

李俊賢、王儷儒、李政德（2017）。
創新教學教具教學：立體平面超連結、魔力吸管變變變。
臺灣數學教師，38（1），23-38
doi: 10.6610/TJMT.20161013.01

創新教學教具教學：立體平面超連結、魔力吸管 變變變

李俊賢^{1,2} 王儷儒¹ 李政德³

¹ 中華生活數學推廣學會

² 臺北市立大學數學系

³ 中國文化大學國際貿易學系

本文旨在強調應用數學教具輔助數學教學之重要性。一般的觀念總認為數學教具之取得需要大筆經費挹注，為了打破此一迷思，本研究首創之「魔力吸管變變變，立體平面超連結」係採用日常生活中隨處可得的吸管與迴紋針，設計一個低成本且具備多功能的數學教具，幫助學童明瞭數學觀念以及數學觀念的連結性，尤其是提升學童們三維立體與二維平面互相轉換的空間幾何能力。透過學童們親手做教具的方式，自然輕鬆地玩數學，更是培養學童專注力與提升學習興趣的最佳利器。本研究團隊極力推廣經濟實惠的「魔力吸管變變變，立體平面超連結」，希望能幫助教師們廣為應用於數學教學中。學童們數學能力之培育並非一蹴可幾，著實需要數學老師費盡心力教導之，若能善用教具教學，不但能提升學習興趣，對於數學能力之培養，更能達事半功倍之成效。

關鍵詞：數學教具；數學教學法；魔力吸管

壹、前言

數學被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手。其中，空間能力（spatial ability）的培養一直是教育界所關注的重要議題。空間能力的養成有助於問題解決能力與數學成就的提升，更能應用於工程、機械、物理、設計與藝術...等領域，其重要性可見一般（Fennema & Sherman, 1977; Battista et al., 1982; Fennema & Tartre, 1985; McKenzie & Padilla, 1986; Humphreys et al., 1993; Keig & Rubba, 1993; Habraken, 1996; Bannatyne, 2003; Hartman & Bertoline, 2005; Alkan & Erdem, 2011）。

有鑑於此，【國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域】中明定「幾何」為數學內容的五大主題之一，更強調為了提升學生的數學學習興趣，讓學生專注於數學學習，減少學生失誤的挫折，教育工作者應該著重於數學課程的規劃、教科書呈現的方式以及教學方法的創新等三個面向加以鑽研。¹雖然如此重視「幾何」教學，Mullis et al. (2004) 與 Mullis et al. (2008) 卻在「國際數學與科學成就趨勢調查」(Trend in International Mathematics and Science Study) 的測驗中，發現台灣學生在幾何部分的得分表現較差。第一線的數學教師亦普遍認為，中小學生數學能力的最大弱點在於幾何的學習，其中空間能力的學習尤其不足，特別是學習內容為二維平面與三維立體互相轉換的空間幾何能力，更突顯出同學們學習的困難。

究其原委，不外乎三維立體教具之取材不易，實務上，數學教師會利用教科書廠商提供精緻的立方體、長方體塑膠材質之教具，課堂上同學們只能看著老師的示範教學，而且這些教具無法與二維平面圖形連結，自然導致空間幾何學習成效不佳的結果。

職是之故，如何讓孩子們對於空間幾何能力的學習能夠陶醉在其中而樂此不疲，進而解決同學們空間幾何能力學習困難的問題，將是本文所欲探討的主題。透過數學教具教學，我們首先提出「魔力吸管變變變，立體平面超連結」的概念，利用日常生活中隨手可得的吸管與迴紋針，設計做中學 (learning by doing) 與玩數學的數學教室²，讓學童們對於「學幾何」一事能樂在其中，進而大幅提升學習幾何之興趣；更在做中學的過程中，經由實物操作的訓練，使得學童們皆能提升二維平面與三維立體互相轉換的空間幾何能力。最後，希望藉由「魔力吸管變變變，立體平面超連結」的概念對於教具教學略盡棉薄之力；相信唯有每位數學老師皆發揮創意教學的理念，才能達成提升每一位學

¹ 請參閱教育部 (2008)。

² 類似的概念請參閱李俊賢、譚曉雯與李政德 (2015)。

生數學能力的教育目標。

本文行文如下：第貳節為文獻探討；第參節針對魔力吸管變變變，立體平面超連結之設計理念加以分析與討論；第肆節則為結論與建議。

貳、文獻探討

空間能力的範疇包括：空間知覺、空間定位、空間關係、空間組織與推理、空間儲存等五項。³唯有透過看的見、摸得著，有形的數學教具（mathematics manipulatives）才能將抽象的空間幾何概念具體化或簡單化。

數學教具的使用有利於學習績效的提升。廣泛地使用數學教具輔助教學，有助於學童們提升抽象數學觀念的理解（Hunt et al., 2011; Kelly, 2006; Ojose, 2008; Ojose & Sexton, 2009; Thompson, 1994）。正因為數學教具的使用能幫助學生快速理解抽象的數學觀念，並以抽象的數學觀念思考問題，進而針對數學問題激發許多不同的解題技巧，因而大幅增加同學們的學習績效（Ball, 1992; Driscoll, 1981; Heddens, 2005; Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989; Suydam, 1986; Suydam & Higgins, 1976; Thompson, 1994; Toptaş et al., 2012）。

觀察老師們針對幾何教學所採用的數學教具，包括：七巧板的使用可使學童瞭解各種不同的平面幾何圖形並且任意發揮想像力排出許多不同的平面幾何形狀；扣條的應用除了介紹平面幾何圖形，更能導入平面幾何圖形中邊長與角的觀念；透過積木的操作可讓學童瞭解立體的概念，譬如：正立方體、長方體與錐體。這些數學教具的使用雖立意良善且成效良好，卻不能同時傳達二維平面與三維立體的空間幾何觀念；換言之，七巧板與扣條僅能應用於平面幾何圖形之介紹，積木僅能傳達立體的概念。因此，若能由老師們發揮創意與巧思，設計能夠連結立體與平面的創新數學教具教學，則不但能使學童瞭解立體與平面的關聯性，更能提升同學們二維平面與三維立體互相轉換的空間幾何能力。

有鑑於此，本文的主要目的係發展一個能夠超連結立體與平面的創意數學教具教學，此一創意教具我們命名為：「魔力吸管變變變，立體平面超連結」。難能可貴之處在於作

³ 另有學者將空間能力分類為：「形體外觀之辨識與建製」、「形體組成要素之辨識、發現與應用」、「形體性質之探究並運用其性質解題」、「形體之切割、重組與變換」與「空間概念」等五項，其與本文之分類有異曲同工之妙。請參見莊月嬌與張英傑（2006）。

者們運用生活中隨處可得的吸管和迴紋針，設計數學教具的操作，使得國小學童在遊戲中快樂地學習，特別是三維幾何圖形直觀感受的建構。下一節將介紹「魔力吸管變變變，立體平面超連結」的製作過程、教學方法與教學目標。

參、分析與討論

援用日常生活中隨處可得的吸管與迴紋針，設計一個好的數學教具，幫助學童明瞭數學觀念以及數學觀念的連結性，尤其是提升學童們三維立體與二維平面互相轉換的空間幾何能力；並且，透過親手作教具的方式，自然輕鬆的玩數學，將是本文所提創新數學教具教學的重要理念。以下將分兩小節進行討論，第一小節為「魔力吸管變變變，立體平面超連結」基本元件之介紹；第二小節為創新數學教具教學之介紹。

一、「魔力吸管變變變，立體平面超連結」基本元件之介紹

製作「魔力吸管變變變，立體平面超連結」的基本元件係為日常生活中隨手可得的吸管與迴紋針。吸管的功用為三維立體與二維平面的邊；吸管的長度即為三維立體與二維平面的邊長，可由教師或學童任意決定吸管的長度並自行裁剪；為了使學童方便對照三維立體與二維平面邊長的相對位置，教師可選擇不同顏色的吸管進行教學。另外，迴紋針將扮演連結點的角色，連結三維立體與二維平面的邊長，亦可視為三維立體的角。然而，迴紋針形成的連結點，基本上可分為三種情形，如圖 1 至圖 3 所示：⁴

圖 1 顯示連結兩個邊的連結點係由兩個迴紋針所組成，一個迴紋針穿入吸管的一邊，兩個迴紋針可穿入兩根吸管，故可連結幾何圖形的兩個邊。圖 2 顯示連結三個邊的連結點係由三個迴紋針所組成，請注意這三個迴紋針必須同時扣在一起，故可連結立體的三個邊，例如：立方體的一個角。同理類推，圖 3 顯示連結四個邊的連結點係由四個迴紋針所組成，請注意這四個迴紋針必須同時扣在一起。學童們必須熟練圖 1 至圖 3 基本連結點的製作，才能進入第二小節之教具操作。

⁴ 有關迴紋針形成的連結點，本文僅介紹基本的三種情形，當然，為了製作多邊的立體時，學童可自行增加迴紋針的數量。

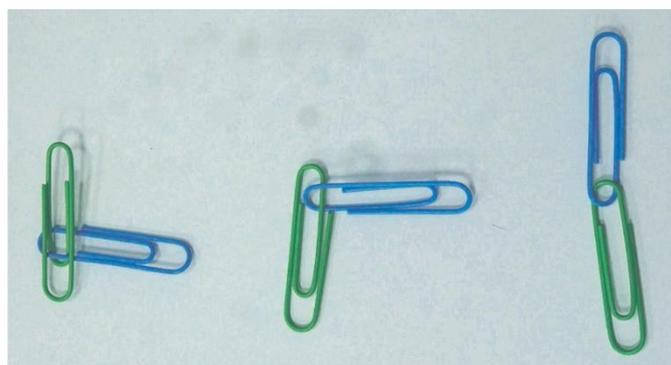


圖 1 連結兩個邊的連結點

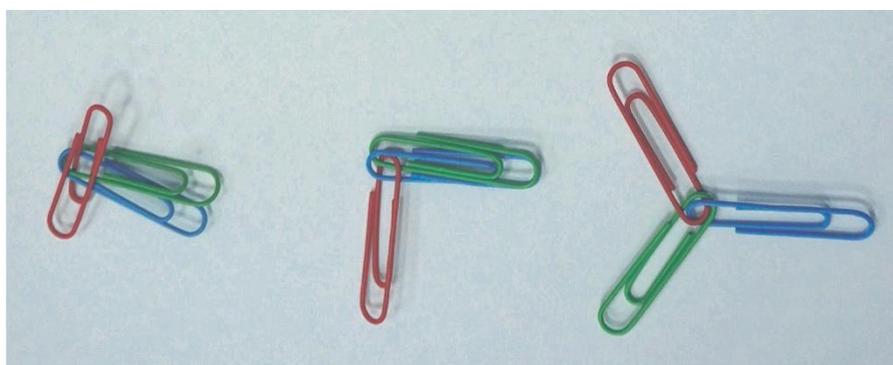


圖 2 連結三個邊的連結點



圖 3 連結四個邊的連結點

二、創新數學教具教學之介紹

本小節將以實際個案的方式介紹「魔力吸管變變變，立體平面超連結」的操作步驟，教學時同學們每人皆有一套吸管和迴紋針，跟著老師操作並記錄。個案一與個案二將說明長方體的例子，若同學們將吸管的長度裁剪成相同長度，則可用來說明立方體的例子，如個案三。個案四將說明三角柱體的情況。

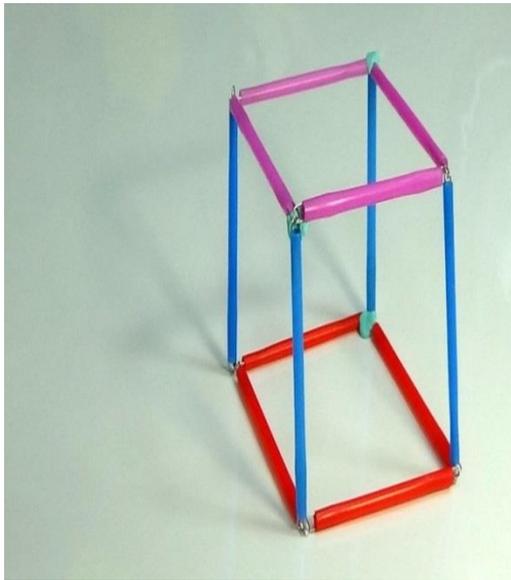
個案一：長方體凸顯上方面和下方面

因為長方體(或正方體)有八個角和十二個邊，所以需要八個連結點和十二根吸管。同學們首先準備八個連結三個邊的連結點(如圖 2)，接著裁剪八根長度相同的吸管，其中四根紫色吸管、另四根紅色吸管；再裁剪四根長度相同的藍色吸管，若三種顏色的吸管長度皆相同則可討論正方體的情況。

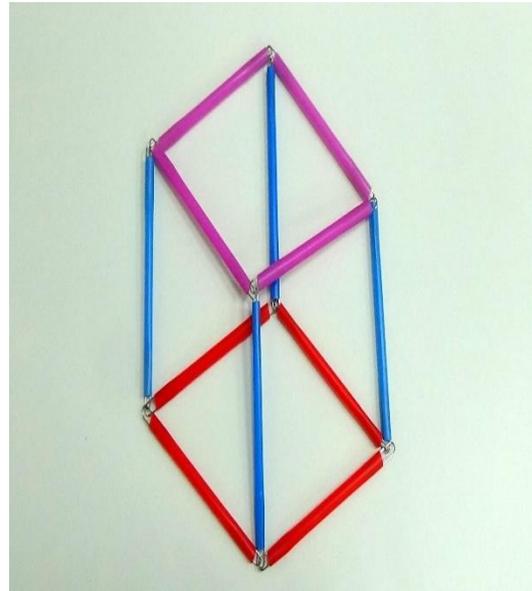
備齊前述之元件，即可組裝成圖(4a)長方體，明顯地，上方面為紫色正方形，下方面為紅色正方形，為使其自行站立，作者於對角輔以黏土支撐(由圖(4a)中左邊的影子可確認長方體是自行站立)，在課堂教學時教師和學童可用雙手提起使其站立形成長方體。接下來即為操作重點，教師和學童可將雙手往長方體的前方推出，即可得到圖(4b)長方體的平面圖(因為圖(4b)中沒有影子，故可確認其為平面圖形)；反之，將圖(4b)長方體的平面圖(2D 概念)以雙手提起，即可得到圖(4a)的長方體(3D 概念)。⁵

藉此反覆來回操作，學童們可觀察三維立體與二維平面間如何互相轉換，並瞭解上方面(紫色正方形)與下方面(紅色正方形)在立體與平面中的相對位置。最後再讓學童將所觀察的事物畫在學習單中，同樣地，以三種顏色呈現，如圖(4c)之透視圖。如此一來，同學們對於三維立體與二維平面間的關係，必有更深一層的認識。

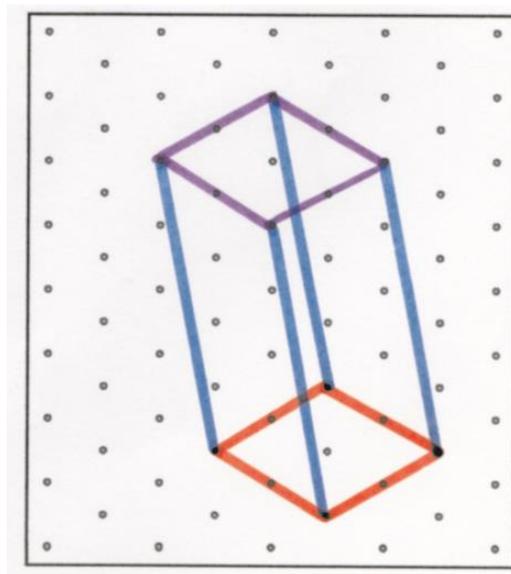
⁵ 專家學者們一致認為數學教具操作對於學童的數學學習扮演著舉足輕重的角色(Cain-Caston, 1996; Castro, 2006; Freer, 2006; Kelly, 2006; Moch, 2001; Peavler *et al.*, 1987; Smith, 2009; Swan & Marshall, 2010; Uttal *et al.*, 1997)。



(4a) 立體



(4b) 平面



(4c) 學習單

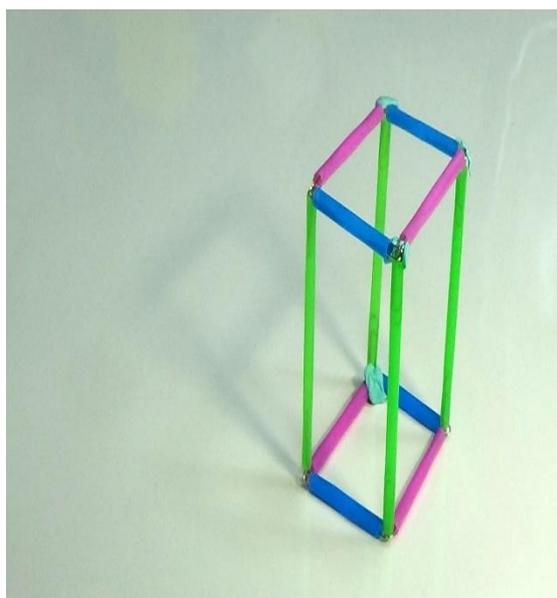
圖 4 長方體凸顯上方面和下方面

個案二：長方體凸顯平行邊

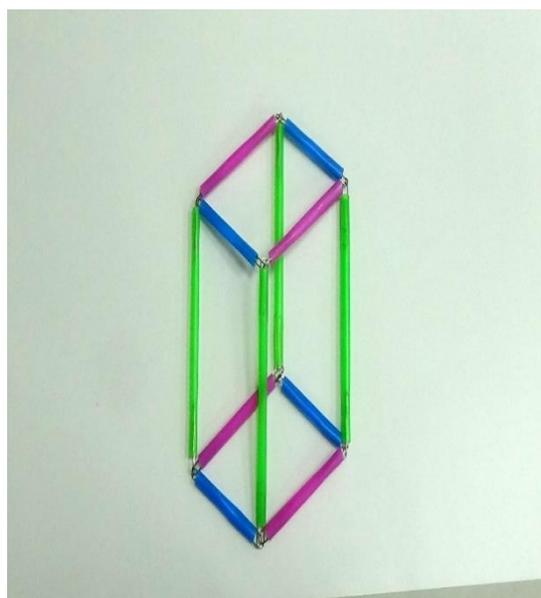
相同地，個案二需要八個連結點和十二根吸管。同學們首先準備八個連結三個邊的連結點(如圖 2)，接著裁剪八根長度相同的吸管，其中四根紫色吸管、另四根藍色吸管；再裁剪四根長度相同的綠色吸管，若三種顏色的吸管長度皆相同則可討論正方體的情

況。

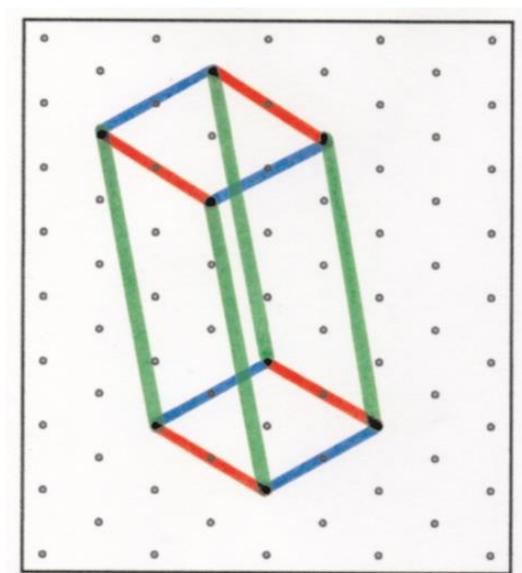
依循個案一的操作方式，藉由反覆來回操作並比較圖（5a）與圖（5b），學童們可觀察三維立體與二維平面間如何互相轉換，並瞭解平行邊在立體與平面中的相對位置。最後，再讓學童將所觀察的事物畫在學習單中，同樣地，以三種顏色呈現，如圖（5c）所示。



(5a) 立體



(5b) 平面

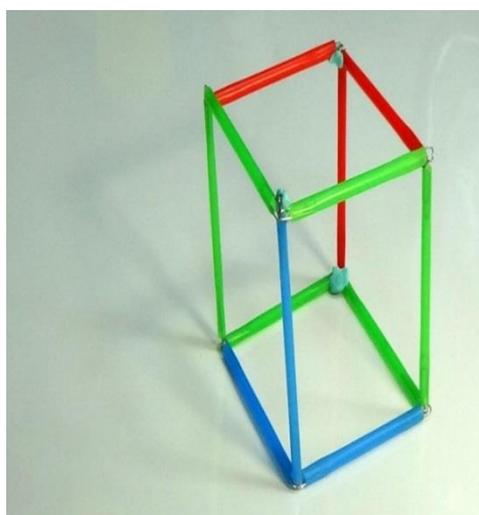


(5c) 學習單

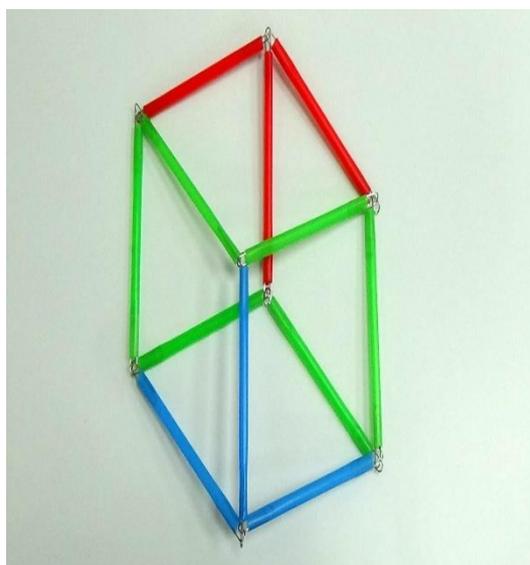
圖 5 長方體凸顯平行邊

個案三：立方體凸顯對角

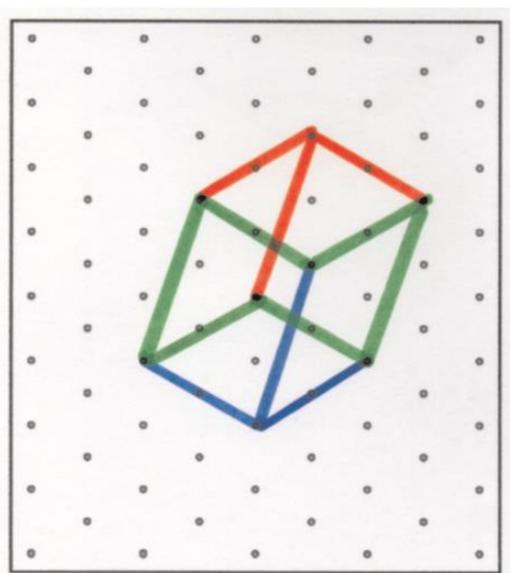
個案三一樣需要八個連結點和十二根吸管。同學們首先準備八個連結三個邊的連結點（如圖 2），接著裁剪十二根長度相同的吸管，其中三根紅色吸管、三根藍色吸管以及六根綠色吸管。三根紅色吸管與三根藍色吸管恰恰形成立方體的對角，如圖（6a）所示。再次依循個案一的操作方式，藉由反覆來回操作並比較圖（6a）與圖（6b），學童們可瞭解對角在立體與平面中的相對位置。最後，再讓學童將所觀察的事物畫在學習單中，同樣地，以三種顏色呈現，如圖（6c）所示。



(6a) 立體



(6b) 平面

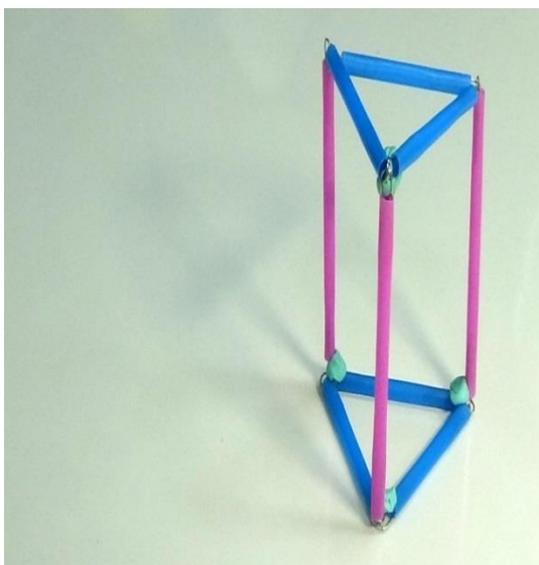


(6c) 學習單

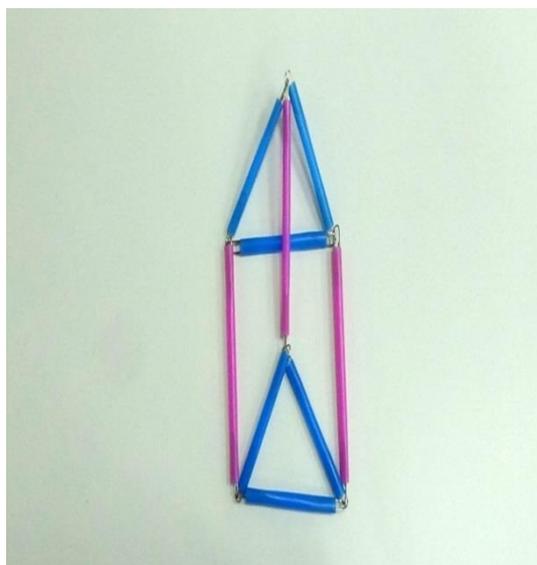
圖 6 立方體凸顯對角

個案四：三角柱體凸顯上方面與下方面

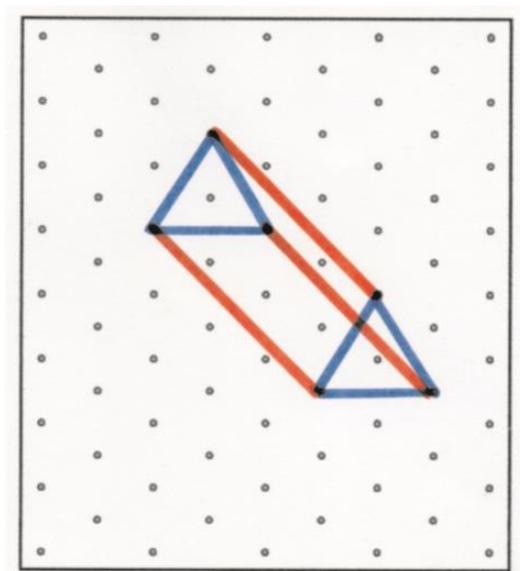
因為三角柱體有六個角和九個邊，所以需要六個連結點和九根吸管。同學們首先準備六個連結三個邊的連結點（如圖 2），接著裁剪六根長度相同的藍色吸管；再裁剪三根長度相同的紫色吸管，組裝完成如圖（7a）所示，此一三角柱體上方面與下方面皆為藍色正三角形。再次依循個案一的操作方式，藉由反覆來回操作並比較圖（7a）與圖（7b），學童們可瞭解三角柱體之上方面與下方面在立體與平面中的相對位置。最後，再讓學童將所觀察的事物畫在學習單中，如圖（7c）所示。



(7a) 立體



(7b) 平面



(7c) 學習單

圖 7 三角柱體凸顯上方面與下方面

接下來介紹三角錐體和四角錐體。

個案五：三角錐體

因為三角錐體有四個角和六個邊，所以需要四個連結點和六根吸管。同學們首先準備四個連結三個邊的連結點（如圖 2），接著裁剪三根長度相同的紫色吸管；再裁剪三根長度相同的藍色吸管，若兩種顏色的吸管長度皆相同則可討論正四面體的情況。組裝完成如圖 8 所示，三角錐體能夠自行站立，不須黏土或雙手輔助站立。

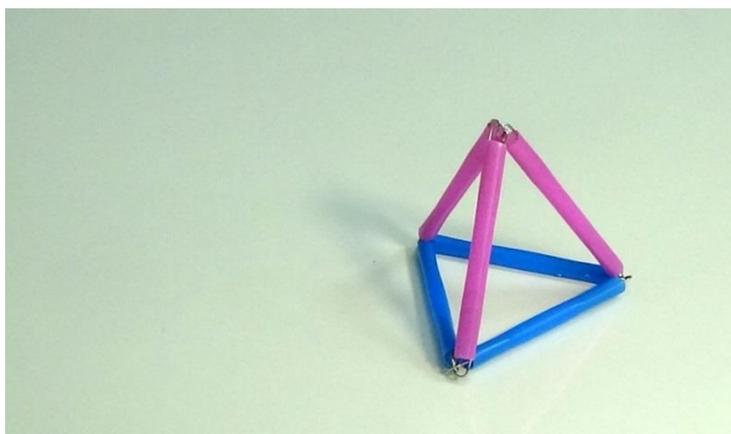


圖 8 三角錐體

個案六：四角錐體

因為四角錐體有五個角和八個邊，所以需要五個連結點和八根吸管。同學們首先準備一個連結四個邊的連結點（如圖 3）和四個連結三個邊的連結點（如圖 2），接著裁剪四根長度相同的紫色吸管；再裁剪四根長度相同的藍色吸管，組裝完成如圖 9 所示，四角錐體能夠自行站立，不須黏土或雙手輔助站立。

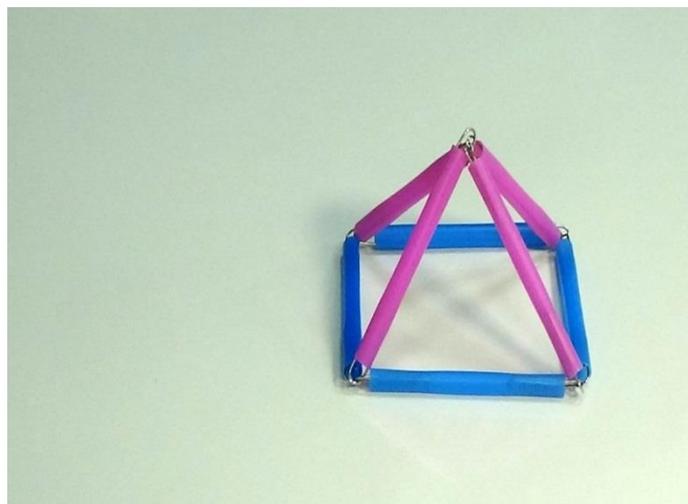


圖 9 四角錐體

個案七：正八面體

因為正八面體有六個角和十二個邊，所以需要六個連結點和十二根吸管。同學們首先準備六個連結四個邊的連結點（如圖 3），接著裁剪十二根長度相同的吸管，為了方便比較，其中八根紅色吸管、四根藍色吸管，組裝完成如圖 10 所示，正八面體能夠自行站立，不須黏土或雙手輔助站立。

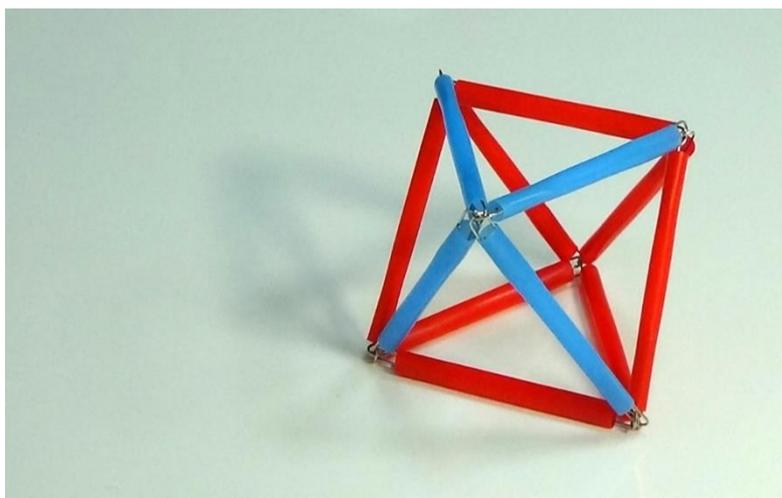


圖 10 正八面體

以個案一為例說明如下，圖（4c）學習單（2D 概念）係由學童觀察圖（4a）之立體圖（3D 概念）後，再將立體圖中不同顏色的邊對應地畫在學習單上，這種藉由觀察立體圖再畫出平面圖的學習過程，將能幫助學生幾何能力的培養。同樣的觀念亦適用於個案二至個案四。當然，個案五至個案七，學童們亦可舉一反三，藉由觀察圖 8 至圖 10 之立體圖（3D 概念）後，再將所觀察之立體圖畫在學習單（2D 概念）上，此一部分就留給同學們自行練習了。值得一提的是，除了本文所列之七個個案外，實務教學上亦可自行創造其他不同的三維幾何形體，此一部分更有待教師們的創意加以補充。⁶

肆、結論與建議

一般的觀念總認為數學教具之取得需要大筆經費挹注，為了打破此一迷思，本研究首創之「魔力吸管變變變，立體平面超連結」係採用日常生活中隨處可得的吸管與迴紋針，設計一個低成本且具備多功能的數學教具，幫助學童明瞭數學觀念以及數學觀念的

⁶ 感謝匿名評審委員提供具有建設性的建議。

連結性，尤其是提升學童們三維立體與二維平面互相轉換的空間幾何能力。透過學童們親手做教具的方式，自然輕鬆地玩數學，更是培養學童專注力與提升學習興趣的最佳利器。本研究團隊極力推廣經濟實惠的「魔力吸管變變變，立體平面超連結」，希望能幫助教師們廣為應用於數學教學中，亦歡迎教師們不吝給予指教。

數學能力之培育並非一蹴可幾，著實需要數學老師費盡心力教導之，若能善用教具教學，不但能提升學習興趣，對於數學能力之培養，更能達事半功倍之成效。⁷

參考文獻

- 李俊賢、譚曉雯、李政德（2015）。創新數學教具教學法：幾何九九乘法表。臺灣數學教師，36（2），1-12。doi: 10.6610/TJMT.20150622.01
- 莊月嬌、張英傑（2006）。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。國立臺北教育大學學報，19（1），33-66。
- 教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。
- Alkan, F. and Erdem, E. (2011). A study on developing candidate teachers' spatial visualization and graphing abilities. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 3446-3450. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.04.316
- Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16 (2), 14-18.
- Bannatyne, A. (2003). *Bannatyne reading, writing, spelling and language program- Multiple intelligences*. Retrieved December 02, 2010, from <http://www.bannatynereadingprogram.com/BP12MULT.htm>.
- Battista, M. T., Wheatley, G. H. and Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 332-340. doi: 10.2307/749007

⁷ 高中數學教學中，三維幾何形體建構的基底（basis）問題是重要的基本概念。然而，本文的目的係提供國小中、低年級教師們不同的思維，採用生活中隨處可得的吸管和迴紋針，透過實物操作，建立國小學童三維幾何圖形的直觀感受。感謝匿名評審委員提供具有建設性的建議。

- Cain-Caston, M. (1996). Manipulative queen [electronic version]. *Journal of Instructional Psychology*, 23 (4), 270-274.
- Castro, M. A. (2006). Preparing elementary pre-service teachers to use mathematics curriculum materials. *The Mathematics Educator*, 16 (2), 14-24.
- Driscoll, M. J. (1981). *Research Within Reach: Elementary School Mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics & CEMREL, Inc.
- Fennema, E. and Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, 14, 51-71. doi: 10.3102/00028312014001051
- Fennema, E. and Tartre, L. A. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 184-206. doi: 10.2307/748393
- Freer, W. D. M. (2006). Keeping it real: The rationale for using manipulatives in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11 (5), 238-242.
- Habraken, C. L. (1996). Perceptions of chemistry: Why is the common perception of chemistry, the most visual of sciences, so distorted? *Journal of Science Education and Technology*, 5, 193-201. doi: 10.1007/BF01575303
- Hartman, N. W. and Bertoline, G. R. (2005). *Spatial abilities and virtual technologies: Examining the computer graphics learning environment*. Proceedings of the Ninth International Conference on Information Visualisation, 992-997. doi: 10.1109/IV.2005.120.
- Heddens, J. W. (2005). *Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives*. Accessed on September 2005 on site <http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html>.
- Humphreys, L. G., Lubinski, D. and Yao, G. (1993). Utility of predicting group membership and the role of spatial visualization in becoming an engineer, physical scientist, or artist. *Journal of Applied Psychology*, 78, 250-261. doi: 10.1037/0021-9010.78.2.250
- Hunt, A. W., Nipper, K. L. and Nash, L. E. (2011). Virtual vs. concrete manipulatives in mathematics teacher education: Is one type more effective than the other? *Current Issues*

- in Middle Level Education*, 16 (2), 1-6.
- Keig, P. F. and Rubba, P. A. (1993). Translation of representations of the structure of matter and its relationship to reasoning, gender, spatial reasoning, and specific prior knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 883-903. doi: 10.1002/tea.3660300807
- Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance based analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3 (2), 184-193.
- McKenzie, D. L. and Padilla, M. J. (1986). The construction and validation of the “Test of Graphing in Science” (TOGS). *Journal of Research in Science Teaching*, 23, 571-579. doi: 10.1002/tea.3660230702
- Moch, P. L. (2001). Manipulatives work! *Educational Forum*, 66 (1), 81-87. doi: 10.1080/00131720108984802
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O. and Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA’s Treads in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J. and Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA’s Treads in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Ojose, B. (2008). Applying Piaget’s theory of cognitive development to mathematics instruction. *The Mathematics Educator*, 18 (1), 26-30.
- Ojose, B. and Sexton, L. (2009). The effect of manipulative materials on mathematics achievement of first grade students. *The Mathematics Educator*, 12 (1), 3-14.
- Peavler, C., DeValcourt, R., Montalto, B., and Hopkins, B. (1987). The mathematics program: An overview and explanation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 9, 39-50.
- Raphael, D. and Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 173-190. doi: 10.2307/749281
- Smith, S. S. (2009). Using manipulatives. In *Early Childhood Mathematics* (4th ed.). Boston:

Pearson Education.

- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), 498-505. doi: 10.2307/749423
- Suydam, M. N. (1986). Research report: Manipulative materials and achievement. *Arithmetic Teacher*, 33 (6), 10-32.
- Suydam, M. N. and Higgins, J. L. (1976). Review and synthesis of studies of Activity-Based Approaches to Mathematics Teaching. Final Report, NIE Contract No. 400-75-0063.
- Swan, P. and Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15 (2), 13-19.
- Thompson, P. W. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, 41 (9), 556-558.
- Toptaş, V., Çelik, S. and Karaca, E. T. (2012). Pedagogical materials use of primary grade teachers in mathematics education. *Elementary Education Online*, 11 (4), 1121-1130.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V. and Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as symbol: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18 (1), 37-54. doi: 10.1016/S0193-3973(97)90013-7