,重要結果整理如表 6 所示。

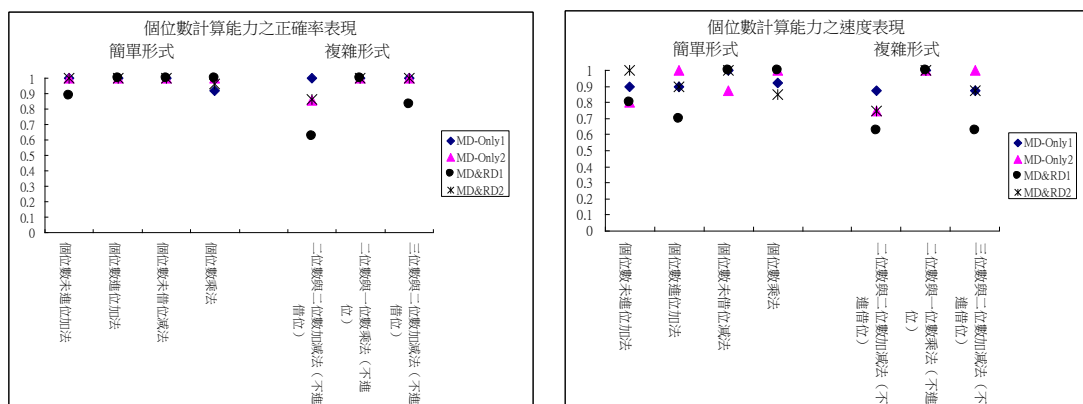


圖 2 四位個案在個位數計算能力之正確和速度指標表現

表 6

MLD-only和MLD-RD組在個位數計算能力之表現特徵及其差異

範疇	分析項目	正確與速度指標差異 ^{註一}	組間表現差異 ^{註二}	
個 位 數 計 算	加 法	基本 正確指標	無	
		題型 速度指標	無	
	與 減 法	複雜 正確指標	速度指標低於正確指標	MLD-only > MLD-RD
		題型 速度指標	速度指標低於正確指標	MLD-only > MLD-RD
	法	計算策略	MLD-only 組使用數上去 min-counting 程序 MLD-RD 組使用數上去 count-from-first 程序	
	乘 法	基本 正確指標	無	無
題型 速度指標		無	無	
複雜 正確指標		無	無	
題型 速度指標		無	無	
	計算策略	MLD-only 組使用乘法事實提取策略 MLD-RD 組部分 5 以上的乘法使用從中間背誦九九乘法表的策略		

註一：「速度指標低於正確指標」表示時限內未能完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「>」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

(一) 基本題型的個位數不進位加法與不借位減法

四位個案的正確指標在.90 至 1 之間，而速度指標則在.83 至.97 之間，兩組的指標區間有所重疊，推論 MLD-only 和 MLD-RD 二組個案在這些題目的計算正確性和計算速度沒有明顯的差異。然而，四位個案均出現速度指標低於正確指標（在時限內未能完成所有的題目），因此有計算速度緩慢的情形。觀察及訪談其計算策略運用顯示，四位個案都會使用手指、口語或敲手指輔助等不成熟的數數策略進行計算。進一步依據 Hopkins 與 Lawson 的觀點分析發現，兩位 MLD-only 組個案均已發展至「數上去的 min-counting 程序」，亦即以大的數字為基礎去數小的數字，而兩位 MLD-RD 組個案則仍處於「數上去的 count-from-first 程序」之發展階段，以第一個數字為基礎去數第二個數字，因此，MLD-only 組比 MLD-RD 組的學生在數數策略的發展較為成熟。

(二) 複雜題型的個位數不進位加法與不借位減法

四位個案在進行這些題目的計算時，MLD-only1 和 MLD-only2 的正確指標分別為 1 和.93，MLD-RD1 和 MLD-RD2 分別為.71 和.93，兩組正確指標的區間未重疊，顯示 MLD-only 組比 MLD-RD 組在正確率表現上呈現比較好之趨勢。速度指標方面，MLD-only1 和 MLD-only2 均

為.88，MLD-RD1 和 MLD-RD2 則分別為.63 和.81，速度指標的區間未重疊，顯示 MLD-only 組比 MLD-RD 組在速度表現上有比較好之趨勢。此外，四位個案的速度指標均低於正確指標，因此在這些題目的計算速度緩慢。觀察及訪談其計算策略顯示，四位個案在計算時均使用數數策略，其中 MLD-only 組個案已發展至「數上去的 min-counting 程序」，而 MLD-RD 組個案僅發展至「數上去的 count-from-first 程序」。

為進一步分析學生進行「個位數的加法和減法」與「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度是否有差異，在大數字的「答對題數」與「全部題數」依個位數型式進行計分調整，如「 $14+33=$ 」計分時視為「 $1+3$ 」和「 $4+3$ 」兩題並分開計算其答對題數，如果學生寫出答案為 47，則為答對 2 題，如果學生寫出答案為 46，則為答對 1 題；又如「 $69-16=$ 」亦視為「 $6-1$ 」和「 $9-6$ 」兩題，答對題數亦分開計算。結果發現，MLD-only1 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.96，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.875；MLD-only2 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.90，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.85；MLD-RD1 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.92，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.69；MLD-RD2 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.97，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.84。因此，四位個案在複雜題型，比起基本題型而言，其速度指標有下降趨勢，其中 MLD-RD 組更為明顯，速度指標從.92 和.97 分別下降至.69 和.84。雖然兩種題型都是測量不進位加法和不借位減法的數學事實提取能力，但是四位個案遇到大數字的複雜題型時，數數策略的使用頻率均明顯地增加，導致他們在計算速度比基本題型更為緩慢。

（三）基本與複雜題型的個位數乘法

四位個案在時限內均能完成所有的題目，正確指標和速度指標在.92 至 1 之間，二組之間沒有明顯的差異。觀察及訪談其計算策略運用顯示，MLD-only 組個案均以乘法事實直接提取的方式作答，但是 MLD-RD 組個案在部分「乘數」大於 5 的題目有停頓現象，伴隨口語默唸的行為，進一步訪談發現他們在這些題目運用了從中間背誦九九乘法表的方式來作答，如「 $9\times 7=$ 」的題目，會默唸「9、5、45」、「9、6、54」、「9、7、63」，然後寫出答案是 63。

上述個位數計算研究結果指出，MLD 學生，不管是否合併 RD，經過小學階段身心障礙資源班數學科小組補救教學迄今，到了國中階段依然存在加法和減法事實提取困難之特徵，此特徵不僅只是發展遲緩的問題，而可能是 MLD 的核心缺陷。然而，乘法事實提取困難的特徵到了國中階段則不明顯，可能已經跟上一般同儕的水準，因此，MLD 學生的乘法事實提取困難可能是發展上的遲緩而非核心缺陷，文獻指出乘法事實可以經由背誦乘法表的方式進入長期記憶系統，而且乘法表本身是以一串口語文字來進行心理表徵（Dehaene, 1997; Dehaene & Cohen, 1995,

1997), 既然乘法事實可以透過乘法表的口語文字表徵來進行記憶的儲存與提取, 較不涉及數字數量的表徵形式, 因此, MLD-only 學生經過補救教學後, 乘法事實的自動化提取能力可以跟上一般同儕的水準是可以預期的。就個位數加法和減法的計算能力而言, 不管是基本題型或複雜題型, 四位個案均顯示計算速度緩慢的情形。兩組的差異分析顯示, MLD-only 組在大數字不進位和不借位的複雜題型, 其正確率和計算速度的表現均優於 MLD-RD 組, 而兩組在基本題型的計算則無明顯差異。

上述兩組在基本題型的個位數計算能力之差異分析, 和過去的研究結果並不完全一致, 文獻指出國小 MLD-only 比 MLD-RD 學童在正確率表現上較好, 但是速度表現則彼此沒有差異 (Barnes et al., 2006; Geary, Hamson, & Hoard, 2000; Jordan & Montani, 1997), 造成研究結果差異的原因可能是國小 MLD-only 和 MLD-RD 學童, 經過補救教學後, 彼此在個位數加法和減法計算的正確率上已趨於一致。

本研究新的發現在於, 當兩組學生面對大數字但未涉及進位或借位的複雜題型時, 正確率和速度表現都有下降, 其中速度表現下降的趨勢更為明顯, 造成兩組學生計算速度表現下降且組間差異更為明顯的原因, 可能是當他們面對大數字時, 相較於基本題型的個位數數字, 呈現較高的計算焦慮或負擔, 因此依賴不成熟的數數策略之頻率大幅提高, 加上 MLD-only 學生已發展且穩定使用較有效率的 min-counting 程序, 而 MLD-RD 學生則仍停留在 counting-from-first 程序, 此一數數發展上的差異讓兩組之間的速度表現差異更為明顯。兩組學生在數數策略發展上的差異, 和 Geary、Hoard 與 Hamson (1999) 與 Geary 等人 (2000) 的研究結果一致。

二、多位數計算能力方面

正確與速度指標的測驗結果整理如圖 3, 重要結果則整理如表 7 所示。

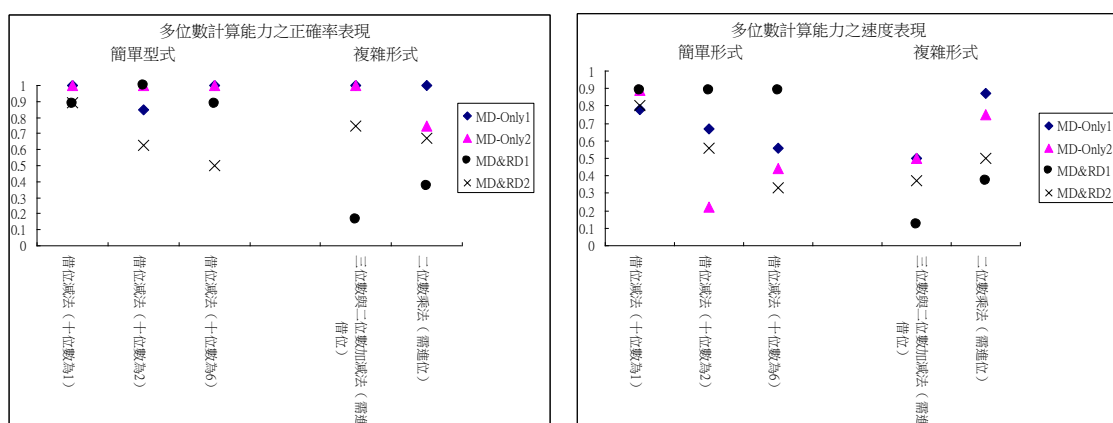


圖 3 四位個案在多位數計算之正確和速度指標表現

表 7

MLD-only和MLD-RD組在多位數計算能力之表現特徵及其差異

範疇	分析項目	正確與速度指標差異 ^{註一}	組間表現差異 ^{註二}
	基本 題型	正確指標 速度指標	無 無
	加 法 與 減 法	複雜 題型 速度指標	MLD-only > MLD-RD MLD-only > MLD-RD
多 位 數 計 算	計算策略	兩組個案均無法使用加法和減法事實提取策略進行計算，使用數數策略，搭配心算進位或借位之計算程序進行解題，其它僵化的計算程序、受大數字影響及無法利用數學概念穩定執行計算程序等，則有個別差異，不受是否合併 RD 的影響。	
		複雜 題型 速度指標	MLD-only > MLD-RD MLD-only > MLD-RD
乘 法	計算策略	兩組個案會使用乘法事實提取策略進行乘法計算，乘法後的進位加法則使用數數策略，轉直式計算時的數字空間對位沒有問題。兩組個案的計算程序雖無明顯差異，但兩組在正確率和計算速度有差異。	

註一：「速度指標低於正確指標」表示時限內未能完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「>」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

(一) 基本題型的二位數減個位數之借位減法計算

四位個案在進行這些題目（如 $10-3$ 、 $20-7$ 、 $65-8$ 、...）的計算時，正確指標在.67-1 之間，速度指標在.52-.89 之間，兩組的正確和速度指標區間有所重疊，推論組間沒有明顯差異。然而四位個案均出現速度指標低於正確指標的情形，顯示計算速度緩慢。觀察與訪談四位個案的計算策略顯示，幾乎所有的題目都使用數數策略進行作答，然而在細部的計算執程序上呈現個別差異，以 $23-8$ 為例，將個案的訪談與觀察記錄整理如下：

1. MLD-only1

直接以手指比 10 作為借位的表徵，倒數扣掉 8，再用手指數數加 3 得到個位數為 5，然後心裡加 10 作為十位數的數值，最後得到答案為 15；至於十位數為 6 的題目，則全部用筆轉成直式，再用手指數數進行直式計算程序，沒有辦法用上述以手指比 10 搭配心算的借位程序進行作答，導致計算速度下降。個案寫完的題目只錯 1 題，錯誤類型為「數學事實提取錯誤」，個案轉直式計算的題目，並未出現「視覺-空間錯誤」。

2. MLD-only2

會在心裡先將 $23 - 8$ 想成 $13 - 8 + 10$ ，然後用手指數數來執行 $10 - 8 + 3$ 得到 5 的借位程序，最後再加 10 得到答案為 15；至於十位數為 6 的題目，也是利用相同的策略進行解題。個案做完的題目全部都算對，沒有錯誤可供分析。

3. MLD-RD1

發現題目的十位數只要減掉 1 就可以，因此他先將題目的答案欄位先寫下十位數為 1，然後專心地用手指數數來執行 $10 - 8 + 3$ 得到 5 的借位程序；十位數為 6 的題目也是用相同的程序，先將答案的十位數為 5 寫下來，再進行手指借位的計算。個案做完的題目總共錯了 2 題，錯誤類型都是屬於「數學事實提取錯誤」。

4. MLD-RD2

利用某種捷思 (heuristic) 的程序進行計算，表示會在心裡想 $8 - 3$ ，搭配手指數數算出 5，然後在心裡想 $20 - 5$ ，用倒數的數數策略，最後得到答案為 15。此程序之所以被視為捷思是因為，透過這個程序可以將「被減數」化簡為整十的數字，將「被減數 23」減去 3 剩下「被減數為 20」的整數，同時「減數 8」也要相對應地減去 3 得到「減數為 5」，最後再以「 $20 - 5$ 」的簡化式子得到答案為 15，然而 MLD-RD2 可能不了解這個捷思程序背後的數學概念，只是將此程序背下來且不穩定地執行此計算程序，因此正確率 (正確指標為 .67) 比起其他三位個案都低，此現象驗證了數學概念和計算程序執行之間是有交互影響的觀點 (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001)。個案做完的題目總共錯了 7 題，因為不穩定使用捷思法則，錯誤類型都是屬於「數學事實提取錯誤」。

另外值得注意的現象是，除了 MLD-RD1 之外，其餘三位個案隨著十位數數字增加 (從 1 到 6)，其速度表現越來越差，表示他們在計算時，雖然都是「二位數減個位數」的借位題型，其中被減數的十位數只要減掉 1 即可，但他們無法判斷出這樣的規則，不同的題目用不同的計算程序，或者一種題型只能僵化地使用一種計算程序，而且數字越大所造成的計算焦慮或負擔就越大，導致十位數的數值越大，計算速度就會越緩慢。

整體而言，MLD 學生，不管是否合併 RD，在進行簡單題型的借位減法時，無法使用「十位數為 1 的二位數減個位數的借位減法事實直接提取」策略，並搭配心算的借位程序來進行計算，錯誤類型分析顯示四位個案都是屬於「數學事實提取錯誤」，因此，「借位減法事實提取困難」是共同的核心缺陷，其它僵化的計算程序、受大數字影響及無法利用數學概念穩定執行捷思程序等計算策略特徵，則視個別差異而定。

(二) 複雜題型的多位數進位加法與借位減法

前四題為進位加法，後四題為借位減法，由於是計時測驗的關係，四位個案在完成了前四題的多位數進位加法後均已達時限，沒有完成後面四題的借位減法，因此無法評估複雜題型的借位減法之表現。MLD-only 組的個案在多位數進位加法未顯示正確率的問題（二者正確指標均為 1），但是 MLD-RD 組的個案則有正確率的問題（MLD-RD1 為.17，MLD-RD2 為.75）。四位個案的速度指標都低於正確指標，顯示計算速度緩慢，其中 MLD-only1 和 MLD-only2 的速度指標均為.50，MLD-RD1 和 MLD-RD2 則分別為.125 和.375，MLD-only 組的速度表現有高於 MLD-RD 組之趨勢。觀察其策略運用顯示，四位個案均運用數數策略進行解題，即使如此，MLD-RD 組的個案在答題的正確性上較容易出現錯誤，速度也較為緩慢，進一步分析 MLD-RD 組個案的錯誤類型顯示，都是屬於「數學事實提取錯誤」。

(三) 複雜題型的多位數乘法

複雜題型的多位數乘法計算，前四題為二位數乘以一位數（如 54×7 ），後四題為二位數乘以二位數（如 54×28 ），MLD-only1 的正確指標為 1，MLD-only2 為.75，MLD-RD1 為.375，MLD-RD2 為.67，指標區間未重疊，MLD-only 組的正確率有高於 MLD-RD 組的趨勢。四位個案均出現速度指標低於正確指標的情形，顯示計算速度緩慢，其中 MLD-only1 的速度指標為.875，MLD-only2 為.75，MLD-RD1 為.375，MLD-RD2 為.5，推論 MLD-only 組的計算速度有高於 MLD-RD 組的趨勢。觀察其策略運用顯示，四位個案在二位數乘以一位數時，會以直接提取的方式進行乘法計算，然後運用手指數數、口語數數等方式進行乘法後之進位加法計算，到了二位數乘以二位數時，除了 MLD-RD1 以亂猜的方式直接寫出答案外，其餘三位個案均先將題目轉成直式，再以直接提取的方式進行乘法計算，最後以數數策略進行乘法後的進位加法計算。MLD-only1 做完的題目全數答對，未進行錯誤分析，MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2 的錯誤類型則均是屬於「數學事實提取錯誤」。MLD-only1、MLD-only2 和 MLD-RD2 在轉直式計算後，並未出現空間欄位對位錯誤的「視覺-空間錯誤」，茲將三位個案的直式計算樣本整理如圖 4。

整體而言，進行複雜題型的多位數加、減和乘法計算時，MLD-only 和 MLD-RD 學生均顯示計算速度緩慢的困難，MLD-only 學生的正確率不受影響，但 MLD 合併 RD 的學生，除了計算速度比單純 MLD 學生更加嚴重外，也會進一步影響其計算的正確性，尤其當遇到大數字的進、借位計算時，其計算正確性則更受影響，表現也比 MLD-only 學生更為嚴重，錯誤類型主要是「數學事實提取錯誤」。

MLD-only1	MLD-only2	MLD-RD2
$28 \times 3 = \underline{\quad 84 \quad}$ $54 \times 28 = \underline{\quad 1512 \quad}$ $29 \times 94 = \underline{\quad 2726 \quad}$ $35 \times 81 = \underline{\quad 2835 \quad}$ $28 \times 64 = \underline{\quad \quad \quad}$	$54 \times 28 = \underline{\quad 1512 \quad}$ $29 \times 94 = \underline{\quad 2726 \quad}$ $35 \times 81 = \underline{\quad 2835 \quad}$ $28 \times 64 = \underline{\quad 1792 \quad}$	$54 \times 28 = \underline{\quad 1512 \quad}$ $29 \times 94 = \underline{\quad 2034 \quad}$ $35 \times 81 = \underline{\quad \quad \quad}$ $28 \times 64 = \underline{\quad \quad \quad}$

圖 4 MLD-only1、MLD-only2 和 MLD-RD2 等三位個案轉直式計算的樣本

三、文字題解題能力方面

正確與速度指標的測驗結果整理如圖 5，重要結果則整理如表 8 所示。

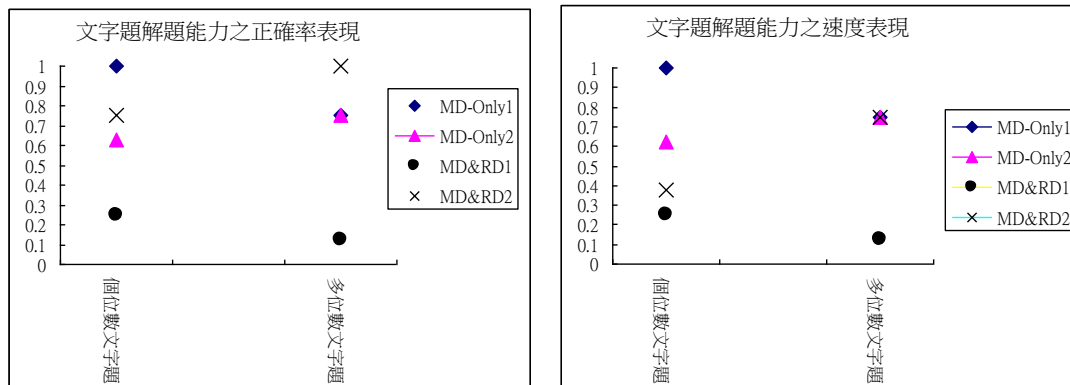


圖 5 四位個案在文字題解題能力之正確率和速度表現結果

表 8

MLD-only和MLD-RD組在文字題解題能力之表現特徵及其差異

範疇	分析項目	正確與速度指標差異 ^{註一}	組間表現差異 ^{註二}
文字題 解題	個位數	正確指標	無
	題型	速度指標	MLD-only 組之速度指標等於 正確指標；MLD-RD 組之速度 指標低於正確指標
	多位數	正確指標	無
	題型	速度指標	MLD-only > MLD-RD
計算策略		四位個案在列出算式後，仍會使用數數策略進行計算，主要的錯誤類型是依據題意錯誤判斷加法或減法。	

註一：「速度指標等於正確指標」表示時限內完成所有的題目，無計算緩慢的問題；「速度指標低於正確指標」表示時限內未完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「>」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

(一) 個位數題型

本研究的個位數題型符合 Fuchs 與 Fuchs (2002) 所指稱的一步驟個位數的「算術故事題」, MLD-only1 的正確指標為 1、MLD-only2 為 .625、MLD-RD1 為 .25 (低於常模百分等級 15 以下)、MLD-RD2 為 .75, 二組之間的指標區間有所重疊, 因此沒有明顯的差異存在, 但 MLD-RD1 有顯著的解題正確性之困難。速度表現方面, MLD-only1 和 MLD-only2 的速度指標分別為 1 和 .625, 與正確指標相同, 表示在時限內完成所有的題目, 沒有明顯的文字題解題速度問題; MLD-RD1 的速度指標為 .25, 而 MLD-RD2 的速度指標為 .375, 均低於常模的百分等級 15 以下, 因此 MLD-RD 組的個案有顯著的文字題解題速度緩慢問題。觀察其解題策略時發現, 四位個案在列出算式之後仍會使用數數策略進行計算。依據 Kingsdorf 與 Krawec (2014) 所提出的「數字選擇錯誤」、「運算符號錯誤」、「缺漏步驟錯誤」和「計算結果錯誤」等四項錯誤類型分析發現, MLD-only1 全部答對, 無錯誤類型, 然 MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2 都出現依據題意錯誤判斷加法或減法的「運算符號錯誤」, 而 MLD-RD1 則進一步會出現 $4-9=5$ 的「數字選擇錯誤」。

(二) 多位數題型

本研究的多位數題型符合 Fuchs 與 Fuchs (2002) 所指稱的二至三步驟多位數的「複雜故事題」, MLD-only1 的正確指標為 .75、MLD-only2 為 .875、MLD-RD1 為 .125 (低於常模切截分數)、MLD-RD2 為 1, 二組之間沒有明顯的差異存在, 但 MLD-RD1 有顯著的解題正確性之困難。速度表現方面, MLD-only1 的速度指標為 .75、MLD-only2 為 .875, 在時限內完成所有的題目, 因此沒有明顯的解題速度問題; MLD-RD1 的速度指標為 .125, 低於常模百分等級 15 以下, 而 MLD-RD2 的速度指標為 .625, 低於正確指標, 在時限內未完成所有的題目, 因此二者均有解題速度緩慢的問題。觀察其策略運用顯示, 四位個案在列出算式後, 仍會使用數數策略進行計算。錯誤分析發現, 主要的錯誤類型是依據題意錯誤判斷加法或減法的「運算符號錯誤」, 其中 MLD-RD1 最為嚴重, 8 題中錯誤判斷 7 題, MLD-only1 和 MLD-only2 則是錯誤判斷 2 題以內, 兩組均未出現其他的錯誤類型。

文獻指出小學階段的 MLD-only 和 MLD-RD 學生在文字題的解題上都會面臨挑戰, 而 MLD-RD 學生在正確率表現比 MLD-only 學生更差 (Fuchs, & Fuchs, 2002; Hanich, et al., 2001; Jordan & Hanich, 2000), 但是在有時間限制的情境下, 兩組學生的正確率表現沒有差異 (Jordan & Montani, 1997)。本研究是在有時限的條件下來進行文字題解題能力的分析, 結果指出, 經過補救教學進到國中階段之 MLD-only 和 MLD-RD 學生, 在個位數或多位數文字題解題的正確率方面仍會面臨挑戰, 但兩組之間沒有明顯的差異, 和文獻結果一致, 但其中在語文方面有識字和閱讀理解困難之 MLD-RD1, 其文字題解題能力有顯著困難。至於解題速度的表現, 不管是個位數或多位數題型, MLD-only 學生均優於 MLD-RD 學生, MLD-only 學生在時限內能完成所有的

文字題，沒有解題速度的問題，而 MLD-RD 學生則無法完成所有的題目，有明顯解題速度的問題。策略觀察顯示兩組學生在列出算式後，均會以數數策略進行計算，而且四位個案在解文字題中有三個數字的題型時，均採二階段列式的方式進行解題，無法完整地進行一次列式並進行解題，錯誤類型主要都是「運算符號錯誤」，MLD-only 組學生在兩種文字題題型共解 32 題，其中 6 題出現此錯誤，犯「運算符號錯誤」的比例為 18.75%，MLD-RD 組學生共解 24 題，其中 17 題出現此錯誤，犯「運算符號錯誤」的比例為 70.83%。據此推論，雖然 MLD-only 學生仍然會在「運算符號錯誤」有所掙扎，但 MLD 學生合併 RD 後，犯此錯誤類型的比例明顯增加，因此文字題解題出現「運算符號錯誤」可能和 RD 的關係較為明顯，文字題解題能力似乎不是 MLD 的核心缺陷。進一步分析 MLD 學生合併 RD 後，除主要影響其解題速度的表現外，如果 RD 除了識字困難，也包括閱讀理解的困難，如 MLD-RD1 學生，則會進一步影響其解題的正確性，因此 MLD-RD1 和 MLD-RD2 在文字題解題能力上所呈現的正確率差異，可能在於 RD 亞型之不同。

伍、結論與建議

本研究因樣本數受限，量化資料難以區辨差異，只能初步形成組間差異的趨勢，然就質性資料而言，依據文獻探討，針對「個位數計算策略」、「多位數計算策略與錯誤類型」及「文字題解題計算策略與錯誤類型」等向度進行分析，整合量化與質性資料分析後，分別可以看到 MLD 學生在「個位數計算能力」、「多位數計算能力」出現數學事實提取的困難，其計算發展較一般學生落後，但是 MLD-RD 學生在計算發展上又顯得更差。文字題解題方面，因本研究所使用的工具已經控制文字難度，MLD 學生雖然計算速度緩慢，但 MLD-only 學生在文字題的解題速度並不受影響，而且其解題速度與正確性也優於有閱讀困難的 MLD-RD 學生，以下就這些結果進行深入的討論並提出建議。

本研究指出「加法和減法數學事實自動化提取的困難」是 MLD 學生的核心能力缺陷，而非只是能力發展上的遲緩而已，因為這些學生在經過了小學階段的補救教學迄今，到了國中階段仍存在加法和減法事實提取困難的特徵，此特徵主要是反映在計算速度的緩慢，而非計算的正確性。因為本研究的 MLD-only 和 MLD-RD 學生，亦即 MLD 不管是否合併 RD，均呈現加法和減法事實提取困難的特徵，此研究結果似乎和 Robinson、Menchetti 與 Torgesen (2002) 所指出，數學事實直接提取困難的缺陷和語意或聲韻處理的困難有關之看法不一致。

個位數的計算策略有一定的發展階段，是從數數策略進展到數學事實提取，而數數策略本身又有其發展階段 (Hopkins & Lawson, 2002)，不同階段的策略發展會影響計算速度，但不影響計算正確性，因為這些不同的策略都有助於將答案正確地算出來，研究指出國小一、二年級的

MLD 幼童比正常的同儕在數數時犯錯的機率高 (Bull & Johnston, 1997; Geary, 1990; Geary, Widaman, Little, & Cormier, 1987; Jordan & Hanich, 2000)，原因可能在於 MLD 孩童對數數原則的概念不了解所致 (Geary, et al., 2000)，但是這種和正常的同儕所產生的數數犯錯機率之差異，到了國小二年級結束時就消失了 (Geary, et al., 2000)。

一般成就水準的學童到了國小二年級結束時，數學事實提取就成為他們主要的計算策略，但是 MLD 學生到了國小六年級，甚至國中七年級，數學事實的提取仍未成為他們主要的策略，而且持續運用與不斷練習 min-counting 程序，也無助於強化 MLD 學生能以記憶的方式直接提取數學事實做為他們主要的策略 (Goldman, Pellegrino, & Mertz, 1988; Ostad, 1997)，本研究支持上述文獻的結果與觀點，經過國小的補救教學持續至國中階段的 MLD-only 和 MLD-RD 學生，在個位數加法和減法的計算上，依然未採取最有效率的數學事實提取策略來進行計算，仍相當程度地依賴數數策略，並將個案的年級延伸至九年級的 MLD 國中生。MLD-only 和 MLD-RD 學生的個位數加法和減法的正確率高，但主要使用數數策略進行計算，導致計算速度緩慢。此外，兩組學生的數數策略發展呈現了 min-counting 和 count-from-first 程序的差異，由於 min-counting 程序可以說是數數策略的最高發展階段，因此讓 MLD-RD 學生從 count-from-first 進展到 min-counting 程序是教學上重要的課題。

本研究利用大數字，以二位數或三位數的加法和減法，但未涉及進、借位的複雜題型進一步探討數學事實提取能力，在控制大數字的「答對題數」與「全部題數」依個位數型式進行調整計分後發現，兩組學生的計算速度均有下降趨勢，而且 MLD-RD 學生比 MLD-only 學生的計算速度緩慢問題更顯嚴重，原因之一可能在於兩組學生遇到大數字時，導致計算負擔加重而在心理上產生焦慮感，因此觀察到回到使用較熟悉且有把握的數數策略之頻率相對提高，加上兩組學生在數數策略的發展階段之不同，MLD-RD 學生使用 count-from-first 的數上去策略，一定比 MLD-only 學生之 min-counting 的數上去策略，在計算速度上更為緩慢。然而，這種大數字複雜題型的正確率也產生組間差異，為何 MLD 學生合併 RD 後，在二位數以上的大數字但未涉及進、借位的計算，其正確率會下降，仍需進一步研究加以探討。

到目前為止，探討 MLD-only 和 MLD-RD 兩組學生在多位數計算和文字題解題能力差異之研究仍是相當有限，本研究指出單純 MLD 學生到了國中階段，他們在多位數計算能力的主要困難是在計算速度的緩慢，並不影響其計算正確性，而且越複雜或大數字的題型，計算速度就越緩慢，在合併 RD 後，除了會加重他們在計算速度問題之嚴重性，也會影響其計算正確性，錯誤類型主要是「數學事實提取錯誤」。觀察與訪談兩組學生在多位數計算策略運用的情形時發現，核心缺陷仍是在數學事實自動化提取的困難，兩組之間計算策略的運用沒有明顯的差異，因此造成此種組間正確率差異的原因，須進一步地研究加以釐清。

文字題解題能力方面，本研究指出在國中階段核心缺陷仍為加法和減法事實自動化提取困難之 MLD-only 學生，在解題速度方面不受影響，至於正確性方面則偶而會出現「運算符號錯誤」；MLD 合併 RD 後，解題速度明顯下降，至於正確率是否受到影響可能視 RD 亞型而定，「識字兼閱讀理解困難」亞型的 RD 學生會進一步影響其解題正確率，錯誤類型主要也是「運算符號錯誤」，因此文字題解題能力可能不是 MLD 的核心缺陷，建議在 MLD 的鑑定實務上可予以排除，僅作為判斷可能合併 RD 之參考。到目前為止，文獻上在探討 MLD 是否合併 RD 的研究時，尚未進一步將 RD 做更細部的亞型區分，本研究以 MLD 合併不同的 RD 亞型（亦即「識字困難」亞型與「識字兼閱讀理解困難」亞型）的方式進行分析時，發現他們在文字題解題的正確性、速度與錯誤型態上可能有所差異，此議題亦值得進一步地探討。

最後，本研究最大的限制在於個案研究的樣本數問題，這些研究結果是建立在四位個案所進行的標準化測驗量化分析與深入的觀察與訪談資料之質性分析與比較所獲得，因此只能得到初步的計算能力特徵與差異的可能趨勢，上述研究結果有待進一步地增加大樣本數的實徵研究加以驗證。

誌謝

本文承科技部專案補助（專案編號 NSC 98-2511-S-003-010-M），特此致謝。

參考文獻

- 林秀柔（1989）。國小數學學習障礙兒童鑑定方式之研究（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學，彰化市。【Lin, Xiu-Rou (1989). *The study of identification method of mathematics learning-disabled elementary students*. (Unpublished master's thesis). National Changhua University of Education, Changhua. (in Chinese)】
- 柯華葳（1999）。基礎數學概念評量—四、五、六年級題本。臺北：行政院國家科學委員會。【Ko, Hwa-Wei (1999). *The basic arithmetic skill test—Grade 4 to 6 version*. Taipei: National Science Council. (in Chinese)】
- 柯華葳（2005）。數學學習障礙學生診斷與確認。特殊教育研究學刊，29，113-126。doi: 10.6172/BSE200509.2901006 【Ko, Hwa-Wei (2015). The diagnosis of arithmetic learning disabilities. *Bulletin of Special Education*, 29, 113-126. doi: 10.6172/BSE200509.2901006 (in Chinese)】
- 洪麗瑜、連文宏（2015）。基本數學核心能力測驗。臺北：中國行為科學社。【Hung, Li-Yu, & Lien, Wen-Hung (2015). *The basic arithmetic core competency test*. Taipei: Chinese Behavioral Science Corporation. (in Chinese)】
- 教育部（2012）。身心障礙暨資賦優異鑑定辦法。臺北：作者。【Taiwan Ministry of Education (2012). *The identification method of students with physical and mental disabilities or giftedness*. Taipei: Author. (in Chinese)】

- 蕭金土 (1995)。國小數學學習障礙學生的鑑定、學習問題診斷及學習策略教學效果之研究 (未出版之博士論文)。國立政治大學, 臺北市。【Hsiao, Chin-Tu (1995). *The study of identification, the diagnosis of learning problems and the effects of learning strategies on mathematics learning-disabled elementary students* (Unpublished Doctoral Thesis). National Chengchi University, Taipei. (in Chinese)】
- American Psychiatric Association. (2004). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (4th ed., text rev.). Washington, DC: American Psychiatric Publishing.
- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). Arlington, VA: American Psychiatric Publishing. doi: 10.1176/appi.books.9780890425596.dsm20
- Ando, M. & Ikeda, H. (1971). Learning multiplication facts—More than a drill. *The Arithmetic Teacher*, 18(6), 366-369.
- Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, 2(3), 213-236. doi: 10.1016/0273-2297(82)90012-0
- Ashcraft, M. H., Fierman, B. A., & Bartolotta, R. (1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review*, 4(2), 157-170. doi: 10.1016/0273-2297(84)90005-4
- Ashlock, R. B. (1971). Teaching the basic facts: Three classes of activities. *The Arithmetic Teacher*, 18(6), 359-364.
- Badian, N. A. (1999). Persistent arithmetic, reading, or arithmetic and reading disability. *Annals of Dyslexia*, 49, 45-70. doi: 10.1007/s11881-999-0019-8
- Barbarese, W. J., Katusic, S. K., Colligan, R. C., Weaver, A. L., & Jacobsen, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-82, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics*, 5(5), 281-289. doi: 10.1367/A04-209R.1
- Barnes, M. A., Wilkinson, M., Khemani, E., Boudesquie, A., Dennis, M., & Fletcher, J. M. (2006). Arithmetic processing in children with spina bifida: Calculation accuracy, strategy use, and fact retrieval fluency. *Journal of Learning Disabilities*, 39(2), 174-187. doi: 10.1177/00222194060390020601
- Bezuk, N. S., & Cegelka, P. T. (1995). Effective mathematics instruction for all students. In P. T. Cegelka & W. H. Berdine (Eds.), *Effective instruction for students with learning difficulties* (pp. 345-384). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.
- Bull, R., & Johnston, R. S. (1997). Children's arithmetical difficulties: Contributions from processing speed, item identification, and short-term memory. *Journal of Experimental Child Psychology*, 65, 1-24. doi: 10.1006/jecp.1996.2358
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3-18. doi: 10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x
- Carnine, D. W., & Stein, M. (1981). Organizational strategies and practice procedures for teaching basic facts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 65-69. doi: 10.2307/748659
- Chiappe, P. (2005). How reading research can inform mathematics difficulties: The search for the core deficit. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 313-317. doi: 10.1177/00222194050380040601

- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition, 1*, 83-120.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex, 33*(2), 219-250. doi: 10.1016/S0010-9452(08)70002-9
- Dirks, E., Spyer, G., van Lieshout, E. C. D. M., & de Sonneville, L. (2008). Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 41*(5), 460-473. doi: 10.1177/0022219408321128
- Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35*(6), 564-574. doi: 10.1177/00222194020350060701
- Fuson, K. C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development, 63*(2), 491-506. doi: 10.2307/1131494
- Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 7*(4), 210-216.
- Garnett, K., & Fleischner, J. E. (1983). Automatization and basic fact performance of normal and learning disabled children. *Learning Disability Quarterly, 6*(2), 223-230. doi: 10.2307/1510801
- Geary, D. C. (1990). A componential analysis of an early learning deficit in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology, 49*(3), 363-383. doi: 10.1016/0022-0965(90)90065-G
- Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in learning disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology, 77*, 236-263. doi: 10.1006/jecp.2000.2561
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 88*, 121-151. doi: 10.1016/j.jecp.2004.03.002
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development, 78*(4), 1343-1359. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x
- Geary, D. C., Hoard, M. K., & Hamson, C. O. (1999). Numerical and arithmetical cognition: Patterns of functions and deficits in children at risk for a mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*(3), 213-239. doi: 10.1006/jecp.1999.2515
- Geary, D. C., & Widaman, K. F. (1992). Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models. *Intelligence, 16*(1), 47-80. doi: 10.1016/0160-2896(92)90025-M
- Geary, D. C., Widaman, K. F., Little, T. D., & Cormier, P. (1987). Cognitive addition: Comparison of learning disabled and academically normal elementary school children. *Cognitive Development, 2*(3), 249-269. doi: 10.1016/S0885-2014(87)90075-X

- Goldman, S. R., Pellegrino, J. W., & Mertz, D. L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instruction*, 5(3), 223-265. doi: 10.1207/s1532690xci0503_2
- Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293-304. doi: 10.1177/00222194050380040301
- Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 615-626. doi: 10.1037//0022-0663.93.3.615
- Hopkins, S. L., & Lawson, M. J. (2002). Explaining the acquisition of a complex skill: Methodological and theoretical considerations uncovered in the study of simple addition and the moving-on process. *Educational Psychology Review*, 14(2), 121-154. doi: 10.1023/A:1014629604663
- Ivarie, J. J. (1986). Effects of proficiency rates on later performance of a recall and writing behavior. *Remedial and Special Education*, 7(5), 25-30. doi: 10.1177/074193258600700506
- Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking second-grade children with different forms of LD. *Journal of Learning Disabilities*, 33(6), 567-579. doi: 10.1177/002221940003300605
- Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2003). Characteristics of children with severe mathematics deficiencies: A longitudinal perspective. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(4), 213-221. doi: 10.1111/1540-5826.00076
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74(3), 834-850. doi: 10.1111/1467-8624.00571
- Jordan, N. C., & Montani, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 30(6), 624-634. doi: 10.1177/002221949703000606
- Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disability Research & Practice*, 29(2), 66-74. doi: 10.1111/ldrp.12029
- Lewis, C., Hitch, G. J., & Walker, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*, 35(2), 283-292. doi: 10.1111/j.1469-7610.1994.tb01162.x
- Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Noyes, R. Jr. (2001). Comorbidity in generalized anxiety disorder. *Psychiatric Clinics of North America*, 24(1), 41-55. doi: 10.1016/S0193-953X(05)70205-7
- Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 67(3), 345-357. doi: 10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x

- Pellegrino, J. W., & Goldman, S. R. (1987). Information processing and elementary mathematics. *Journal of Learning Disabilities, 20*(1), 23-32. doi: 10.1177/002221948702000105
- Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J., & Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 42*(4), 356-371. doi: 10.1177/0022219409335211
- Resnick, L. B. (1984). Beyond error analysis: The role of understanding in elementary school arithmetic. In H. N. Cheek (Ed.), *Diagnostic and prescriptive mathematics: Issues, ideas and insights* (pp. 2-14). Kent, OH: Research Council for Diagnosis and Prescriptive Mathematics Research.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An interactive process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362. doi: 10.1037//0022-0663.93.2.346
- Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 17*(2), 81-89. doi: 10.1111/1540-5826.00035
- Russell, R. L., & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematical difficulties. *Cognition and Instruction, 1*(2), 217-244. doi: 10.1207/s1532690xci0102_3
- Skinner, C. H., Bamberg, H. W., Smith, E. S., & Powell, S. S. (1993). Cognitive, cover, copy, and compare: Subvocal responding to increase rates of accurate division responding. *Remedial and Special Education, 14*(1), 49-56. doi: 10.1177/074193259301400107
- Skinner, C. H., Belfiore, P. J., Mace, H. W., Williams-Wilson, S., & Johns, G. A. (1997). Altering response topography to increase response efficiency and learning rates. *School Psychology Quarterly, 12*(1), 54-64. doi: 10.1037/h0088947
- Skinner, C. H., Pappas, D. N., & Davis, K. A. (2005). Enhancing academic engagement: Providing opportunities for responding and influencing students to choose to respond. *Psychology in the Schools, 42*(4), 389-403. doi: 10.1002/pits.20065
- van Lehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses, and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(2), 3-71.
- Wittchen, H. U. (1996). Critical issues in the evaluation of comorbidity of psychiatric disorders. *British Journal of Psychiatry, 168*, 9-16.