

陳埜淑 (2017)。  
幼童重複樣式教學之探索性研究。  
**臺灣數學教育期刊**，4 (1)，63-92。  
doi: 10.6278/tjme.20170317.003

## 幼童重複樣式教學之探索性研究

陳埜淑

臺南應用科技大學師培中心

本研究為提升幼童樣式推理能力設計樣式教學模式，從尋找樣式、辨識樣式單位、標示單位、延伸單位、臆測單位到驗證樣式，教導幼童會複雜重複樣式推理。本研究採探索性研究，以南部一所大學附設幼兒園兩班大班實施樣式推理教學，每班各三十名，平均年齡約 6 歲。其中一班實施樣式教學模式為實驗組；另一班維持原來樣式教學方式即為控制組。為瞭解樣式教學模式的成效，教學前後兩組接受樣式作業評量。資料蒐集包括觀察、攝影教師樣式教學，以及對研究對象訪談，之後進行量化分析與質性分析，以瞭解樣式教學成效及教師如何進行樣式教學。研究結果發現兩組經教學後，後測成績皆有提升，且實驗組的後測成績顯著優於控制組。顯然，樣式教學模式介入明顯提升幼童的推理能力。另一方面，教師在教導幼童樣式推理時會循序漸進以故事、遊戲引導幼童，再透過操作增進幼童的樣式概念。實驗組進行複雜重複樣式教學時，分解複雜重複樣式結構為簡單重複樣式，幫助幼童掌握核心單位及延伸樣式，擴展幼童複雜重複樣式推理能力。

**關鍵詞：**幼兒數學、重複樣式、樣式教學

---

通訊作者：陳埜淑，e-mail：[tg0002@mail.tut.edu.tw](mailto:tg0002@mail.tut.edu.tw)

收稿：2016 年 9 月 27 日；

接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Chen, C. S. (2017).

Exploratory study of instruction of repeating patterns for young children.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 4(1), 63-92.

doi: 10.6278/tjme.20170317.003

## **Exploratory Study of Instruction of Repeating Patterns for Young Children**

Ching-Shu Chen

Teacher Education Center, Tainan University of Technology

This study experimentally explored the effectiveness of a designed teaching model for promoting young children's pattern reasoning. The model of teaching sequences included exploring patterns, identifying the unit of repeated patterns, labeling the unit of repeated patterns, extending pattern units, predicting pattern units, and proving the patterns. Two groups were involved in the pattern-reasoning experiment: an experimental group, which adapted the pattern-teaching model, and the control group, which used the original teaching methods. Sixty subjects with a mean age of 6 years were recruited from two classes of a private kindergarten. They were subject to pattern-task testing before and after teaching. Observations for data collection involved taking pictures, recording videos, and interviewing participants after teaching. The experimental group outperformed the control group in the pattern-reasoning task. Evidently, implementing pattern instruction was effective for promoting pattern reasoning among young children. Additionally, during pattern instruction, the teacher taught using storytelling and games and then provided hands-on materials to strengthen pattern cognition. During the pattern-teaching process, the teacher deconstructed a complex pattern concept into a simple pattern, prompted recognition of the core unit of the pattern, and extended the pattern that facilitated children's competence in reasoning.

**Keywords:** childhood mathematics, repeating pattern, pattern teaching

---

Corresponding author : Ching-Shu Chen , e-mail : [tg0002@mail.tut.edu.tw](mailto:tg0002@mail.tut.edu.tw)

Received : 27 September 2016;

Accepted : 17 March 2017.

## 壹、緒論

近年來各國重視學童提前學習代數，特別看重幼童數學樣式推理教學與相關議題的研究，澳洲 Mulligan 等學者多年的學前樣式研究及德國跨三個年級重複樣式推理研究，都發現幼童樣式推理能力會影響小學數學成就的表現，他們主張數學教育需具前瞻性的學習觀點及關聯性，以建立幼童問題解題的技能 (Lüken, Peter-Koop, & Kollhoff, 2014; Mulligan, Mitchelmore, English, & Robertson, 2010; Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa, & Fonseca, 2012)。由於數學的本質在尋找規律與規律之間的關係 (Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2012)，數學有效的推理需注意到真實世界脈絡中的樣式與符號，而習得如何察覺事物中數量形的規律，透過樣式探究與經驗的累積，形成一般化，並進一步歸納樣式解決問題 (Mulligan et al., 2012)。樣式被描述為一種規則、重複的型式 (Orton & Orton, 1999)，也是一種延伸的規律，可以臆測的規則，以樣式引入幼童數學學習有助於數學概念和關係的抽象化，發展出推理能力 (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011)。

樣式在幼童的生活中處處可見，如牆壁、地毯、天花板及窗戶都有樣式，每天的生活作息穿衣擺桌椅和預備簡單的食物 (Lynn, 2013) 都存在著樣式。在他們的生活脈絡中能經驗到各種樣式。據 Clements 與 Sarama (2009) 的研究指出五歲的幼童已能延伸簡單重複樣式如 ABBABB，六歲的幼童能轉化直線的 ABBABB 樣式為樣式的核心單位 ABB，但如果擴大樣式單位，幼童是否也能掌握樣式單位從事複雜重複樣式的推理？研究者觀看一所幼兒園進行「葉子」相關的主題教學時，幼童會以搜集到的葉子排列出重複增長樣式 ABCDABCDDDDABCDDDDDD。故而，引發研究者擬設計複雜重複樣式作業與教學引導幼兒從中學習，並瞭解幼兒的樣式推理表現與教學成效。本研究問題如下：

- (一) 教師如何實施樣式推理教學提升幼童樣式推理能力？
- (二) 經樣式教學後幼童學習表現為何？

## 貳、理論架構

### 一、樣式種類

樣式的種類在數學教育文獻中多半指出有三類，分別是重複樣式 (repeating pattern)、增長樣式 (growing pattern) 和結構樣式 (structural pattern) (Copley, 1998/2003; Owen, 1995)。

#### (一) 重複樣式

重複樣式指有一個可以辨認的重複單位，例如春-夏-秋-冬-春-夏-秋-冬-... 及有一個循環的結構，至少有兩個重複單位。重複樣式重點在於循環 (cycle) 或重複 (Owen, 1995; Tsamir, Tirosh,

Barkai, Levenson, & Tabach, 2015), 重複樣式意指一系列特定的物件或事件重複出現, 像顏色、形狀、方向、大小、聲音、數字或其他元素(Owen, 1995; 吳昭容、嚴雅筑, 2008)。另外, Threlfall (1999) 提出循環重複樣式不只在單一向度上變化, 也可以多個向度變化以增加樣式的複雜度成為複雜重複樣式, 並在樣式延伸時, 除了直線延伸外, 也可以將元素排列的方向改變, 排列成非直線型(蛇形)的樣式。本研究將增加樣式複雜度, 探討幼兒是否能在教學之後, 掌握複雜重複樣式的結構並提升樣式推理能力?

## (二) 增長樣式

增長樣式也稱為數列(sequence), 是指由一個法則產生的一系列、非重複的項目, 例如等差數列 1-3-5-7-9... 及費氏數列 1-1-2-3-5-8-13-21...。增長樣式是用可預測的方式來改變某個數值的型式。其內涵指在 Owen (1995) 的分類中稱為序列(sequences), 也就指一系列非重複的數值, 隨著一種規則延伸所組成, 在正式課程活動中, 此類型以數字序列(簡稱數列)最為典型, 如等差數列、等比數列、巴斯卡三角形數, 例如:「5、10、15、20...」, 是開始於 5, 每項為前一項加 5 的數列。

## (三) 結構樣式

結構樣式強調結構的存在(Owen, 1995), 結構指概念之間的連結, 即從一組有關聯性的事物中發現一些特質, 例如:「5 可以用多少方式來組成?」會有  $4+1=5$ 、 $3+2=5$ 、 $2+3=5$ 、 $1+4=5$  的答案出現。如數學乘法中的交換律、結合律和乘法對加法的分配律, 都是屬於結構樣式的議題。

另一種結構樣式是指空間結構樣式(spatial structure patterns)。在幾何圖形變項的特徵中有不變的特質。如三角形、正方形、積木。常見如三角形數或正方形數之類的樣式, 若從其數量的變化看來, 與增長樣式有關, 但因其具備空間結構的視覺特性, Papic 等人(2011)稱之為空間結構樣式, 國內研究者則常採用「數形」來指稱(洪明賢, 2003; 趙曉燕、鍾靜, 2010)。

上述三種樣式中, Threlfall (1999) 認為重複樣式相較於數列等其他的樣式, 是一種線性的型式較適合幼童學習, 有助於數學思考能力的培養, 加上多數的學者認為三種樣式中, 幼童適合學習重複樣式(Clements & Sarama, 2009)。本研究認為重複樣式是學習其他樣式的基礎, 引導幼兒進入複雜重複樣式學習, 將有助於提升幼童多種數學概念及進深數學推理能力。

## 二、樣式推理相關研究

### (一) 掌握樣式單位推理

5-6 歲的幼童在自然遊戲中會堆積木完成簡單的 ABAB 重複樣式(Clements & Sarama, 2009; Seo & Ginsburg, 2004); 澳洲 Papic 等人研究(2011)發現有些幼童憑著記憶可以畫出 ABAB 樣

式，但讓幼童複製 ABBC 樣式就有困難。另外，Rittle-Johnson、Fyfe、McLean 與 McEldoon(2013) 發現幼兒進入正式學校教育前已有重複樣式的概念，但仍有些幼童無法複製 ABB，反而會把 ABB 變成 ABAB 的樣式排列，幼兒需運用策略發現關係才能作樣式推理。吳昭容與嚴雅筑(2008) 以四歲多和五歲多的幼兒為對象，採用單位內無重複 (abcdabcdabcd...)、單位內有重複元素且相鄰 (aabcaabcaabc...)、單位內有重複元素且不相鄰 (abacabacabac...)，以三種複雜度的樣式測試幼兒，發現單位內沒有重複元素的簡單樣式，幼兒有可能僅以一一對應的方式作推理，但未能掌握樣式的規律，幼兒必須學會掌握較大的單位才能提升解題的正確率。再就幼兒是如何掌握重複樣式？吳昭容與徐千惠(2010) 指出五歲幼兒樣式推理受到重複樣式單位一定等長及前面作業出現過的單位元素影響解題。而 Mulligan 等人(2012) 探討幼兒以樣式學習數量形的關係及發展推理能力時，發現幼兒會以不同方法發展出數量形結構的理解，注意到樣式單位重複及空間結構，並在過程中能覺知、記憶並複製排列數量及幾何圖案。

## (二) 引導樣式推理

幼兒雖然尚未能進一步發展出辨識既有規律，找出樣式結構的能力，但成人能引導他們學習樣式推理。Papic 等人(2011) 以實驗介入探討樣式教學對於幼童樣式能力的影響，以及瞭解樣式能力測驗題組能否反映幼兒推理表現的變化。教學實驗歷經一年，以 53 名三歲多到五歲不等的幼兒為研究對象，分實驗組與對照組各半。在教學前、中、後各施測一次樣式能力評量。研究內容包含複雜度不一的重複樣式與數形樣式，一開始兩組幼兒樣式能力的表現相近，但教學中、後的評量發現實驗組得分顯著地較佳，而質性資料顯示實驗組比控制組能掌握重複樣式的單位與結構。研究結果顯示成人有系統地引入樣式活動對幼童察覺樣式單位與結構發展出乘法推理能力。

## (三) 有效介入樣式教學

樣式學習對幼童未來數學成就會有影響。德國以五歲、幼稚園到小學 1、2 年級共有 2250 名幼童為研究對象，從事四年的長期追蹤研究，調查幼童樣式推理能力是否影響小學的數學表現？研究結果發現學前樣式推理能力影響到小學一、二年級的數學成就，包括加減的運算能力 (Lüken et al., 2014)。因此，教育學者認為早年有效介入可以建立幼童的數學思考與推理。再者，Klein、Starkey 與 Wakeley(2000) 以數學知識介入 163 位學前幼兒(3 歲 9 個月到 4 歲 9 個月) 數學教學研究，實驗組幼兒接受介入教學，而對照組未介入教學，介入教學前後幼兒接受兒童數學量表 (Child Math Assessment) 評量，檢驗介入教學成效。研究發現介入教學使得低社經的幼兒比未接受介入教學的幼兒表現好 (Starkey, Klein, & Wakeley, 2004)。另外，Papic 與 Mulligan(2005) 以 53 名幼童為研究對象發展樣式策略的實驗研究，其中一所學前學校實施 6

個月以重複樣式及空間樣式介入教學；另一所學校實施一般教學。研究發現介入教學組的後測樣式作業成績表現較優異，幼童能理解重複單位及空間關係。相對地，控制組的幼童卻看不到重複單位，而且介入的幼童能判斷出樣式的變化，並能在不同媒介使用下作樣式轉換。再經一年的調查，發現介入教學的幼童在增長樣式與算術評量分數優於控制組。次年，以兩所幼教機構的 64 名幼兒及 9 位幼教師為研究對象，比較原住民（實驗組）與主流學校從事 10 週樣式介入教學成效。研究結果發現幼教師能理解不同類型樣式，且提升學童代數思考的能力。從上述的兩個研究瞭解介入教學有助於幼兒發展出複雜樣式理解和技巧，幼兒在進入小學前，因接受介入教學已有抽象化、一般化及解釋樣式或分析樣式結構的能力（Papic, 2013）。可知，若從事介入教學也能提升幼童複雜重複樣式推理能力。

#### （四）複雜重複樣式及其重要性

複雜重複樣式由簡單重複樣式擴展而來，其樣式結構中組成單位元素比簡單重複樣式的單位元素變化多，幼童學習複雜樣式有助於未來數學進階的學習。以下分列說明複雜樣式結構與其重要性。

##### 1. 複雜重複樣式結構

就樣式單位元素組合而言，單位內含有不相鄰與相鄰的元素，且相鄰元素增多時，樣式的結構較複雜，如例一，○○□□△○○○○□□△○○○○□□△○○，其樣式單位是○○□□△○○。

就樣式單位元素排列方向而言，樣式單位元素排列方向一致者稱為直線樣式，而非直線樣式指單位元素排列的方向會改變。如例二



因樣式蜿蜒排列又稱為「蛇形（或 S 型）」樣式，辨識此樣式時需注意到元素轉換方向的排列次序與前面的單位排列不同。

就延伸單位完整性而言，可分完整樣式與不完整樣式。完整樣式指單位的延伸到最後一個核心單位時仍完整重複出現，如例一。若延伸單位到結束時，最後的一個核心單仍不完整出現，稱為不完整樣式結構如例二。

就核心單位的複雜度而言，除單位元素量增加且單位重複出現外，單位與單位之間是否銜接，可分成切割單位與非切割單位兩種的複雜重複樣式。切割核心單位如 AABCABBCABCC-AABCABBCABCC，而非切割單位的重複樣式在延伸樣式時，樣式單位之間未加以分割如 5175117517751751175177，加上非直線排列難度最高。上述複雜重複樣式的不同結構，本研究在設計評量與教學皆加以應用。

## 2. 複雜重複樣式重要性

由於數學樣式與結構推理發展是代數與函數推理的前置經驗 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)，能辨識複雜重複樣式的結構，瞭解數形量的關係有利於解題、預測及一般化。根據 Threlfall (1999) 探討 119 名 3-9 歲幼兒完成三色 (紅綠黃) 蛇形樣式延伸作業的表現，發現有 60% 的幼兒能完成作業，更有六名幼兒挑戰更複雜的樣式 (顏色、大小及形狀排列)，而研究建議應發展幼兒複雜樣式推理，並探討他們如何看到這類的重複樣式及覺知這類核心單位而完成作業？因此，在教學上他建議循環重複樣式不只在單一向度上變化，也可以多個向度改變，他提出幼童掌握重複樣式的歷程，發展出兩種途徑；一個是樣式的複雜度，另一個是兒童如何發展掌握樣式，他認為當幼童能掌握樣式的單位就能掌握樣式，同時能發展出數學相關的多種概念，如等量、倍數、加減法的概念。例如，從樣式單位項目作累加而能發展出總量的概念，以及在測量的脈絡中，可使用相同長度為重複單位測量面積。

Warren 與 Copper (2006) 利用重複樣式導入函數推理，在他們教學設計樣式活動時，從簡單 ABABAB 樣式開始，讓幼童認識樣式具有循環及延續性的特性以及辨識樣式單位的組成元素，再讓幼童臆測下一組樣式元素的出現，以操作方式延伸樣式。在第二階段教學加入函數概念，以不同材料與活動作樣式驗證，如呈現二組樣式單位再讓幼童延伸樣式，再遮蓋第三組，讓幼童臆測第三組的組成元素，然後讓幼童推論出三組共有幾個物件，若繼續延伸，並使用表格整理樣式元素增加情形，可供幼童看到物件倍數的增加，也從表格統理數字對照出樣式物件數量成比例的成長如右圖 (Warren & Copper, 2008, p.118)。



可知變化重複樣式的單位元素可提升幼兒函數與比例的思維能力，而重複樣式學習不只支持學童具有一般化的能力外，變化重複樣式也能提升函數與比例關係的推理能力。

另外，Tsamir 等人 (2015) 認為幼童未入進入小學之前，先有重複樣式的基礎則有利於進入小學學習小數，特別是有機會遇到解決小數循環的問題，小數循環屬複雜重複樣式，而本研究設計未切割核心單位的複雜樣式較屬於大核心單位的重複樣式，幼童學習未切割核心單位的複雜重複樣式可為學小數循環奠基。因此，學習複雜重複樣式對幼童未來數學學習有效益。

總之，大多數的幼童可以辨識及延伸簡單重複樣式，雖有少數的幼童仍無法完成，但經介入樣式教學能提升幼童樣式推理能力，他們不只會簡單重複樣式，還會延伸增長樣式、轉換樣式，及發展複雜樣式理解與解題技巧。更有研究者以複雜重複樣式挑戰幼童推理能力，因此，本研究認為從簡單重複樣式開始學習，再進入複雜重複樣式學習，可透過引導提升幼童樣式推理能力。

## 三、樣式教學模式

本研究為促進幼兒樣式推理能力成長，提出樣式教學模式，從尋找樣式、辨識樣式單位、

標示單位、臆測單位、延伸單位到驗證樣式，幫助幼兒發展出複雜重複樣式的推理能力。教學模式如圖 1：

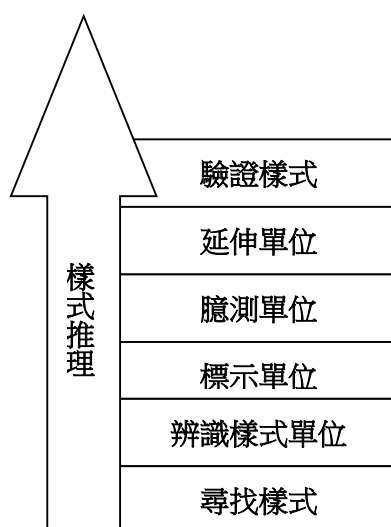


圖 1 本研究樣式教學模式

### (一) 尋找樣式

帶領幼童發現樣式，先引導學生注意所呈列的物件具有循環重複出現的特性。Lynn (2013) 發現幼兒在樣式推理中，以重複出現作為確認樣式的特性，不忽略掉規律探索，若要提升幼童的推理，幼童必須先學會以重複單位為判斷樣式的標準，再延伸樣式及增長樣式。

### (二) 辨識樣式單位

樣式推理教學的初始任務在引導學童確認是否重複樣式？吳昭容與徐千惠 (2010) 認為幼童能完成樣式解題在於先辨識樣式中的單位。辨識樣式單位指能看出樣式排列中重複出現元素組成的單位。Cooper 與 Warren (2008) 建構作業讓學生能覺察重複樣式與增長樣式之間的差異，例如 RB、RBB、RBBB、RBBBB 的樣式裡，R 每次都重複，但 B 實際上不斷發展，學生若能注意此兩種樣式的差異，察覺到何者增長？何者是保持一樣？則可以促使他們合宜反映到更複雜的樣式上。

### (三) 標示單位

Threlfall (1999) 認為尋找樣式的核心單位是樣式推理關鍵；Sophian (2007) 也提出尋找核心單位是學習數學概念基本要件，在幼童階段引入單位可作為發展銜接數概念及程序知識與進階數學的一座橋樑。因此，樣式推理或一般化最基本要掌握是樣式的核心單位，如 ABABAB 核心單位是 AB，較複雜單位內有相鄰的元素如 ABBCABBC，核心單位為 ABBC；因此，辨識樣式後標示單位很重要。



#### (四) 臆測單位

臆測單位指在標示單位後，臆測下一個核心單位是否會重複或循環出現。臆測被界定為一種合理的假設，陳英娥與林福來（1998）認為臆測是個體面對問題時，提出一個合理猜測的過程。本研究的臆測指幼童經樣式觀察後，根據前面出現過的樣式單位作下一個單位出現的合理推測。臆測與辨識樣式單位有密切的關係，因為在既定的資料中對既定的事實提出質疑，主要功能在根據樣式的結構能形成一般化。而樣式推理發展出的臆測能讓學生有機會在樣式推理下，進而判斷樣式是否能延伸？然後再驗證推論結果（Stylianides, 2009）。因此，Stylianides（2008）認為樣式－臆測－驗證存有線性關係，臆測必須經過辨識樣式單位而來。

#### (五) 延伸單位

延伸單位是在持續延伸核心單位，無論是往直線或非直線的方向延續下去，核心單位會重複出現。Warren 與 Cooper（2008）認為延伸樣式能看出學生樣式推理一般化的理解程度。延伸樣式的重要性在幫助學習者能辨識樣式的規則與變化情形。

#### (六) 驗證樣式

驗證主要功能是對接受的事實作有效的論證或拒絕數學的宣稱（Stylianides, 2008, p. 11）。驗證樣式是指檢驗樣式在延伸單位時，是否與前面單位有循環、重複或增長的關係？驗證的目的在於解釋、校正（verification），及形成新知識（Stylianides, 2009）。當幼童對延續排列的樣式單位對照前面出現過的核心單位，若核對成功則接受原先的臆測，再進行延伸樣式，發展出複雜重複樣式關係的新理解形成一般化，因而提升複雜重複樣式推理能力。從事樣式推理一開始會先排列重要事實成為有意義的樣式，使用樣式形成臆測及驗證，並以新的例證、修正臆測及提出可能的反例，再瞭解所提供的論證是否正確，並測試這些臆測即驗證。

因此，教學模式的教學流程，先由教師帶領幼童尋找樣式，再進入辨識樣式單位、標示單位、臆測單位與延伸單位，最後驗證樣式。樣式教學模式是讓幼童以循序漸進的方式學習樣式概念，若幼童在學習過程中遇到困難，教師則先在該階段停留，直等待幼童在該階段熟練後，再邁入下階段學習。

### 參、研究方法

本研究探討幼童經由樣式教學之後的學習表現為何？教師如何實施樣式教學提升幼童樣式推理能力？為此，本研究進行實驗教學及發展樣式作業以瞭解樣式教學的成效。

#### 一、研究設計

本研究為探索性研究，以南部一所大學附設幼兒園兩班大班實施樣式推理教學，每班各三

十名，平均年齡約 6 歲。其中一班為實驗組實施樣式教學模式；另一班為控制組維持原來樣式教學的方式。兩班依據幼兒園的數學教學目標與提供的坊間教材進行教學。實驗組參考幼兒園的數學教材設計樣式教學內容，並以符合幼兒認知發展的學習軌道設計樣式教學活動完成樣式教學目標。兩班同時進行樣式教學，樣式教學期間從 104 年 1 月 2 日，每週一堂約五十分鐘實施八堂課，期間因遇放假兩週，教學延至 104 年 3 月 9 日，兩組的教學，如表 1。兩班幼童在實驗教學前後接受前後測，並實施延後測；延後測與後測時間隔約二個月（6 月）施測。

## 二、研究對象與情境

兩班六十名幼童，每班各三十名，實驗組有 18 位男童及 12 位女童；控制組 17 位男童及 13 位女童，平均年齡 6 歲，皆來自中社經地位家庭。兩班教師年資相當，畢業於教育大學幼教系。在兩班教師成員中，實驗組除主教教師外，另有教保員協助教學。由於研究者曾在幼兒園進行臨床教學過熟識主教老師，實驗組主教老師也曾向研究者反應過她的數學教學困擾。爾後，彼此常有交換心得與教法機會。因此，實施實驗教學時研究者邀請她從事教學，而研究者負責提供樣式教學理論與教學活動，教學前後研究者與主教老師共同討論教案及教學；控制組有兩位教師，一位主教老師，另一位教師協助教學（主要記錄學習檔及保育工作）。因為兩班的教學目標相同，研究者會與兩班主教老師討論教學進度及教材。

## 三、教學內容

兩班實驗教學以重複樣式為主，教學內容包括直線與非直線，簡單及複雜重複樣式，而樣式教學配合幼兒園數學教材的學習目標設計教學。在實驗教學之前，兩班的教師先討論教學進度及教學方式，兩班的教學活動相似：1.以故事帶入教學，控制組以故事（教材）帶入樣式教學；實驗組自編故事（生活議題、繪本）帶入樣式教學；2.以遊戲增強概念，控制組課堂以個別遊戲，如桌遊加強數學概念，實驗組以團體遊戲加強數學概念；3.教材操作練習，控制組操作坊間提供的數學材料，而實驗組除使用幼兒園提供教材外也自製教具如圖片輔助教學。實驗組與控制組不同在於依樣式教學模式將概念加以細分（依照教學模式），引導幼童學習。

至於樣式教學方式，兩班的教法相似，引導幼童辨識樣式單位時，先以背誦口訣（如糖果糖果餅乾御飯糰-糖果餅乾餅乾御飯糰）的方式幫助幼童熟練單位元素的變化；樣式排列都採逆方向延伸樣式（蛇形）的型式，每當幼童完成樣式排列後，教師會要求幼童計數樣式組合物件共有幾個，例如不同形狀或同類的物件共有幾個。至於實驗組一開始也會在簡單重複樣式教學時，複誦樣式單位元素（如綠紅藍綠紅藍），然而在複雜重複樣式教學時，因樣式單位元素多，加強幼兒發現樣式關係，先尋找樣式、辨識樣式單位、標示樣式單位等步驟，掌握單位元素的變化，兩組教學方法與內容，如表 1。

表 1  
兩組教學方法與內容

樣式種類	實驗組		控制組	
	樣式結構	教學方法 & 內容	樣式結構	教學方法 & 內容
簡單重複 樣式	1.ABC 元素不重複	「籃球比賽」排三色球-探索樣式	1.ABC 元素不重複	玩「購衣物」排三種衣物認-識樣式
	2.ABCD 元素不重複	「聖誕裝飾」用☆○△◇(色紙)-辨識單位	2.ABCD 元素不重複	「選帽子」擺四種帽子-辨識樣式
	3.ABCCD 元素相鄰	「大家來修橋」比賽貼色紙-標示單位	3.ABCCD 元素相鄰	輪流「進學習區」(語文角兩次)練習-分辨相鄰元素
複雜重複 樣式	4.直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「下午茶」操作茶品-臆測樣式及延伸樣式	4.直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC	「早餐店點餐」漢堡薯條三明治-練習分割樣式
複雜重複 樣式非直線	5.非直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「阿平菜單」排圖練習-臆測樣式	5.AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「整理零食盒」糖果餅干御飯糰-練習認識核心單位
非直線 AABC ABBC ABCC	6.AABCABBCA BCC 未切割單位	「白鵝農莊」排圖卡△□○△□□○△□○○-臆測、延伸樣式	6.AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「圖形排序」操作△△□○-△□□○-△□○○-(復誦單位)
	7.AABCABBCA BCC 未切割單位	「青青草原」表徵動物-延伸、驗證樣式	7.AABCABBCA BCC 未切割單位	「彩色火車」積木排火車車箱-(復誦單位)
ABCC	8.AABCABBCA BCC 未切割單位	「照顧」操作圖卡-延伸、驗證樣式	8.AABCABBCA BCC 未切割單位	「旋轉木馬」排圖形木馬座椅(復誦單位)

#### 四、評量工具

評量工具分兩種，一種是「幼童樣式推理作業」，使用在實驗教學前、後測及延後測，目的在瞭解樣式教學的成效；另一種是「課堂樣式推理作業」，於課堂教學後使用，目的在瞭解幼童當週樣式學習情形，並作為下次教學及修正教學參考。

### (一) 評量工具設計原則

#### 1. 每一種作業樣式單位延續三個以上

根據 Tsamir 等人 (2015) 的研究發現，樣式的單位完整性及延續性會影響幼童推理表現。故本研究評量工具的樣式至少連續三個單位以上，而且每一個單位至少由四個以上的元素組成，目的在於瞭解幼童經由介入教學之後，推理表現是否能超越過去的研究—幼童只會辨識 ABCABC 樣式 (Clements & Sarama, 2009)？因此，研究工具的樣式作業難度較高，每個樣式作業都是三個單位以上連續排列的樣式。

#### 2. 以非直線性樣式為主

Mouhayar (2014) 認為學童會直線性樣式推理，在樣式一般化的表現比非直線的樣式表現好，而且不一定會非直線性的樣式推理。本研究設計非直線的複雜樣式作業，探討幼童是否經由樣式教學能克服非直線樣式推理的難度完成作業。

#### 3. 實作評量

本研究設計的兩種樣式作業都採實作評量。施測的過程中，「課堂樣式推理作業」由幼童操作擺放物件或畫圖或著色完成作業。「幼童樣式推理作業」以物件填充空缺或空白部分的方式完成作業，物件包括移動式的圖片或圖形。

### (二) 評量作業編製與實施

#### 1. 幼童樣式推理作業

「幼童樣式推理作業」有四個重複樣式作業，供教學前、後測及延後測的評量使用（施測時與增長樣式及數形同時施測）。作業先經過預試，將初步預測的結果編製 8 個重複樣式作業，再針對 4.1 歲至 6.4 歲的 62 名幼童施測，從中篩選出適合六歲兒童樣式推理的作業，並修正與刪除不適合的題型，例如將原本設計 ABC 簡單重複樣式作業加以刪除（共四題），保留四個至少有四個元素以上的重複樣式作業（除四個元素外，並增加樣式元素及排列方向）。預測的  $\alpha$  值為 .70，作業如圖 2 至圖 5 (陳埤淑, 2017)。作業計分方式是正確完成者得 1 分，錯誤或未完成以零分計，答對四題共 4 分。



圖 2 簡單重複樣式



圖 3 簡單重複樣式

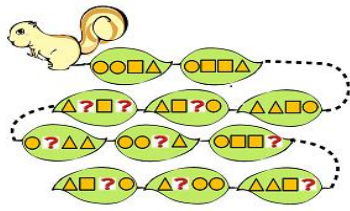


圖 4 切割單位複雜重複樣式

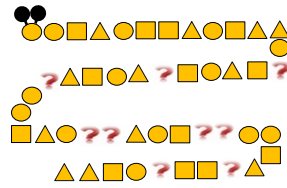


圖 5 未切割單位複雜重複樣式

正式樣式作業編製完成後，為使作業能吸引幼童投入解題，請幼教師提供施測的方式及指導語的建議。施測時，對幼童說明是玩益智遊戲，也說明作答方式，並告知仔細審題、思考及作判斷，再拿取合適的物件排列樣式或補足樣式單位中的空缺，以完成作業解題。施測採一對一的方式進行，由幼童逐一完成。在完成每一項作業後，施測者訪談受試者：「你怎麼知道要這麼做？」受試者可以動作、言語說明使用解題的策略，每位幼童約 15 分鐘完成四個作業，評量過程中拍照攝影。

## 2. 課堂樣式推理作業

為瞭解實驗組重複樣式教學後幼兒學習情形，設計八堂課的「課堂樣式推理作業」，實施時間在課堂結束前十分鐘，由幼童個別完成。作業作答的方式由幼兒畫圖、粘貼物件或著色完成，並由教師校正作答的正確性，研究者並於課後統計全班正確完成作業人數，再計算出全班答對的平均數，如表 2。

### (三) 評分

本研究以量化與質性資料建構評分一致性。本研究評幼童樣式推理表現，會針對幼兒答題加以歸納分類。量化資料方面，答對者以一分計，答錯及答一半者以零分計，計算出六十名幼童接受前、後及延後測樣式評量成績。在質性資料方面，幼童在前、後測及延後者施測過程中，施測者針對每一題幼童作答後，訪談、錄音及記錄解題使用的策略，問：「你怎麼知道要這麼做？」，再將資料比對及分類：完成樣式作業、完成一半及未完成（答錯）的三類，分類後可提供建立評量原則，並瞭解幼童對樣式單位的理解程度。如完成一半的幼童說：「用算的」（C3）、「我已經數過了」（C4）、「因為看前面的」（C5）。完成者會說：「因為是重複樣式」（C20、23）或「看到單位」（C28）；未完成的會說：「不知道」（C31）及「就是這樣」（C38）。研究者將這些質性資料與量化資料作對比，完成評分者一致性之建構。

## 五、資料蒐集與分析

資料蒐集包括觀察、攝影教師樣式教學，以及對研究對象訪談。之後進行量化分析與質性分析，質性分析以質性描述幼童學習樣式推理的歷程；量化資料以評量來分析教學成效。資料

分析在量的方面，因為幼童樣式推理表現評量分兩種。首先對「幼童樣式推理作業」前、後測的結果加以整理，並將資料進行統計分析，如使用共變數分析兩組之間的教學效果。同時，以  $t$  考驗瞭解實驗組前、後測的表現。另外，在幼童課堂樣式作業表現方面，本研究將每一堂課幼童學習成效，以正確完成作業作為指標，並計分統計，再以全班平均數呈現每堂課的教學成效。在質性資料方面，將拍攝影片及訪談錄音內容經轉譯後作資料分析，分析時先將觀察、訪談的資料加以編碼，如 O：教學觀察；T：教師；C：幼童；I：訪談。檢視蒐集到的樣式教學錄影、訪談教師的觀點及幼童反應的一致性。

## 肆、研究結果與討論

回應本研究研究目的分二部分說明，第一部分敘述在教學歷程中教師如何進行樣式教學提升幼童樣式推理能力；第二部分由樣式作業評量結果顯示教師樣式教學成效。

### 一、樣式教學實施


教師實施重複樣式推理教學，先瞭解幼童樣式概念發展及學習動機，並配合活動引導幼童學習。由於 Klein 與 Starkey (2004) 提出幼兒理解抽象的樣式概念是逐漸發展出來的，主張應在幼童樣式學習階段提供愉快的經驗，將有助於學童發展出樣式推理能力，甚至後來學習代數都能具有積極正面的態度。實驗組教師為引起幼童學習興趣透過故事、遊戲及操作帶入樣式概念。引用的故事內容包括生活紀律（阿平菜單）、品格教導（大象班下午茶、白鵝農莊、照顧）及認識大自然現象（青青草原），再藉由故事情節的轉化幫助幼童發現樣式，進而學習複雜樣式的推理，也將故事作為樣式解題的背景，讓幼童探索樣式，尋找辨識樣式核心單位、練習標示單位、臆測單位、延伸樣式及驗證樣式，完成樣式推理任務。

#### （一）以遊戲尋找樣式

遊戲能激發概念發展與問題解決的能力（Bodrova & Leong, 2007）。教師以投籃遊戲帶領幼童探索及辨識樣式。教師先將幼童分成三組（綠、紅、藍）玩投籃比賽，幼童玩兩三回後，教師以綠紅藍（ABC）圖卡表徵三種顏色的球，請幼童將投擲結果依比賽的名次。第一、二、三依序貼圖卡在白板上加以排序，也請幼童排列時要唸出圖卡顏色的順序：綠-紅-藍-綠-紅-藍，幼童發現籃球是有規律的排列著，這時教師適時帶入「樣式」的定義。

T：那我們要利用第一名和第二、三名的排名來排一個樣式喔！要怎麼排呢？譬如說，綠、紅、藍，那下面就還要？綠、紅、藍，再來接下去呢？就是要排一個重複，像排隊那樣有重複的、有秩序、有規則的排喔！這就是樣式，排了以後要反覆喔！綠、紅、藍，下去是？

C：綠、紅、藍，綠、紅、藍。

T：所以，樣式就是要這樣排！如 

C：好漂亮喔！


幼童看著規則排出來的顏色驚呼！

教師利用遊戲比賽幫助幼童理解「樣式」的定義，讓幼童認識由綠、紅、藍三種顏色重複出現所排列的組合稱之為「樣式」，也是由 ABC 三個不同元素構成的簡單重複樣式，因而教師對「樣式」下定義就是有重複的、有秩序、有規則的排列出現的組合，幼童得知綠-紅-藍三種顏色重複出現的現象，就是「樣式」。這如 Lynn (2013) 所提幼童要在樣式推理中，找到規律確認樣式有重複出現的特性，幼童學會以重複單位為判斷樣式的標準，再發展出延伸的樣式。

## (二) 辨識及標示樣式單位

教師掌握樣式結構是由核心單位排列形成，在設計的遊戲情境中，讓幼童認識「樣式」之後，還要幼童在樣式中發現一組一直持續出現的重複單位—「核心單位」。幼童除認識樣式外，也需獨自尋找樣式中的單位，而核心單位的概念必需由教師加以說明。

T：大家要來找出單位！什麼是單位呢？就是紅、黃、藍一組完了以後，還要再一組紅、黃、藍，而紅、黃、藍這就是一個單位。所以請你們要找到單位，在哪裡？畫看看！

老師請一位男生來畫在兩組紅黃藍之間用“/”隔開，再畫第三組單位，如 

因為在多種變項元素組成的樣式中，能順利解題需要單位化（歸納、組織元素為一個單位）的能力。核心單位在樣式中是持續出現，Tsamir 等人（2015）認為在延續的重複樣式中，幼童才能辨識並標示單位。而 Orton 與 Orton（1999）提出為加強幼童樣式循環概念應由幼童去延伸樣式，而一次只增加一個元素，並標示樣式單位。

### 1. 標示不相鄰元素樣式單位

教師安排幼童創作樣式瞭解他們辨識樣式單位的理解程度。教師提供四種不同顏色與圖形（☆○△◇）的彩色紙，幼童把這些圖形當吊飾黏在一長條的緞帶上，掛在牆壁上佈置教室，而各組都能正確排列出 ABCD 四個元素不相鄰的樣式。

因此，教學一開始教師以遊戲帶領幼兒探索樣式，把樣式概念蘊含在遊戲中，幼童從遊戲瞭解數量形關係，而學會辨識樣式及標示出單位。

## 2. 標示相鄰元素樣式單位

為使幼童能從不同的樣式結構中探索、辨識單位及擴展樣式規則，進而作臆測推理。教師引導幼童在有結構且多向度的樣式中找核心單位。樣式教學活動從簡單的重複樣式 ABC 的結構，改變為增加兩個元素且有相鄰的 ABCCD 重複樣式結構。

教師以「大家來修橋」的故事作為學習脈絡—從東村到西村要經過一座橋，橋面上缺一個洞，村民一直不理會，直到有一天刮颱風，橋斷了，帶給兩村村民生活物資供給及交通不便，村長才叫大家來修橋，他規定橋面要以四種顏色的木頭鋪地板，鋪的樣式需有顏色相鄰如 ABCCD，使修好的橋成為一座彩色橋。教師拿出一張畫有一座四色橋的大海報，請幼童站在這座橋前面先辨識 ABCCD 樣式，再標出單位。全班分成兩隊比賽在教室的地板上造橋，在幼童合作下用四種色紙排列出 ABCCD 樣式，造出兩座彩虹橋，如圖 6。

活動結束後，教師也發下四種顏色的色紙剪成長條形，分給每一位幼童自由創作造彩虹橋，幼童把色紙依序黏貼在畫好的吊橋上（圖畫紙），再由教師檢查學習活動的成果。但在個別造橋時，全班有四分之一的幼童必須撕掉色紙重貼，因為幼童貼錯樣式。由於這個作業增加了相鄰的元素，且師生之間的使用表徵方式不同所致。

教師教學時遇到與幼童會使用符號表徵的差異影響教學成效。如教師在呈現樣式單位時會使用數字表徵代表樣式的「序列」。以 12345 代表「數量」，如 1 代表 1 個；2 代表 2 個；3 代表 3 個。教師在「大家來修橋」活動中，標示單位內重複相鄰的元素時，以口訣提示幼童四種顏色排列的變化，以 1121 表徵四種顏色排列方式，也當作拆解樣式結構的密碼。如 1121 的 1 表示一種顏色出現一次，2 表示顏色出現兩次，所以五條色紙出現的數量為 1121，但與幼童的表徵方式大不相同。因為幼童標示物件排列為 12334，1 代表綠色，2 代表橘色，3 代表黑色，而 33 表示黑色出現兩次，4 代表咖啡色。因此，師生之間不同的表徵方式，致使幼童在學習這類樣式標示單位時，形成認知衝突，故有四分之一的幼童無法完成課堂的樣式作業，但經解說後，幼童全部完成作業。



圖 6 ABCCD 樣式

由此活動顯示幼童能以符號表徵從事相鄰元素樣式推理。同時，幼童也能完成 ABCCD 樣式推理，克服 Rittle-Johnson 等人（2013）的研究所提有些幼童無法複製 ABB，反而會把 ABB 變成 ABAB 的樣式排列的困難。另外，大部分幼童能掌握樣式規律完成單位內有重複元素且相鄰的樣式作業，未如吳昭容與嚴雅筑（2008）研究發現在解樣式題時幼童只用一一對應的方式解題，反而是大部份的幼童會運用數字表徵解題。



### (三) 臆測樣式單位

幼童能從 ABCCD 樣式學會掌握單位中變化的規律，在辨識大單位樣式後，幼童要進入複雜重複樣式的臆測。教師先帶領幼童學習臆測完整單位重複樣式，再臆測不完整單位重複樣式，從直線複雜重複樣式深入非直線複雜重複樣式解題，並能類推單位及臆測單位形成一般化。

#### 1. 複雜重複樣式完整單位臆測

樣式核心單位的長度會影響幼童樣式推理。由於幼童在臆測樣式之前，要先找到樣式變化規則才能臆測樣式。在直線樣式中為協助幼童尋找核心大單位，教師先把大單位細分成幾個次單位，並配合故事引導幼童看到單位元素變化的規律。

教師先回到第一步驟讓幼童學習尋找樣式，從排列的物件中找出第一個樣式單位。幼童由「下午茶」的故事進入複雜樣式概念學習。故事描述：大象邀請青蛙、大熊及小白兔來他的家喝下午茶，大象準備他們愛喝的飲料分別是青蛙愛喝的綠茶、大熊的紅茶及小白兔的奶茶。倒飲料時，青蛙說他太渴了，要先喝兩杯綠茶，而大熊只要一杯紅茶、小白兔一杯奶茶，排列出「綠茶-綠茶-紅茶-奶茶」。大家喝了飲料之後，大熊突然說他也要喝兩杯紅茶，所以大象就倒給青蛙綠茶一杯、大熊紅茶兩杯，小白兔奶茶一杯即「綠茶-紅茶-紅茶-奶茶」。倒完之後，這時小白兔也叫著說他也要兩杯奶茶才公平「綠茶-紅茶-奶茶-奶茶」。

C：啊！每一種茶都有人喝兩杯，三種茶，就每一種都喝掉四杯！輪三次共 12 杯，很公平！所

以大象這一回就倒了十二杯茶給大家，再一回合也是十二杯！

T：每次都會重複出現就是核心大單位，也是樣式推理中要掌握的。

為讓幼童能理解核心單位元素變化，教師安排讓幼童在真實經驗中學習樣式，除提供預備好的三種茶讓幼童品嚐外，教師把三種茶的圖卡排在白板上，讓幼童排出核心單位，再由幼童在白板上標示出單位，如圖 7。



圖 7 直線複雜重複樣式

幼童能從這個活動中領悟到樣式的變化，瞭解一個大的核心單位是由三個元素變化增長重複組成。同時，在教師的帶領下，幼童在標示單位時有大單位的概念。幼童從「下午茶」的活動中，能看到三種飲料數量的變化，得知樣式元素變化的規則及樣式結構。

## 2. 不完整單位重複樣式臆測

教師為讓幼童能在樣式結構中臆測單位，設計不完整單位的樣式結構，先讓幼童辨識完整樣式的單位之後，再讓幼童發現不完整單位欠缺的元素，而補足合適的單位元素，進而瞭解樣式的深層結構。再以「下午茶」情境為複雜重複樣式學習的脈絡，以三種飲料作為單位元素設計不完整單位的樣式供幼童推理。

教師先以遊戲方式讓每位幼童持有三種飲料的卡片，排成一行，再把指揮棒交給一位志願當領袖的幼童，依照三種元素（綠茶、紅茶、奶茶）每輪一次增加一個元素為原則排成重複樣式，再由領袖以指揮棒切割單位，找出大的核心單位，而元素排列可由領導者決定從那一種飲料開始排起，但必須排出三個單位以上的重複樣式，而其中最後的單位要不完整。在練習活動結束後，教師讓幼童練習不完整單位的樣式臆測，提供的樣式作業如下圖 8：

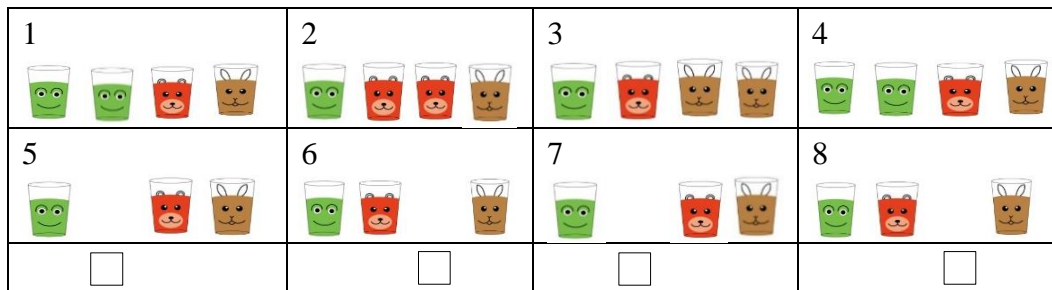


圖 8 不完整樣式單位作業

在圖 8 的作業中，教師把樣式的核心單位分成三個次單位，先讓幼童明白每個單位元素變化的情形，再讓他們推測出下一個延續單位的變化，並補齊單位中欠缺的元素。幼童以符號表徵單位元素，可用繪畫、數字、語言，圖表表徵數學概念和關係 (Greenes, 1999; Owen, 1995)。這個作業需要幼童先確認單位後，再把空缺處以顏色表徵飲料。幼童以綠紅棕三色塗滿圖 8 的正方形空格完成作業。如在 5 的格子裡應補上綠茶，故正方形的框框要塗綠色。

整體而言，這個作業有 88% 幼童完成，其餘未完成的幼童大都在表徵符號轉換上有困難，因為這個作業需要幼兒調整他們的認知結構，和記憶飲料的表徵顏色與樣式結構，並克服在不完整單位結構中完成任務。依 Tsamir 等人 (2015) 的研究發現，幼童較習慣在線性且完整結束單位的樣式結構中解題，若在延續的樣式中，給予不完整的單位，幼童無法正確的臆測這類樣式及瞭解樣式的結構，幼童更無法延伸這類樣式。而依本研究進行不完整單位複雜重複樣式的教學下，有 88% 幼童能完成這類的作業。

### (四) 延伸及驗證非直線複雜重複樣式

幼童在辨識簡單重複樣式時會參照前面出現過的單位，以左右手對應的方式尋找單位，左手指著前面單位的元素，右手搜尋下一個單位的元素，以一一對應的方式依序找尋相對應的元

素，如左手食指按著 A，右手手指跟著找下一個單位中的 A，依此方式來回搜尋，直到每一單位中的每個元素都對應到為止，才完成樣式辨識任務。由於本研究設計的複雜重複樣式結構，樣式單位是由三個元素變化數量及方向而成，元素的排列依序輪流加 1 且相鄰，核心單位共有十二元素，樣式的結構較為複雜。幼童必須掌握樣式排列的規則才能臆測及延伸樣式。因此，若幼童仍固著心智解複雜重複樣式作業時（吳昭容、徐千惠，2010），以一一對應的策略辨識核心單位，在延伸樣式時就會失敗，因為應用一一對應策略在視覺廣度受限之下，無法掌握樣式大單位元素的變化。

另外，在複雜重複樣式的排列上加上方向的變異，難度高將挑戰幼童樣式推理的能力。前述幼童已熟悉直線單位元素同方向排列方式，當複雜重複樣式的排列方向改變，延伸樣式時須注意到單位中元素的排列方向是否一致？因此，幼童要能掌握單位元素數量的改變及方向變換發展出新的解題策略因應。

### 1. 切割核心單位延伸與驗證樣式

為幫助幼童克服非直線複雜重複樣式的難度，教師的教學策略是先將核心大單位切割成三個小單位，讓幼童先掌握以一個小單位中元素的變化，如 AABC，再檢查第二小單位 ABBC，最後再查看第三個小單位 ABCC 的排列。當幼童理解三個元素各輪流增長一次後，再結合三小單位為一個大的核心單位，然後，再找出下一個核心單位延伸樣式。

在延伸非直線複雜重複樣式教學活動中，教師仍以故事引入樣式推理，以幼童生活紀律為主題，以「阿平菜單」故事為脈絡，描述阿平愛吃零食，不吃正餐導致肚子痛，為幫助阿平建立良好飲食習慣，請幼童幫忙設計菜單，教師問他們建議阿平應吃哪種食物最健康？教師用圖形讓幼童聯想食物種類、表徵食物及排列食物，如圖 9，媽媽的菜單。

老師拿出圓形、正方形及三角形，分別問這三種圖形可以代表什麼食物，拿出圓形時，

C：荷包蛋、蘋果、西瓜、...

老師把幼童所說的食物圖片排列在圓形圖片的下方，如圖 9。

T：接著我們要來比賽，排兩排，這是媽媽的菜單喔！

教師畫出餐桌擺放盤子的順序，先讓幼童瞭解每一盤食物擺放的原則，一天三餐有三個盤子，由幼童分兩組排列食物樣式，並標示單位。老師在白板上各貼了 9 個盤子，第一個盤子放 2 個圓、1 個三角形跟 1 個方形，第二盤放 1 個圓、2 個三角形與 1 個方形，第三盤放 1 個圓、1 個三角形跟 2 個方形。老師指著盤子

T：是從左邊開始，你們要注意方向喔！這是媽媽的菜，請看上面的圖形早餐中餐晚餐為一個單位，所以是一天，那上面總共有幾天呢？

C：3 天

T：那我現在請一位小朋友們上來幫我畫單位，一天為一個單位喔！一天結束之後這樣才會重新開始。

接著小朋友開始輪流上台貼上每天不同的圖形變化。

T：眼睛睜大一點來看看喔！早餐午餐晚餐，為一個單位喔！之後每位小朋友輪流上去貼圖形，比賽結束之後作驗證。

T：我們來看看左邊的對不對？左邊的小朋友在早餐貼上 2 個圓、1 個三角形跟 1 個長方形，在午餐貼上 1 個圓、2 個三角形跟 1 個長方形在晚餐貼上，1 個圓、1 個三角形跟 2 個長方形（各重複 3 次）。

T：左邊的答對了！我們來看看右邊的小朋友在早餐畫上 2 個圓、1 個三角形跟 1 個長方形，午餐畫上 1 個圓、2 個三角形跟 1 個長方形，在晚餐畫上 1 個圓、1 個三角形跟 2 個長方形（各重複 3 次）。



圖 9 以圖形表徵食物

當幼童瞭解核心單位方向不同及單位元素之間的變化，再經教師的提示與帶領驗證以及在全班幼童共同監控下，幼童正確完成切割單位重複樣式。活動結束後，幼童以個別練習方式完成非直線切割單位樣式作業，如圖 10，是其中的一名幼童在盤子上面依數量的變化畫三種幾何圖形的排列方式，並在連結線上以藍色線標示單位所在。全班的幼童 100% 能完成非直線切割單位重複樣式的作業。

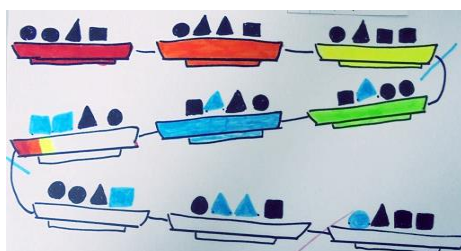


圖 10 切割單位的複雜重複樣式

## 2. 延伸與驗證未切割核心單位重複樣式

未切割核心單位是指樣式核心單位由三個元素各增長一個元素，且元素之間是連續相連，如 AABCABBCC 組成，加上延伸時排列方向會改變。幼童學習這類樣式的先備經驗須熟練已切割的核心單位複雜重複樣式。

這類的樣式安排「白鵝農莊」、「青青草原」及「照顧」三堂課進行教學。教師仍帶領幼兒先辨識樣式、標示單位、臆測單位及延伸單位。至於，未切割核心單位重複樣式的第一堂課「白鵝農莊」教學後，只有 51% 幼童完成樣式作業。因為這是幼童初次接觸這類的樣式，再加上課堂作業要求幼童標示單位後，畫出多延伸一個單位，如圖 11。因為幼童遇到標示核心單位的困難，為克服難題，教師再設計「青青草原」活動。在進入非直線切割單位及切割單位的解題中，教師幫助幼童先學習樣式表徵。教學活動由幼童以分組合作競賽方式練習這類的樣式，幼童扮演小動物玩類似母雞帶小雞的遊戲，組員戴幾何圖形頭套表徵動物如三角形表徵豹、正方形表徵象、圓形表徵熊。為抵抗怪獸侵襲，隊員排成核心單位組成守護團隊，由隊長帶領討論標示單位，每組為一個核心單位，連續排三組核心單位，並蜿蜒排列形成堡壘，再由隊長校正每組樣式排列的正確性。這次活動由幼童自發性排列樣式，以分組的方式組成核心單位，並在討論中延伸樣式與校正樣式，在標示單位及校正樣式時由兩隊隊員自行討論老師未介入，有 64% 幼童能完成樣式作業。

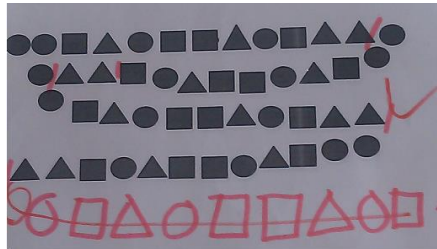




圖 11 「白鵝農莊」複雜重複樣式作業

教師再安排第三次未切割核心單位複雜重複樣式的學習-「照顧」。「照顧」的故事由「老樹上的小鳥」繪本改編而來，描述樹上一隻母鳥除了照顧兩隻雛鳥外，還要特別去照顧鄰近一棵樹上的老鳥，母鳥每天不停在兩棵樹之間來回餵食雛鳥及老鳥。教師以■●▲圖卡表徵三種食物，以圖形讓幼童聯想食物。幼童討論後以圖形表徵鳥兒愛吃的食物。母鳥一天要餵三餐，每天來回的餵，連續餵食好幾天。幼童依序排列出老鳥、雛鳥及母鳥所需的食物，老師拿圖卡給幼童排列樣式，延伸及驗證樣式，如圖 12 所列。

T：請小朋友上來排母鳥餵食的情形，再由大家來驗證排得對不對？	
C1 在白板上排 1 個方形 1 個圓形 1 個三角形	排列樣式
C：錯了！	
T：錯在哪裡？	校正
C：要 2 個正方形。	
T：我們讓他重新排排看。	
C1 排 1 個方形 2 個圓形 1 個三角形，1 個方形 1 個圓形 2 個三角形。	重排樣式
T：大單位到底在哪裡呢？我們請一位小朋友上來畫畫看。	辨識單位
C2：2 個三角形那邊畫一條線。	
T：那第 2 天呢？	延伸樣式
C2：在 2 個三角形那邊畫一條線。	標示單位
T：為什麼知道大單位在哪裡？	臆測
C2：因為看清楚了！	
T：那是怎樣看清楚？	
C2：因為到 2 個三角形之後又重複了。	延伸
T：喔，原來是一直再重複阿！	驗證
T：那怎樣的變化？	
C2：1 個長方形變成 2 個又變成 1 個。	
T：那圓形呢？	
C2：小朋友說：1 個圓形變成 2 個又變成 1 個。	
T：那三角形呢？	
C2：是 1.1.2。	
	以符號表徵作驗證

圖 12 「照顧」延伸與驗證樣式範例

在這個活動中，幼童瞭解單位元素變化的關係，從辨識樣式、標示單位，並修正樣式的延伸樣式。幼童在驗證樣式時，會使用數字符號表徵作驗證。顯示，在高階複雜重複樣式推理的過程中，幼童練習圖示及符號的表徵。圖示的表徵主要是先讓幼童聯想幾何圖形可表徵的食物及動物，同時加入脈絡化的解題的背景，幼童較能理解這類複雜的樣式。教師並讓幼童有個別解題及加入「驗證」樣式練習的機會，過程中教師引導幼童校正，不斷的澄清元素變化的部份。同時，課堂樣式作業也簡化複雜度，如圖 13，列與列之間的距離拉開後，教學結果是幼童可以 90% 完成作業。經驗證樣式後，幼童能掌握概念排列出正確樣式核心單位是  .

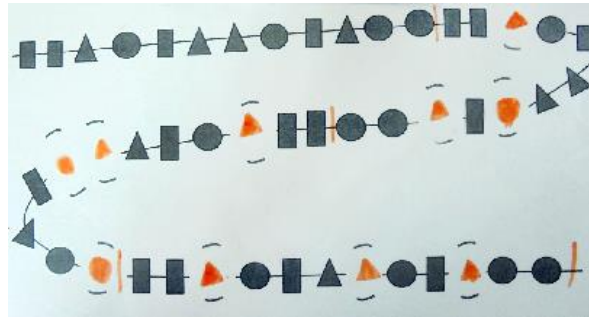


圖 13 「照顧」複雜重複樣式作業

教師為讓幼童能臆測之後正確延伸樣式，改變樣式評量作業的方式，而以移動式的作業讓幼童驗證完成任務，教師用類似 S 型的紙條貼在白板上，紙條上面貼有長方形、三角形及圓形不同數量變化的樣式，讓幼兒辨識單位。作業的目的為讓幼童學習自我驗證，確定所臆測的是否正確？教師在長條型的紙條貼上圖形，且■▲●圖形排列成不完整單位，讓幼兒以黏貼的方式填滿空缺處。S 型紙條先出現 AABCABBCABCC 樣式，再出現 AABCABBCAB\_\_、AABCAB\_\_CABC\_\_，讓幼童臆測下一個單位空白處應出現的圖形，再由幼童拿取正方形、三角形及圓形圖卡放入空白處。幼童在過程中學會審視排列的樣式，因為單位要一直延伸下去至少有三個以上的樣式單位，而且在這類似 S 型的曲線中還要瞭解重複樣式是由大單位 AABCABBCABCC 組成，也要明白因為樣式方向的改變單位元素排列也隨之更動。

在這非直線樣式的學習中，幼童學會核心單位的臆測及延伸樣式，因核心單位元素數目及方向改變，推理教學方式也要變化，而這類的樣式需擴展視覺廣度，且要掌握單位元素變化情形。幼童在這次「照顧」課堂上有 90% 可以完成的樣式作業。幼童在「照顧」的學習表現上，因為這堂課已是幼童第三次學習未切割核心單位複雜重複樣式，所以他們比較能掌握核心單位，並在驗證中確認排列樣式的正確性。

幼童在學習複雜重複樣式的過程中，對切割單位樣式的推理比未切割單位的表現好，而非切割單位複雜樣式經過三堂課學習之後表現才有提升。顯然，非直線未切割的複雜重複樣式對幼童而言是一大挑戰，經過教師多次的引導讓幼童發現樣式單位元素的變化與樣式方向的改變，幼童才會複雜重複樣式推理。在 Krebs (2005) 的研究中發現學生能完成直線樣式解題，但不一定能完成非直線樣式作業，然而本研究設計 S 型的複雜重複樣式經教學引導後，90% 的幼童能完成這類的樣式，也回應 Threlfall (1999) 以蛇形樣式延伸作業發展幼童樣式推理能力的可行性。本研究更從 S 型複雜樣式設計中提供幼童延伸樣式的機會，幼童的表現也如 Warren 與 Cooper (2008) 所提在延伸樣式能看出學童在樣式推理一般化的理解程度。

綜合上述，本研究的複雜重複樣式類型包括直線複雜重複樣式、非直線複雜重複樣式，而教學模式將複雜重複樣式結構藉由尋找樣式-辨識樣式-標示樣式-臆測樣式-延伸樣式-驗證樣式，

先讓幼童瞭解樣式結構進而從事樣式推理。樣式學習軌道也因幼童學習反應而修正，如簡單重複樣式教學線性逐步前進，對於複雜重複樣式的教學則採間接循環的方式，等幼童辨識樣式結構之後再進入下一個階段，同時，在教未切割單位複雜重複樣式時，先將核心單位元素隔開幫助幼童辨識樣式與臆測樣式再延伸。因此，本研究發現幼童經過樣式教學後能提升複雜重複樣式推理能力。

## 二、樣式教學成效

這一部分回應研究問題二，經樣式教學後幼童學習表現為何？這部分藉由兩種評量來檢驗：一種是「課堂樣式推理作業」，即幼童在每一堂樣式教學後的學習表現，另一種為「幼童樣式推理作業」就是在介入教學前後實施的評量。

### (一) 幼童課堂樣式推理表現

「課堂樣式推理作業」有八個作業，包括簡單重複樣式的推理 ABC、ABCD、ABCCD 以及直線複雜重複樣式，教師以故事、遊戲、操作的方式幫助幼童理解樣式概念後完成作業。經教學後幼童的推理表現能超越過去研究的發現，幼童不只會 AB 和 ABB 的樣式推理，還會更複雜的 ABCCD 和 AABCABBCABCC 複雜重複樣式推理。表 2 可看出幼童學習簡單重複樣式時，樣式推理正確率可達百分之百，而在複雜重複樣式學習，尤其在非直線未切割複雜重複樣式表現上，正確完成第 5 至第 8 的「課堂樣式推理作業」平均數從「白鵝農莊」的.52 進步到「青青草原」的.64，最後可以達到「照顧」的.90，顯示他們複雜重複樣式推理能力逐漸提升。

表2

實驗組課堂樣式教學的幼童表現

教學活動	樣式種類	人數	平均數	標準差
1.籃球比賽	簡單重複樣式 ABCABC	27	1.00	.000
2.聖誕吊飾	簡單重複樣式 ABCDABCD	27	1.00	.000
3.大家來修橋	相鄰元素重複樣式 ABCCDABCCD	27	1.00	.000
4.下午茶	直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC	26	.88	.326
5.阿平菜單	非直線性切割單位重複樣式 AABC-ABBC-ABCC	26	1.00	.000
6.白鵝農莊	非直線未切割單位重複樣式 AABCABBCABCC	27	.52	.509
7.青青草原	非直線未切割單位複雜重複樣式 AABCABBCABCC	28	.64	.488
8.照顧	非直線未切割單位複雜重複樣式 AABCABBCABCC	30	.90	.305

註：每一作業正確完成計 1 分；未完成及錯誤為 0 分。

綜合上述的資料分析，本研究結果顯示幼童經樣式教學不只會簡單樣式推理，且會在擴大樣式核心單位下，掌握複雜重複樣式的規律變化作推理。複雜樣式的複雜度包括單位元素的數



目增加及非直線樣式排列。本研究六歲幼童經樣式教學後的表現，如 Mulligan 等人（2012）所提幼童會以不同的方法發展出數量形結構的理解，並注意到樣式單位重複及空間結構；也如 Papic 等人（2011）發現在幼童發展樣式過程中會覺知、記憶並複製排列數量及幾何圖案。同時，本研究更發現實驗組幼童的表現已超越 Papic 等人的研究，幼童能尋找到複雜重複樣式的規律，並進一步能辨識出複雜重複樣式結構找到核心單位解題。再者，過去的研究指出樣式介入教學有成效（Papic, 2013; Papic & Mulligan, 2005; Starkey, et al., 2004），本研究設計教學模式在成人的引導下幼童的樣式推理能力提升，也證實樣式介入教學有效。

## （二）樣式教學成效

### 1. 兩組幼童樣式推理表現

為比較實驗組與控制組學生在不同教學模式下其學習成效的差異，研究者採用單變量共變數分析。為滿足單變量共變異數分析的條件，先進行組內迴歸係數同質性檢定。兩組迴歸線斜率相同，符合共變數迴歸係數同質性假定，接著進行第二步驟共變數分析。以「幼童樣式推理作業」四個測驗的後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績之差異，進行共變數分析。共變數分析結果之  $F(1, 58) = 48.90, p = .000$ ，達顯著水準。由此可知，在不同教學模式下，幼童後測成績進步的幅度達顯著差異，亦即兩組不同教學下，樣式教學模式能提升幼兒的推理能力。

### 2. 實驗組學習成效

根據表 3 的數據資料，實驗組學生在樣式教學後，表現在「幼童樣式推理作業」四個測驗的後測平均數比前測平均數進步 2.63 分。經統計考驗  $t(58) = 10.61; p = .000$ ，前後測的分數有顯著差異。而且幼童在延後測的成績仍保持學習成效，延後測的成績平均數 3.77，標準差 .57。

表3

實驗組與控制組樣式推理表現

	組別	平均數	標準差	調節平均數
前測分數	實驗組	.87	1.17	
	控制組	.67	.88	
後測分數	實驗組	3.63	.81	3.62
	控制組	1.90	1.06	1.92
延後測	實驗組	3.77	.57	3.85
	控制組	2.43	.94	2.45

註：每一作業正確完成計 1 分；未完成及錯誤為 0 分。

從表 4 的數據資料得知，幼童在未接受樣式教學模式教學前，在切割單位非直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC 與未切割單位非直線複雜重複樣式 AABCABBCABCC 的作業表現不佳，因為他們不太會解這類樣式，甚至沒有幼童能解未切割單位非直線複雜重複樣式的作業，因為這題前測平均分數為零，但經教學後，後測平均數可達到.87。又從表 4 的資料顯示，當幼童會解切割單位非直線複雜重複樣式的作業時，也會解未切割非直線複雜重複樣式的作業，實驗組幼童經樣式教學複雜重複樣式推理能力提升。

「幼童樣式推理作業」的解題的表現，在樣式教學前幼童大都無法找到樣式單位正確作答，幼童解第一題簡單重複樣式時，會用計數的策略答題，但經過樣式教學後幼童會以尋找樣式辨識單位的方式作答。當問幼童「你是怎麼知道的？」幼童（C1）會說：「因為有看到樣式」，在延後測時更能快速的作答。

表4

實驗組前後測的表現

幼童樣式推理作業	前測		後測	
	平均數	標準差	平均數	標準差
1.ABCABC	.40	.498	.97	.183
2.ABBCABBC	.40	.498	1.00	.000
3.AABC-ABBC-ABCC	.13	.346	.87	.346
4.AABCABBCABCC	.00	.000	.87	.346

總結，幼童樣式推理透過成人的引導，能掌握較大單位的樣式規律，進而提升複雜樣式推理能力，證實 Papic 等人（2011）以實驗介入樣式教學對於幼童樣式能力有影響，即成人有系統地引入樣式活動對幼童察覺樣式的單位與結構具有明顯的效果。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本研究樣式教學以分解樣式單位結構的方式逐步引導幼兒漸進的學習。先從直線簡單重複樣式再到非直線複雜重複樣式，並依循樣式教學模式步驟實施。樣式教學模式的教學步驟：先帶領幼童尋找樣式、辨識樣式單位、標示單位、臆測單位及延伸單位，最後驗證樣式。在樣式教學過程中，教師以故事及遊戲引導幼童學習樣式推理，以操作練習增強幼童的樣式概念。

由於相關的研究認為學習樣式對學童數學概念的發展有益處，且透過樣式教學能提升幼童的樣式推理能力。本研究以樣式教學模式介入教學提升幼童複雜重複樣式推理能力，研究結果發現實驗組介入教學後，有 90% 幼童能完成複雜重複樣式的作業，也說明實驗組六歲幼童能進

行複雜重複樣式推理，而經樣式教學的實驗組幼童在後測成績的表現上，比控制組的幼童表現佳。可知，樣式教學模式實施有其成效，而成人樣式介入教學可以提升幼童樣式推理表現。

## 二、建議

本研究以介入教學協助幼童重複樣式的推理能力，在樣式學習的類型中強調樣式結構變化，增加元素數量及改變樣式排列方向為操弄變項，探究幼童的複雜重複樣式推理能力表現，並施予介入教學瞭解其成效。而本研究認為未來可進一步作相關研究探討，提出建議如下：

### (一) 增加變項

本研究的複雜重複樣式的教學，只改變兩個變項即單位元素的增加及方向的改變。未來研究可以多增加其他變項，因為樣式推理需要符號表徵的能力，樣式作業可以加入圖形顏色或數字等因素，探測幼童多變項樣式推理能力。

### (二) 研究對象往下延伸

本研究對象以幼兒園大班幼童為主，在認知發展上這階段幼童在數學推理上已具有較成熟的判斷力，經二個月的實驗教學，控制組與實驗組在樣式推理能力上都有增長，顯見樣式教學有成效，但學前六歲以下幼兒是否也可依此教學模式獲得相同的結果，可作進一步的探討。

### (三) 研究評量內容

本研究以四個重複樣式作業來探究樣式教學模式的成效，未來可針對不同的樣式結構、增加作業數量及評量的方式作進一步幼童樣式推理能力的探討。

### (四) 研究內在效度

本研究設計實驗教學，兩組教學者參與實驗教學，其成員背景仍存有差異，未來研究設計應再控制相同教學背景，避免衍生內在效度問題。

### (五) 研究推論

實驗組與控制組的教法從簡單重複樣式至複雜重複樣式，使用材料以幼兒園的教材為主，但實驗組依循樣式教學模式逐步教學，用設計活動與自編材料輔助教學，是否影響到實驗教學成效應再進一步探討，在推論上免有偏誤之慮。

## 參考文獻

- 吳昭容、徐千惠 (2010)。兒童如何在重複中找到規律？重複樣式的程序性與概念性知識。 *教育科學研究期刊*, 55 (1), 1-25。doi: 10.3966/2073753X2010035501001 【Wu, Chao-Jung, & Hsu, Chien-Hui (2010). How do children find patterns in reiteration? Procedural knowledge and conceptual knowledge in identifying repeating patterns. *Journal of Research in Education Sciences*,

- 55(1), 1-25. doi: 10.3966/2073753X2010035501001 (in Chinese)】
- 吳昭容、嚴雅筑 (2008)。樣式結構與回饋對幼兒發現重複樣式的影響。科學教育學刊, 16(3), 303-324。doi: 10.6173/CJSE.2008.1603.04 【Wu, Chao-Jung, & Yen Ya-Chu (2008). The effects of pattern structure and feedback on repeating pattern finding in kindergarten students. *Chinese Journal of Science Education*, 16(3), 303-324. doi: 10.6173/CJSE.2008.1603.04 (in Chinese)】
- 洪明賢 (2003)。國中生察覺數形規律的現象初探 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學, 臺北市。【Hong, Ming-Xian (2003). *The exploration of number and shape of the pattern for middle school students* (Unpublished master's thesis). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 陳英娥、林福來 (1998)。數學臆測的思維模式。科學教育學刊, 6(2), 192-218。【Chen, Inger, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of mathematical conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, 6(2), 192-218. (in Chinese)】
- 陳埤淑 (2017)。中華民國專利第 1564046 號。臺北：中華民國經濟部智慧財產局。【Chen, Ching-Shu (2017). *Taiwan Patent No. 1564046*. Taipei: Intellectual Property Office, Ministry of Economic Affairs, R. O. C. (in Chinese)】
- 趙曉燕、鍾靜 (2010)。國小六年級學童對圖形樣式問題之解題探究。台灣數學教師電子期刊, 24, 1-23。doi: 10.6610/ETJMT.20101201.01 【Chao, Hsiao-Yen, & Chung, Jing (2010). The exploration of solving problems on shape pattern for sixth grade. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 24, 1-23. doi: 10.6610/ETJMT.20101201.01 (in Chinese)】
- Copley, J. V. (2003)。幼兒數學教材教法 (何雪芳、陳彥文譯)。臺北：華騰文化。(原著出版於 1998 年)【Copley, J. V. (2003). *The young child and mathematics* (Xue-Fang Hu & Yan-Wen Chen, Trans.). Taipei: Far Terng Culture. (Original work published 1998) (in Chinese)】
- Bodrova, E., & Leong, D. J. (2007). *Tool of the mind: The Vygotskian approach to early childhood education* (2nd ed.) Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
- Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 23-37. doi: 10.1007/s11858-007-0066-8
- Greenes, C. (1999). Ready to learn: Developing young children's mathematical powers. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp.39-47). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Klein, A., & Starkey, P. (2004). Fostering preschool children's mathematical knowledge: Findings from the Berkeley Math Readiness Project. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 343-360). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Klein, A., Starkey, P., & Wakeley, A. (2000). *Child math assessment: Preschool battery* (CMA). Berkeley, CA: University of California.
- Krebs, A. S. (2005). Take time for action: Studying students' reasoning in writhing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(6), 284-287.

- Lüken, M. M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 138-145). Vancouver, Canada: PME.
- Lynn, M. M. (2013). Is it a pattern? *Teaching Children Mathematics*, 19(9), 564-571. doi: 10.5951/teacchilmath.19.9.0564
- Mouhayar, R. E. (2014). Teachers' ability to explain student reasoning in pattern generalization tasks. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of 38th Psychology of Mathematics Education conference and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 258-265). Vancouver, Canada: PME.
- Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49. doi: 10.1007/BF03217544
- Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., & Robertson, G., (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAMP) in kindergarten. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 796-803). Freemantle, UK: MERGA.
- Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., & Crevensten, N. (2012). Evaluation of the 'reconceptualising early mathematics learning' project. In J. Wright (Ed.), *AARE 2012 Conference Proceedings*. Sydney, Australia: Australian Association for Research in Education. Retrieved from <http://www.aare.edu.au/data/publications/2012/Mulligan12.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London, UK: Continuum.
- Owen, A. (1995). In search of the unknown: A review of primary algebra. In J. Anghileri (Ed.), *Children's mathematical thinking in the primary years: Perspectives on children's learning* (pp. 124-147). London, UK: Cassell.
- Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 609-616). Sydney, Australia: MERGA.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-269.
- Papic, M. M. (2013). Improving numeracy outcomes for young Australian Indigenous children. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 253-281). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6440-8\_13
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396. doi: 10.1080/15248372.2012.689897

- Seo, K. H., & Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 91-104). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Erlbaum.
- Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 99-120. doi: 10.1016/j.ecresq.2004.01.002
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London, UK: Continuum.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Barkai, R., Levenson, E., & Tabach, M. (2015). Which continuation is appropriate? Kindergarten children's knowledge of repeating patterns. In K. Beswiche, T. Muir, & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Vol. 4, pp. 249-256). Hobart, Australia: PME.
- Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In Tso, T. Y. (Ed), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 171-178). Taipei, Taiwan: PME.
- Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.