

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第29期

台灣數學教育學會

2012年03月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2012年03月出版 NO.29 2012

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 29 期

2012 年 03 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 29 期

2012 年 03 月

跨課題數學概念探究：不同形式的「帶餘數除法」.....	1
黃德華、黎耀志	
數學教育的公平議題：學習成就落差初探.....	24
鄭章華、林佳慧	
從高職教師角度比較95暫綱、99課綱高職數學B之三角函 數教材的差異	37
廖光永、楊德清	
活動報馬仔.....	54

ISSN 1815-6355

跨課題數學概念探究：不同形式的「帶餘數除法」

黃德華¹，黎耀志²

1、2 香港教育學院，香港特別行政區

摘要

本研究之主要目的是透過評估小六學生對三類不同「帶餘數除法」的式題和應用題的運算表現，分析他們對不同「帶餘數除法」的認識，從而評價他們能否有系統歸納這三類除法的共通概念及找出「帶餘數除法」的關鍵特徵。本研究的對象為香港某小學的 40 位小六學生。評估工具為「帶餘數除法」式題和文字應用題各三題以及一新創的「分數除法」直式題。那三類「帶餘數除法」為整數除整數、小數除小數和帶分數除帶分數。此外，是次研究亦利用了學生訪談作認知分析。是次評估結果顯示，學生在式題和文字題的表現中，涉及帶「餘數」的「整數除法」，幾乎所有學生都能準確計算得「商」和「餘數」。但在求「小數」和「分數除法」的「商」和「餘數」時，答對「商」的仍有接近九成，但計算得式題「小數餘數」的則祇有四成。但奇怪的是，計算得小數文字題「餘數」，卻大增至八成；而於「分數除法」中，成績則極不理想；能計算得正確的式題和文字題的「餘數」的學生同樣只得半成。從與學生訪談及分析學生計算式題和文字題的解，發現學生較能掌握運算步驟，準確計算得運算結果，但大部份學生未能有效理解「帶分數商」與「餘數」的關係，學生亦未能清楚指出這三類除法的共通概念。

關鍵詞：帶餘數除法、共通概念、分數除法直式

壹、研究背景、動機與目的

一、研究背景

香港學生的數學能力在世界數學能力研究中算是很不錯。根據國際教育成就評價協會主辦的TIMSS (Trends in Mathematics and Science Studies) 的歷屆國際數學及科學趨勢研究, 香港學生大多能穩佔前三名。在第五屆TIMSS (2007) 的趨勢研究, 全球65個國家或地區超過42萬名小四及中二學生的比較中, 香港於小學四年級 (Grade 4) 比較, 成績排列全球第1, 中學二年級 (Grade 8) 則位列全球第4。負責是次研究的香港大學教育學院梁貫成教授認為香港小學生數學能力真的很不錯, 尤其數學綜合能力, 更是全球唯一一個地區全部學生能夠達標。單就數學分析能力也較其他64個國家或地區優勝。以往第三、四屆香港學生的數學能力, 一般祇強於運算及解決「常規應用題」(Knowing and Applying problems), 主要因為香港學生多做操練練習, 熟能生巧; 但相對處理「非常規推理題」(Reasoning Problems) 時, 表現每每較差, 這主要因為在學校欠缺「高層次思維」的培訓。但最近10年, 由於教學方法及教材的改變, 學生處理TIMSS的「非常規推理題」也有相當的進步。但若比較「常規應用題」和「非常規推理題」這兩類解題能力則仍明顯發覺香港學生的理解能力仍有很大的進步空間。香港小學生的數學問題也和台灣學生的雷同, 如楊德清 (2000) 的研究, 也清楚指出台灣數學教育長期偏重訓練學生計算技巧, 過份強調傳統解題模式, 導致學生思考不足。

因此在2000年出版的香港小學數學新課程, 其一目標便是強調培訓學生批判解難能力, 並把知識結合生活作經驗 (香港課程發展議會 2000)。香港教育局總課程發展主任 (數學) 吳少階 (2011) 曾於新聞紙上就「三三四」學制的新高中數學課程設計分享中表示「數學課程強調培養學生的批判性思考、數學推理能力、創意、懂得用數學去解難, 在日常生活和情景中, 能夠用數學知識解決問題。」此外, 他亦認為為了讓學生可活用數學, 課程內增設了「數學的進一步應用」和「探索與研究」兩類活動, 作為學生的延展學習活動, 也讓學生欣賞數學。這兩類活動大多以作業 (task) 形式, 進行一些探究性學習。目的是希望學生能在活動的過程中, 把知識應用於生活事情。吳少階更強調「數學的進一步應用」更應橫跨數個數

¹ 詳情見香港大學教育學院新聞稿: http://web.edu.hku.hk/outreach/media/docs/media/081210_TIMSS_R_C.pdf

學課題，看學生是否能融合貫通。

二、研究動機

事實上，小學數學課程也有上述的類似要求，把橫跨數個數學課題的概念和技巧作進一步應用，例如四則運算的學習與應用，便是一具體例子。但對於分佈在不同年級，而具有「相同概念」的課題則未見課程有要求評估學生能否掌握及理解它們的「共通概念」及「運算技巧」。例如在初小和高小的課程中，都有教授「加法」、「減法」、「乘法」和「除法」。教學內容的分別主要是涉及不同的「數字」；如「整數乘法」、「小數乘法」、「分數乘法」便分佈在不同年級的課程中。此外，由於小學課程沒有要求老師透過「類比」的手法進行「不同數字」的加、減、乘、除的跨課題比較和綜合教學，也沒有要求學生分析及找出這些跨年級、跨課題的數學知識包含了什麼相同的概念及運算技巧。因此，對程度稍差的學生，他們學習高小的「小數」及「分數」的加、減、乘、除課題時，便出現了很多問題。

在涉及加、減、乘、除的不同數字的跨課題課程中，研究員於進行是次研究前，曾與研究學校的數學老師作了兩次教學成效反思會議。老師一致指出，高小學生大多未能計算及理解「小數」和「分數」涉及「帶餘數除法」求「餘數」的問題。因此，是次的跨課題數學概念探究，便以不同形式的「帶餘數除法」為研究主題。

三、研究目的

基於上述的情況，本研究目的在評估學生已學習了的三個分佈於小三、小五和小六的「帶餘數除法」的運算技巧及理解除法的「商」和「餘數」的能力。此外，是次研究亦透過和學生面談，分析他們對這三類「帶餘數除法」的認知，評估他們能否清楚指出這三類「帶餘數除法」的異同。因此，本研究的目的是可分為：

- (一) 透過三種「帶餘數除法」（整數除整數、小數除小數、帶分數除帶分數）的測驗，了解學生的運算能力。
- (二) 利用測驗，找出學生在這三類「帶餘數除法」的概念誤解。
- (三) 利用面談及引導性教學，評估學生能否融會貫通地比較出這三個橫跨不同年級的「帶餘數除法」包含的相同概念及關鍵特徵。

貳、研究設計

一、研究對象

研究者選取了香港新界區某一所小學 40 名小六學生為研究對象。該校的學生成績水平於香港而言屬中游水平，學生大多屬二級 (Band 2) 水平學生²。

二、評估測驗 (工作紙) 設計

小六學生已於小三、小五及小六的三個學年學習了整數除法、小數除法和分數除法。其中整數和小數的除法都有涉及求「餘數」的教學例子及練習，但於分數除法中，香港課程並沒有要求教授「帶餘數的分數除法」。但小量教科書的文字題中卻有提供這類除法的文字應用題。

測驗卷的第一頁是三條除法式題，目的是評估學生能否掌握計算出不同除法的「商」及「餘數」的技巧。

第一部份，題目內容：

計算下列各題，找出它們的「商」和「餘數」。需列出計算步驟。

1. $137 \div 11$

2. $24.6 \div 1.5$

3. $6\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

(註，完成後，收回答題紙才派發第二部份三題文字應用題題目紙。)

測驗卷的第二頁為三題不同形式的「帶餘數除法」的文字應用題。目的在評估學生能否理解除法的包含概念，列出橫式及利用概念的情境，糾正前三題式題中「餘數」的錯誤概念，從而準確計算得不同「帶餘數除法」應用題的「餘數」。

第二部份，題目內容：

計算下列文字題。需列出算式及計算步驟，有需要時請寫出直式。

4. 有糖 17 粒，每 5 粒包裝成一小袋。共可包裝得多少袋？餘下糖多少？

² 現時，香港一般把學生程度分為三個級別(Band 1-3)，Band 1 學生為最優良的，Band 3 學生則成績最差。

5. 有絲帶長 5.3 厘米，每 1.5 厘米可製襟花一朵。共可製得襟花多少朵？餘下絲帶多少？
6. 有糯米 $13\frac{3}{4}$ 公斤，釀一瓶米酒需用糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤。共可釀得米酒多少瓶？餘下糯米多少？

第三部份為評估學生能否轉移「整數除法」中的長除法運算的概念和技巧於計算「分數除法」的「商」和「餘數」的問題上。

這個創新的跨課題求「分數除法」的「商」和「餘數」的新方法是由研究員創立的，目的是評估學生能否理解利用「分數除分數」的技巧，求得「帶分數商」的意義，配合「分數乘法」及「減法」概念及技巧，透過類比，以「整數除法」的「長除法」找出求「帶分數除法」的「商」和「餘數」。

第三部份，題目內容：

7. 根據提供的運算，找出「除法直式」內 x、y、z 的值，然後寫出這除式的「商」和「餘數」。需列出計算步驟。

$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$ $= \frac{55}{4} \div \frac{13}{5}$ $= \frac{55}{4} \times \frac{5}{13}$ $= \frac{275}{62}$ $= 5\frac{15}{62}$	$2\frac{3}{5} \overline{) 13\frac{3}{4}}$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> y <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> z	<p>解：</p> <p>∴ x = y =</p> <p> z =</p> <p>∴ $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$ 的</p> <p>商 = _____</p> <p>餘數 = _____</p>
$2\frac{3}{5} \overline{) 13\frac{3}{4}}$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <div style="text-align: center; width: 50%;"> <input style="width: 100%; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> </div> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <div style="text-align: center; width: 50%;"> <input style="width: 100%; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> </div> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <div style="text-align: center; width: 50%;"> <input style="width: 100%; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/> </div>		

參、 資料蒐集及分析方法

本研究以研究者自己編寫的工作紙作為評估工具，搜集了 40 位小六學生對這三類不同「帶餘數除法」的概念認知及運算能力的結果。隨後研究員利用「試算表」先作簡單的成績統計（統計結果見附件 1）、答案數目統計及學生的答題對錯分析（見附件 2）。這些具體數據，其後用以分析學生掌握這三類不同「帶餘數除法」的運算能力。此外，就他們的運算錯處，作出歸類及統計，找出學生對這三類「帶餘數除法」的「餘數概念」的誤解。跟著再利用第三部份的問題及學生訪談的內容分析，為研究提供了充足的資料，用以評估學生能否透過比較這三個不同年級的「帶餘數除法」的認知，歸納得三者的相同概念和特徵；最後利用同類「帶餘數除法」的式題和文字題的成績作對比（分析結果見「肆、研究結果」中所有的「表」和「圖」），分析他們的錯對百分比，藉以評估文字題的情景作用。

肆、 研究結果

由於是次研究主要是評估學生求三種不同「帶餘數除法」的運算能力及概念認知，然後透過訪談分析他們的知識轉移及分析能力。因此，研究員先利用測驗卷評估及分析學生的運算及理解概念的能力。

不同類型的「帶餘數除法」研究結果分析

研究員根據三類不同的「帶餘數除法」的式題和應用題的運算表現作分析，分析結果如下：

一、整數「帶餘數除法」（Q.1和Q.4）

Q.1和Q.4是整數除整數的式題和文字應用題。從40位學生的計算答案得知，幾乎所有學生都能掌握運算技巧及理解題意，找得正確的「商」和「餘數」。

二、小數「帶餘數除法」（Q.2和Q.5）

從表1及圖1得知，88%和100%的學生能計算得式題（Q.2）和應用題（Q.5）的「商」，但奇怪的是，在找出「餘數」的部份，則有60%學生未能於式題（Q.2）計算得正確的「餘數」

答案；他們大多不明白為何要把直式的「餘數」除以10，使「餘數」變為0.6。但於應用題(Q.5)，求「餘數」中，則有80%學生能準確計算得「餘數」，只有20%學生未能把直式的「餘數」8改為0.8。

	Q.2			Q.5		
	Ans	Count	%	Ans	Count	%
正確答案 (商和餘數)	16...0.6	16	40%	3...0.8	32	80%
錯誤答案	16...6	18	45%	3...8	8	20%
	其他	6	15%			
求得正確的「商」	16	35	88%	3	40	100%

表 1：Q.2 和 Q.5 的答案分佈

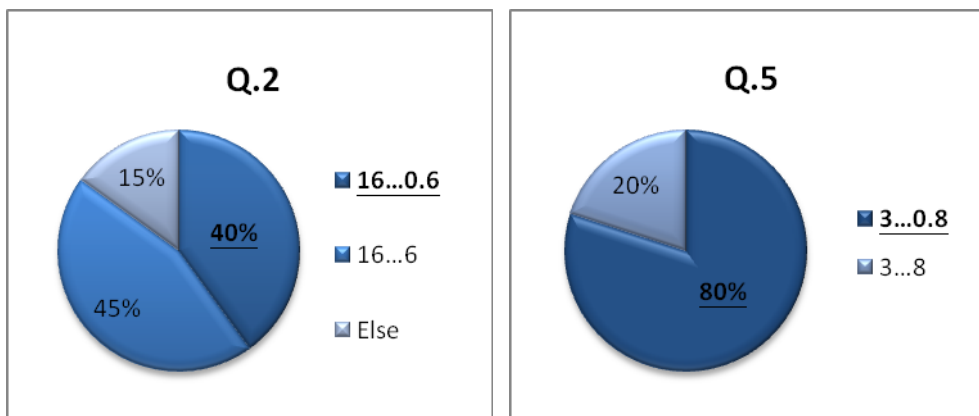


圖 1：有下劃線的為答對 Q.2 和 Q.5 「餘數」的百分比

圖 2 是一學生求「帶餘數小數除法」的誤算例子。

2. $24.6 \div 1.5$

$= 246 \div 15$

$= 16 \dots 6$

商 = 16 ✓ 餘數 = 6 ✗

5. 有絲帶長 5.3 厘米，每 1.5 厘米可製襟花一朵。共可製得襟花多少朵？餘下絲帶多少？

共可製得：
 $5.3 \div 1.5$

$= 3(\text{朵}) \dots 0.8(\text{厘米})$ ✓

圖 2：學生的求小數除法的「餘數」例子

由圖 2 的錯誤分析，得知此學生計算「帶餘數小數除法」式題(Q.2)時，「被除數」、「除數」都乘大了 10 倍，在求得「商」和「餘數」之後，卻沒有把「餘數」除以 10。而在

做應用題 (Q.5) 時, 此學生用相同的方法求得「商」和「餘數」, 不同的是, 他會在計算得「餘數」後, 將「餘數」除以 10。為什麼他能找得文字題的「餘數」, 而不能正確計算得式題的「餘數」? 研究員透過訪談, 與一位答對了應用題 Q.5 的「餘數」, 但答錯了式題 Q.2 的「餘數」的學生交談, 分析他為何會出現這不一致的結果。

訪談

研究員：在題 5，從直式中，「餘數」是 8，為何你的答案，餘下的絲帶是 0.8 厘米，而不是 8 厘米？

學生一：直式的「餘數」應改為 0.8，因為若是 8 厘米，這個長度足夠多做幾朵襟花，每做一朵只需用絲帶 1.5 厘米。

研究員：那為何 8 改為 0.8，不改為 0.08？

學生一：因為未計算直式時，「被除數」、「除數」都是乘大 10 倍，所以「餘數」要除以 10，所以 8 除以 10 等於 0.8。

研究員：那為何 Q.2 的「餘數」6，又不用改為 0.6？

學生一：老師沒說要改，從橫式看， $24.6 \div 1.5$ 等於 $246 \div 15$ ，又等於 16 餘 6。既然它們是「等於」，所以最後直式計算得的「6」便是「餘數」。

研究員：你看「餘數」是 6，是否大於原本的「除數」1.5，那你覺得應否把求得的「餘數」除以 10？

學生一：不需要。因為 $24.6 \div 1.5$ 已變成 $246 \div 15$ ，它們是「等於」的。

研究員：當 $24.6 \div 1.5$ 寫成等於 $246 \div 15$ 時，它們原本的單位已改寫為另一單位，這與 Q.5 文字題的一樣，由 cm 變為 mm。若我們以 6 作「餘數」，這「餘數」的單位，便與原本式題中的單位不一樣了。你明白嗎？

學生一：噢！那即是式題本身是有單位的，只是沒有寫出來。我現在明白了，若最初曾把「除數」乘大 10 倍，在求得直式的「餘數」後，應該還原，除以 10，使「餘數」不會大於原本的「除數」。

從上述交談中，很明顯大部份學生都是依從老師的教導，沒作深入推理分析；而幾乎所有教科書也沒有利用以下的除法式題單位變化分析，教授學生求「小數帶餘數除法」的「餘數」時，要注意隱藏了的「餘數單位」是否和原式的「被除數的單位」一樣。此外，大部份學生亦沒有進行：「被除數」=「除數」×「商」+「餘數」的驗算。正就是這些原因，便導致超過半數（60%）的學生未能求得式題的正確「餘數」。慶倖，近年香港的小學應用題教學，大部份老師都要求學生在求得答案後，要進行「合理性」的「判斷」。例如：題5的文字題，從直式中，學生算得「餘數」是8厘米，後經分析，覺得「餘數」8厘米較造一朵襟花的絲帶1.5厘米的「除數」長，故「餘數」應改為0.8厘米。這便是為何答對文字題的「餘數」的學生多至80%，遠較沒情景及被橫式的「=」等號誤導，僅得40%學生答對的式題「餘數」為多。

除法式題單位分析	
$24.6 \div 1.5$ (即 24.6 單位 A + 1.5 單位 A)	若是包含概念，「被除數」和除數的單位是一樣的
$= 246 \div 15$ (它們的單位已改變了， 246 單位 B + 15 單位 B, 1 個單位 A = 10 個單位 B)	
$= 16 \dots 6$	這餘數 6 的單位是「B」，與原式「被除數」24.6 的單位「A」是不相同的。由於，原式題是單位「A」，所以餘數 6 要除以 10，使之變回單位「A」。
餘數 = $6 \div 10$	
$= 0.6$	
(註：無論除法概念是「均分」或「包含」，餘數的單位一定是和原式「被除數」的單位一樣。)	

圖 3

三、分數「帶餘數除法」(Q.3和Q.6)

學生計算這類除法的表現最差。從表 2 及圖 4 得知，只有 5% 的學生能答對 Q.3 (式題) 和 Q.6 (文字題) 的「餘數」。從他們的求「餘數」的錯誤計算中 (例子見圖 5)，我們不難發覺超過九成學生是不明白怎樣利用分數除法的運算步驟所計算得的「商」去找得所需的「餘數」。原因主要是學生不明白計算得的「帶分數商」，實際是「除數」的「倍數」，他們也未能利用 Q.6 的文字題情境作分析，知道「帶分數」中的「分數部份」與「除數」的「關係」——

不足一倍，故不足夠釀一瓶米酒。

	Q.3			Q.6		
	Ans	Count	%	Ans	Count	%
正確答案 (商和餘數)	4...1/4	2	5%	5...3/4	2	5%
錯誤答案	4...2	16	40%	5...0.15	6	15%
	4...2/17	7	17%	5...15/52	5	12%
	4+2/17	6	15%	5...1.5	4	10%
	其他	9	23%	5...15	2	5%
				5+15/52	2	5%
				Else	19	48%
求得正確的「商」	4 or 4+2/17	31	78%	5 or 5+15/52	29	73%

表2：Q.3和Q.6的答案分佈

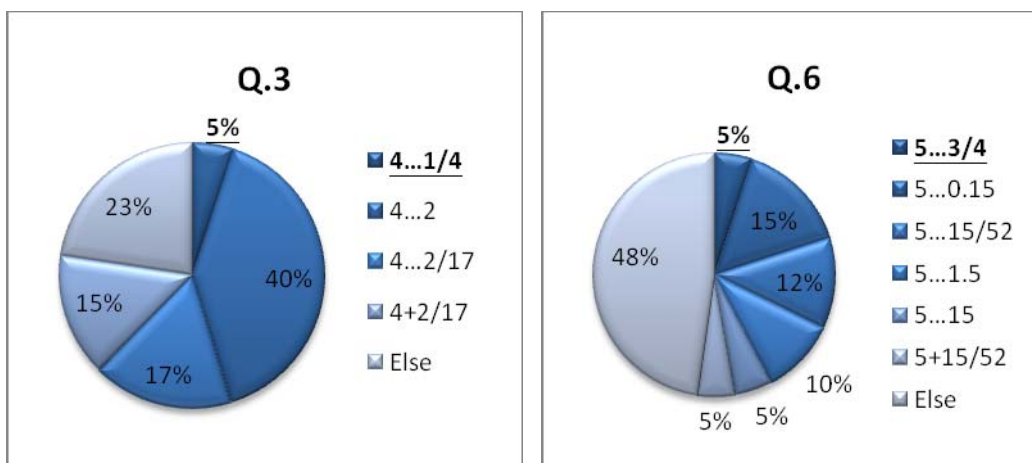


圖4：有下劃線為答對Q.3和Q.6的「餘數」的百分比

3. $8\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

$= \frac{35}{4} \div \frac{17}{8}$

$= \frac{35}{4} \times \frac{8}{17}$

$= \frac{70}{17}$

$= 4\frac{2}{17}$

商 = 4 餘數 = $\frac{2}{17}$

6. 有糯米 $13\frac{3}{4}$ 公斤，釀一瓶米酒需用糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤。共可釀得米酒多少瓶？餘下糯米多少？

共可西裏得米酒

$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$

$= 50$ (瓶)

$\frac{15}{52}$ (公斤)

這是他數。這瓶米酒
多少公斤糯米？

$\frac{15}{4} \times \frac{5}{15} = \frac{275}{52}$

$5\frac{15}{52}$

圖5：學生求分數除法中的「餘數」的例子

由圖5的錯誤分析，得知此學生計算「帶餘數分數除法」式題 (Q.3) 時，求得的「商」為「帶分數」，他便直觀認為：「帶分數」的「整數部份」是「商數」，而剩下的「分數部份」便是「餘數」。此學生在做應用題 (Q.6) 時，則犯了同樣的錯誤。後經過與學生交談，得知他誤解只要「商」的「分數部份」小於「除數」，這「分數」便是「餘數」。他不明白計算得的「商」，實為「倍數」。若要算得「餘數」，便需明白這「分數商」和「餘數」的關係。因此，研究員便希望透過以下的訪談對話，誘導學生找得利用「帶分數商」的「分數部份」和除數的關係，找得求「餘數」的方法。

訪談

研究員透過下列交談和討論，誘導受訪學生糾正錯誤。

研究員：從題6，你的計算步驟十分正確，也能正確找得「商」是 $5\frac{16}{22}$ 。但你知道這 $5\frac{16}{22}$ 與「被

除數」 $13\frac{3}{4}$ 和「除數」 $2\frac{3}{5}$ 的關係嗎？

學生二：不知道。

研究員：那於「8除以2等於4」，你知道2的多少倍是8？

學生二：我知2乘以4等於8，即2的4「倍」是8。

研究員：那麼，說回題6， $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5\frac{16}{22}$ ， $2\frac{3}{5}$ 的多少倍等於 $13\frac{3}{4}$ ？

學生二：我明白啦。 $2\frac{3}{5}$ 的 $5\frac{16}{22}$ 倍等於 $13\frac{3}{4}$ 。

研究員：你也知道釀一瓶酒需要糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤，這 $5\frac{16}{22}$ 代表可以釀酒多少瓶？

學生二： $5\frac{16}{22}$ 瓶。

研究員：那麼，題目6問可釀得米酒多少瓶，我們沒有半瓶或 $\frac{3}{4}$ 瓶賣的；你也答得對共釀得5瓶，那是「商」的「整數部份」，那「分數部份」代表什麼意思？

學生二： $\frac{16}{22}$ 瓶。

研究員：釀一瓶要糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤，那麼， $\frac{15}{52}$ 瓶等於多少糯米？

學生二：啊！我明白了，「餘數」應是 $2\frac{3}{5} \times \frac{15}{52}$ ，給我算算，答案是 $\frac{3}{4}$ ，即餘下糯米 $\frac{3}{4}$ 公斤。

下圖 6 是學生與研究員交談後，得出的正確計算方法：

6. 有糯米 $13\frac{3}{4}$ 公斤，釀一瓶米酒需用糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤。共可釀得米酒多少瓶？餘下糯米多少？

$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$
 $= \frac{55}{4} \div \frac{13}{5} = \frac{55}{4} \times \frac{5}{13}$
 $= \frac{275}{52} = 5\frac{15}{52}$

共可釀得米酒 5 瓶
 餘下糯米 $\frac{3}{4}$ 公斤

$52 \overline{) 275} \begin{array}{r} 5 \\ \underline{260} \\ 15 \end{array}$ 因為 $\frac{15}{52}$ ，不夠 1，
 \therefore 餘下糯米：
 $2\frac{3}{5} \times \frac{15}{52} = \frac{13}{5} \times \frac{15}{52} = \frac{3}{4}$

圖 6：正確計算「帶餘數分數除法」的例子

研究員：現在你能改正求 Q.3 「餘數」的方法嗎？

學生二：我明白，將「商」的「分數部份」乘「除數」，就能計算得「餘數」。

下圖 7 是學生利用「倍」的概念，計算得分數除法中的「餘數」。

3. $8\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

$= \frac{35}{4} \div \frac{17}{8}$
 $= \frac{35}{4} \times \frac{8}{17} = \frac{70}{17}$
 $= 4\frac{2}{17}$

$17 \overline{) 70} \begin{array}{r} 4 \\ \underline{68} \\ 2 \end{array}$

商 = 4 餘數 = $\frac{2}{17}$
 餘數 = $2\frac{1}{8} \times \frac{2}{17} = \frac{12}{4} \times \frac{2}{17} = \frac{1}{4}$

*這裏用了「倍」的概念求餘數

圖 7：利用「倍」的概念求分數除法中的「餘數」

四、運用「整數除法」的概念和「除法的直式」求「分數除法」的「餘數」(Q.7)

從表 3 和圖 8 表達的數據，我們清楚知道 80% 學生都未能把計算整數除整數的直式概念和技巧，轉移至分數除法中。

表 3：Q.7 的答案分佈

	Q.7		
	Ans	Count	%
正確答案 (全答對 x 、 y 、 z)	$x=5, y=13, z=3/4$	8	20%
錯誤答案	$x=5, y=52, z=15$	5	12%
	其他	27	68%
求得正確的「商」	$x=5$	30	75%
填寫正確的「商」和「餘數」	商=5，餘數=3/4	2	5%

註： z 為分數除法的「餘數」

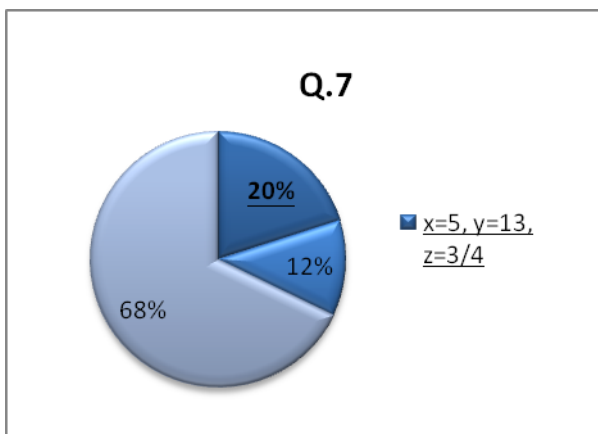


圖 8：有下劃綫為答對 Q.7 的 x 、 y 、 z 的百分比

通過分析學生的錯誤答案，研究員知道：有80%的學生未能想出計算得「除法直式」中的未知數 x 、 y 及 z 的方法，他們覺得束手無策，完全理解不來。儘管有20%學生能正確算得 x 、 y 、 z 的值，但在這小撮答對 x 、 y 、 z 的學生中，只有四分之一的學生明白 z 即是「餘數」，從而能填寫出正確的「餘數」。由此說明大部份學生未能理解直式中哪個數是「餘數」。圖9為學生所作的一個典型錯誤例子。

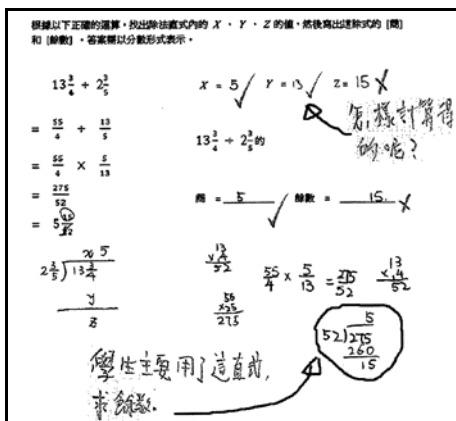


圖 9：學生轉移「整數除法」的「直式運算」至「分數除法」的錯誤例子

其後透過研究員與學生的訪談，研究員知道原校老師並沒有教授過這類「分數直式除法」，學生更說沒有人會用「長除法」計算「分數除法」的「餘數」的。但經過研究員利用「類比」的手法，在要求學生分析 $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5} = 5\frac{15}{4}$ 的「被除數」、「除數」和「商」的關係後，他們都明白，並能掌握找出 Q.7 的 x、y、z 的值的的方法，並懂得比較利用「倍」求「餘數」的結果和利用此「直式分數除法」所計算得的「餘數」是否相同，以判斷此方法是正確的。

以下是研究員利用「類比」的教學方法，幫助學生找出 Q.7 的 x、y、z 的值，從而加深學生利用「帶分數商」求各類除法中的「餘數」的認知和理解。

訪談

研究員：根據 Q.7 提供的分數除法答案， $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5}$ 等於多少？

學生三： $5\frac{15}{4}$

研究員：你能夠把 $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5} = 5\frac{15}{4}$ ，用「直式」寫出來嗎？

學生三：不明白。

研究員： $8 \div 2 = 4$ ，能用「直式」表示嗎？

學生三：明白，可寫成
$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \overline{)8} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$
。

研究員：那麼 $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5\frac{15}{22}$ ，可同樣用「直式」表示嗎？

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13\frac{3}{4}}$$

學生三：可以，可寫成 $\frac{13\frac{3}{4}}{2\frac{3}{5}}$ 。

$$2 \overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1$$

研究員：對，但現在 Q. 7 要求「商」是整數，如 $9 \div 2$ 若「商」是整數，其直式是 $\frac{9}{2}$ 。看回

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{\quad y}$$

Q. 7 的題目 $\frac{x}{z}$ ，你覺得 x 應是什麼整數？會是 6 嗎？

學生三：不會，因為 6 大於上面直式的「商」 $5\frac{15}{22}$ ，應該是 5。噢！我明白，即 $x=5$ 。

研究員：對。若 $x=5$ ，那麼 y 應怎樣計算出來？看看上面 $9 \div 2$ 的直式，8 是怎樣計算得的呢？

學生三：我也明白了， $2 \times 4 = 8$ 。 y 應等於 $2\frac{3}{5} \times x$ ，即 $2\frac{3}{5} \times 5 = y$ 。讓我算算看。 $y=13$ 。

$$2 \overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1$$

研究員：那麼， z 又是怎樣算得的呢？看看 $\frac{9}{2}$ ，它的「餘數」1，是哪些數相減計算得的呢？

$$z = 13\frac{3}{4} - y \\ = 13\frac{3}{4} - 13 \\ = \frac{3}{4}$$

學生三： $9-8=1$ 。噢，明白了， z 應是 $13\frac{3}{4} - y$ ，即 $\frac{3}{4}$ 。

研究員：那麼，根據你計算得的 x 、 y 、 z 的值，你能夠用直式表示 $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$ 的「商」和「餘數」嗎？

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13} \\ \frac{3}{4}$$

學生三：是這樣嗎？

研究員：那麼「商」是多少？「餘數」是多少？

學生三：「商」是 5，「餘數」是 $\frac{3}{4}$ 。

研究員：比較「整數除法」和「分數除法」的「直式」，它們的「餘數」都一定是大於還是小

於「除數」？為什麼？

學生三：當然是小於「除數」。若大於「除數」，表示「商」的整數應可以再大一些啊！

研究員：對，那看回 Q. 6 的文字題，我們是怎樣計算得 $13\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{8}$ 的「餘數」的？

學生三：因為 $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{8} = 5\frac{15}{8}$ ，我是把「商」的「分數部份」乘「除數」，即 $2\frac{3}{8} \times \frac{15}{8}$ 。計算得「餘數」的。

研究員：它們的「餘數」一樣嗎？

學生三：一樣，同是 $\frac{3}{4}$ 。

研究員：那麼，你現在明白計算「分數除法」的「餘數」時，我們可以有哪些方法嗎？

學生三：明白。可以利用「帶分數」的「商」的「分數部份」乘以「除數」，或利用「分數除法的直式」找 z 的值。

訪談完結後，研究員再要求該學生利用「帶分數」的「商」的「分數部份」和利用「分數除法直式」的兩種方法計算 $5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2}$ 的「餘數」。看看它們的結果是否相同。結果該學生能清楚準確計算得答案。現為方便讀者清楚看得此兩種求「分數除法」的「餘數」的方法，筆者整理了學生的運算步驟，展示如下：

方法 1:

$$\begin{aligned}
 & 5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2} \\
 &= \frac{53}{10} \div \frac{3}{2} \\
 &= \frac{53}{10} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{53}{15} \\
 &= 3\frac{8}{15} \\
 \therefore \text{餘數} &= 1\frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \\
 &= \frac{4}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 15 \overline{)53} \\
 \underline{45} \\
 8
 \end{array}$$

方法 2:

利用方法 1 的結果，先寫出「商」。再計算 x、y、z 的值。

$ \begin{aligned} & 5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2} \\ &= 3\frac{8}{15} \\ x &= 3 \\ y &= 1\frac{1}{2} \times 3 \\ &= \frac{3}{2} \times 3 \\ &= \frac{9}{2} \\ &= 4\frac{1}{2} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} z &= 5\frac{3}{10} - y \\ &= 5\frac{3}{10} - 4\frac{1}{2} \\ &= 1\frac{3}{10} - \frac{5}{10} \\ &= \frac{13-5}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned} $	<p>因此:</p> $ \begin{array}{r} x \\ 1\frac{1}{2} \overline{)5\frac{3}{10}} \\ \underline{y} \\ z \\ \downarrow \\ 3 \\ 1\frac{1}{2} \overline{)5\frac{3}{10}} \\ \underline{4\frac{1}{2}} \\ \frac{4}{5} \end{array} $ <p>\therefore 餘數 = $\frac{4}{5}$</p>
---	--	---

事實，利用了這兩種不同的求「分數除法」的「餘數」的方法，不僅加深了學生對「餘數」的「特徵」（利用「長除法」，可清楚知道「餘數」一定小於「除數」，「餘數」的單位一定和「被除數」的單位一樣）的認識，也加深了學生對除法的「被除數」、「除數」、「商」和「餘數」的關係。老師亦可要求學生利用理解得的下列關係作「驗算」。

$$\text{「被除數」} = \text{「除數」} \times \text{「商」} + \text{「餘數」}$$

伍、 結論和建議

從是次研究，研究員發現大部份學生都未能夠計算得「小數」和「分數除法」中的「餘數」。此外，幾乎所有學生也未能利用「帶餘數整數直式除法」的概念應用於「帶餘數分數直式除法」中。

這明顯反映出學生未能透過同時間解答這三類不同的跨年級「帶餘數」問題，亦不懂得利用「類比」推理的方法，找得解答「分數直式除法」的方法。但透過訪談及研究員的指導，

發覺學生大多能利用「對照」、「類比」的方法推算出解決新問題的方法。

研究員更發現幾乎所有老師都沒有把這三類不同的「帶餘數除法」作綜合式的討論和教學，更不用說把它們作「類比」、「對照」及分析了。從分析所得，這主要是大部份老師都是依照教科書的編排和提供的教學方法作教學。它們極少會把不同年級的同類型課題作深入比較和分析。這正是林碧珍、蔡文煥（2005）和Floden（2002）所述的教科書的選用，不僅影響老師在課堂中的教學方法，也同時嚴重影響了學生的學習方式；這最終當然影響了「教」與「學」的成效。

就此，研究者根據上述的研究結果，提出以下幾點建議，以供改善及提升教授這三類不同「帶餘數除法」的教學效益：

一、利用「類比」讓學生明白它們擁有的相同概念

利用「長除法」（直式）表示三類不同「帶餘數除法」的「商」和「餘數」

例：

$$17 \div 5 = 3 \dots 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \overline{)17} \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

$$5.3 \div 1.5 = 3 \dots 0.8$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1.5 \overline{)5.3} \\ \underline{4.5} \\ 0.8 \end{array}$$

$$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5 \dots \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13} \\ \frac{3}{4} \end{array}$$

當求「商」是「整數」時，它們的「餘數」必定要小於「除數」。老師可要求學生利用書本或課堂教授得的「概念」和「技巧」，找得「商」和「餘數」後，再填上直式所需的各數字。同時間，把三種不同的「除數」，透過相同的直式模式作「對比」，這是有助學生強化不同型式「帶餘數除法」的「概念」的理解和認知的。

二、利用「倍」的概念求三類不同「除數」的「商」和「餘數」

例：

$$\begin{array}{l}
 17 \div 5 \\
 = 3 \frac{2}{5} \\
 \text{餘數} = 5 \times \frac{2}{5} \\
 = 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 5.3 \div 1.5 \\
 = 53 \div 15 \\
 = 3 \frac{8}{15} \\
 \text{餘數} = 1.5 \times \frac{8}{15} \\
 = 0.8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 13 \frac{3}{4} \div 2 \frac{5}{8} \\
 = \frac{53}{4} \div \frac{5}{8} \\
 = \frac{272}{5} \\
 = 5 \frac{14}{5}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{餘數} = 2 \frac{5}{8} \times \frac{14}{5} \\
 = \frac{22}{4} \times \frac{14}{4} \\
 = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

老師可透過觀察、討論，讓學生明白這三題除法算出的「帶分數商」的意義，即「除數」的若干「倍」等於「被除數」。因此若要計算它們的「餘數」，我們都可以利用相同的方法：「除數」乘以「商」的「分數部份」，找得「餘數」。

以上的方法確是能有效幫助學生明白在計算不同「除法」時，若要求「商」是「整數」時，則「餘數」=「商的分數部份」×「除數」的「認知」和「應用」。這種多樣化教學也鼓勵學生發展多樣化的解題方式，滿足了現代數學化教學的要求，也突出了一題多解及變式教學的功用（顧冷沅、黃榮金、馬頓，2005；孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙，2006；孫旭花，2007）。

三、教材宜具延展性

對同類概念數學教學，老師可利用同一情境導入新的單元，這有助學生在熟悉的情境理解新的概念，從而歸納得「新」、「舊」概念的「共通點」。這正如尤欣涵、楊德清（2010）所言，這些具延伸性的題型，能幫助學生思考，幫助學生建立新的認知基模，也同時擴展了學生對同類數學概念及技巧認知和結構的理解。

例如老師可利用「整數帶餘數的除法」情境，配上不同的「小數」或「分數」，使之變成「小數」或「分數」的帶餘數例子，這樣學生便較易理解所涉的概念和運算技巧。

例：

整數除法：

小明有絲帶 257cm，做絲花一朵要用絲帶 23cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

小數除法：

小明有絲帶 34.5cm，做絲花一朵要用絲帶 1.7cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

分數除法：

小明有絲帶 $8\frac{3}{4}$ cm，做絲花一朵要用絲帶 $1\frac{4}{5}$ cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

四、教授新單元前，宜先回顧舊知識

研究者建議老師當編寫新教學計劃或教案前，應回顧學生學過什麼相關的知識，看看他們可否利用舊知識，帶出或演繹得新知識。這種利用舊知識學新知識，既方便，亦有助學生易於掌握新知識所需的概念和技巧。

總結是次研究，我們發覺課本的編排及提供的教學方法是絕對不能滿足學生和老師的「學」與「教」的需要的。因此，作為專業的數學老師，確實有需要為學生的需要就教材的內容及編排作出修訂，建立適當的「校本課程」，藉以提升「教」與「學」的效益。

參考文獻

- 尤欣涵、楊德清 (2010), 台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較。
台灣數學教師電子期刊, 22, 34-57。
- 吳少階 (2011), 強調批判解難, 結合知識生活。星島日報, 教育版 (2011 年 9 月 1 日),
香港。
- 林碧珍、蔡文煥 (2005), TIMSS 2003 台灣國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。
科學教育月刊, 285, 2-38。
- 香港課程發展議會 (2000), 數學教育學習領域: 數學課程指引 (小一至小六)。香港: 政府
府印務局。
- 孫旭花 (2007), 螺旋變式數學課程之還原理念簡介—以青浦變式教學中「以新歸舊」概念
理解教學實踐為例。*台灣數學教師電子期刊*, 12, 17-32。
- 孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙 (2006), 問題變式結構與功能的統一。*課程教材教法*, 5,
25-31。
- 顧冷沅、黃榮金、馬頓 (2005), 變式教學促進有效的數學學習的中國方式。範良火, 黃毅
英, 蔡金法, 李士錡 (編), *華人如何學習數學* (頁 247-273)。南京: 江蘇教育出版社。
- Floden, R.E. (2002), The measurement of opportunity to learn, In C. P. Andrew & A.
Gamoran(Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational
achievement* (pp.231-266), Washington: National Academy Press.

附錄

附件1：題1至題7的答題成績統計

學生編號		成績統計					學生填寫的答案																
		題目 1-3 (3)	題目 4-6 (3)	題目 7 (2)	總分 8	備註	Q1a	Q1b	Q2a	Q2b	Q3a	Q3b	Q4a	Q4b	Q5a	Q5b	Q6a	Q6b	Q7x	Q7y	Q7z	Q7a	Q7b
1	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15	5	52	15	5	15/52	
2	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	1/2	5	N	15	5	15	
3	1	3	1	5		12	5	16	6	4	10	3	2	3	0.8	5	3/4	6	13	3/4	5	3/4	
4	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	1.5	5	275/52	15/52	5	15/52	
5	1	2	0	3		12	5	N	N	N	N	3	2	3	0.8	5+15/52	N	2	13	2	2	9/25	
6	3	2	0	5		12	5	16	0.6	4	1/4	3	2	3	0.8	5	2	5	130	23	5.2	23/100	
7	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	3/4	5	15/52	
8	1	1	0	2		12	5	16.4	0.6	N	N	3	2	3	8	35	2	12	15	N	25	4	
9	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+1/17	0	3	2	3	0.8	5	15/52	5	52	15	5	N	
10	1	2	0	3		12	5	16	6	18	19	3	2	3	0.8	35	1/2	5	N	15	5	15/52	
11	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5	15/52	5	5	52	5	15/52	
12	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	52	15	5	15	
13	0	2	0	2		12	45	16	4	N	N	3	2	3	0.8	52/275	N	5	275/52	15/52	5+15/52	15/52	
14	1	1	0	2		12	5	16	6	2	1/17	3	2	3	8	5	15/52	5	15	N	5	15	
15	1	1	0	2		12	5	16	6	N	N	3	2	3	8	5	1.5	6	N	N	N	N	
16	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	3/13	5	13	3/4	5	15/52	
17	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15/52	5	52	15	5	15/52	
18	1	1	0	2		12	5	16	6	4	2	3	2	3	8	N	N	5	12	N	3	9/52	
19	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	2	9/25	N	N	N	N	N	
20	2	0	0	2		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	3	3	8	5	5/52	5	15	52	5	15/52	
21	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5+5/52	N	5	275	15	5	15	
22	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	12	2	5	6	
23	1	1	0	2		12	5	16	6	2	1/17	3	2	3	8	7	N	5	15/52	0	5+15/52	0	
24	1	1	0	2		12	5	16	6	4	2	3	2	3	8	5	15	N	N	N	N	N	
25	1	2	0	3		12	5	17	4	4	2	3	2	3	0.8	6	1+1/4	6	12+3/4	3/4	6	3/4	
26	1	2	0	3		12	5	16	6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5	23/100	5	275/52	15/52	5	15/52	
27	0	0	0	0	缺席	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	
28	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	4	27/100	5	260	15	5	0	
29	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5+15/52	N	5	13	3/4	5+15/52	N	
30	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	4	5	44	104	35	44	35	
31	2	1	1	4		12	5	16	0.6	N	0	3	2	3	8	5	1.5	5	13	3/4	5	15	
32	1	2	1	4		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	5/52	5	13	3/4	5	15/52	
33	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	3/4	5	15/52	
34	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	1.5	5	13	15	5	15	
35	3	2	0	5		12	5	16	0.6	4	1/4	3	2	3	0.8	5	23/100	5	130	23/100	5	23/100	
36	1	2	0	3		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	7.5	N	N	N	N	N	
37	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	15	5	15	
38	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	4	1.5	5.2	13	2	3/10	5.2	23
39	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	52	15	5	15	
40	1	3	2	6		12	5	1	9.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/4	5	13	3/4	5	3/4	
41	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15/52	5	13	3/4	5	15	

註：沒有填寫答案用N表示。編號27的學生缺席，沒有提交工作紙。

附件 2：題 1 至題 7 的答題數目統計及對錯分析

題目	答案	數目	百分比	答題情況分析 (加粗) 及 錯誤原因
Q.1	<u>12...5</u>	39	98%	算式題：「被除數」與「除數」為整數，幾乎所有學生求得正確的「商」和「餘數」，只有一個學生計算「餘數」出錯
	12...45	1	2%	
Q.2	<u>16...0.6</u>	16	40%	算式題：「被除數」與「除數」為小數，88%學生求得正確的「商」，卻只有40%學生能準確計算得「餘數」
	16...6	18	45%	用除法直式計算得「餘數」後，沒有除以 10
	其他	6	15%	
Q.3	<u>4...1/4</u>	2	5%	算式題：「被除數」與「除數」為分數，5%學生答題正確，78%學生求得正確的「商」
	4...2	16	40%	將原式化成： $70/17=70\div 17=4...2$
	4...2/17	7	18%	將「商」為 4 又 2/17 當做是「商」4 餘 2/17
	4+2/17	6	15%	只寫下答案 4 又 2/17，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	9	22%	
Q.4	<u>3...2</u>	39	98%	應用題：「被除數」與「除數」為整數，所有學生求得正確的「商」，只有一個學生「餘數」錯誤
	3...3	1	2%	
Q.5	<u>3...0.8</u>	32	80%	應用題：「被除數」與「除數」為小數，所有學生求得正確的「商」，80%學生答題正確，正確率比算式題 Q.2 高出一倍
	3...8	8	20%	用除法直式計算得「餘數」後，沒有除以 10
Q.6	<u>5...3/4</u>	2	5%	應用題：「被除數」與「除數」為分數：5%學生答題正確，正確率與算式題一樣，73%學生求得正確的「商」
	5...0.15	6	15%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$ ，得出「餘數」比「被除數」大，現實中不可能發生，便有意將「餘數」調小，使其看似合理
	5...15/52	5	12%	將「商」為 5 又 15/52 當做是「商」5 餘 15/52
	5...1.5	4	10%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$ ，得出「餘數」比「被除數」大，現實中不可能發生，便有意將「餘數」調小，使其看似合理
	5...15	2	5%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$
	5+15/52	2	5%	只寫下答案 5 又 15/52，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	19	48%	
Q.7 (xyz)	<u>x=5, y=13,</u> <u>z=3/4</u>	8	20%	除法直式：20%學生答題正確，75%學生能得出 x=5
	x=5, y=52, z=15	5	12%	照抄答案 5 又 15/52 中出現的部份
	其他	27	68%	
Q.7	<u>5...3/4</u>	2	5%	除法直式補充有 20%學生答題正確，但最終答案只有 5%的學生答對，說明其中部份學生未能理解直式中哪個數是「餘數」
	5...15/52	11	27%	將「商」為 5 又 15/52 當做是「商」5 餘 15/52
	5...15	9	23%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$
	5+15/52	2	5%	只寫下答案 5 又 15/52，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	16	40%	

註：用加粗及下劃綫標注的為正確答案

數學教育的公平議題：學習成就落差初探

鄭章華¹、林佳慧²

1台北市立民生國中、2台北市立敦化國中

摘要

雖然公平議題(equity issues)在數學教育界已逐漸受到學者重視與研究，然而該議題在台灣並未受到數學教育工作者關注與廣泛討論，本文從「結果」(outcome)、「取得」(access)與「對待」(treatment)的概念架構切入，以美國的研究文獻進行對照，討論台灣數學教育的公平議題，瞭解造成巨大數學學習成就落差的可能原因。分析發現國內的教育政策關注到弱勢學生，給予豐富的經費與特惠待遇，在「結果」與「取得」方面取得相當的研究成果，然而在「對待」方面的研究相當缺乏，需要更多數學教育工作者參與和投入。

關鍵詞：公平、學習成就落差、數學教育

“與窮人與有色人種相關的重要社會議題是經濟之晉身，在今日世界，經濟晉身與公民權實現的關鍵在於數學與科學素養(Moses, 2001, p.5)”

近年來，數學教育界愈來愈重視「公平」(equity)議題(Schoenfeld, 2002)，美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000)將公平列為優先原則，力陳公平在實現高素質數學教育之重要性，新推出的《共同核心州立標準》(*Common core state standards for mathematics*) (Common Core State Standards Initiative, 2010)強調必須帶好每位學生；台灣草擬中的教育政策白皮書(教育部，2004)將機會均等的公平教育列為施政重點，以實現全民教育的理想，行政院國家科學委員會也認知到公平議題在數學教育的重要性，大略建議數學教育研究者應有系統探討聯繫到族群與文化的數學學習認知與情意因素、教師知識、教學和課程(數學教育學門資源整合規劃小組，1996)。

雖然九年一貫課程提出了「要把每一位學生都帶上來」的理念(國民教育社群網站，2012)，然而在討論到如何帶好每位學生的理念時，所觸及到的公平理念並沒有如NCTM(2000)在《*Principle and Standards for School Mathematics*》文件的深入與廣泛，NCTM強調「優質的數學教育需要公平—對所有的學生有著高期待與強力支持」(Excellence in mathematics education requires equity—high expectations and strong support for all students)(p. 12)，特闢一個章節以三頁的篇幅強調與解釋「公平原則」在實現高素質的數學教育的重要性，九年一貫課程僅於素質指標強調學生有權受到良好的數學訓練、瞭解重要的數學概念，提昇與強化數學能力。九年一貫課程在改革之初，並沒有像美國學界針對公平議題產生論辯(詳見Apple, 1992與Romberg, 1992)，Secada與Berman (1999)即警告在課程設計與發展時若忽視公平議題，可能導致不同社經地位與族群學生學習成就差距擴大與不公平的對待，偏遠地區學校校長即批評九年一貫課程改革僅顧及中上階層學生而忽略偏遠地區學生的學習狀況與需求(甄曉蘭，2007)，筆者曾以「equity」、「數學教育」、「學習成就落差」為關鍵字搜尋「臺灣期刊論文系統」，相關的數學教育文獻不多，公平議題需要國內的數學教育工作者更多的關注。

其中，一個相當重要的公平議題是學習成就落差，雖然台灣四年級與八年級學生在歷次的國際數學學習成就測驗(TIMSS)名列前茅(Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004; Mullis, Martin, Pierre, 2009)，然而高社經地位學生與低社經地位學生的學習成就落差在受試國家中是相當高的，(Akiba, LeTendre, & Scribner, 2007)，國中基本學力測驗的分析

也發現不同社經地位的學生存在著學習成就落差，自2004年以後，成就落差有擴大的趨勢(國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心，2008)。

本文欲運用「結果」(outcome)、「取得」(access)、和「對待」(treatment)的概念架構(Bishop & Forgasz, 2007; Fennema, 1990)討論數學教育的公平議題，聚焦在學習成就落差，以美國相關文獻做為對照，檢視台灣數學教育在哪些方面已有相當發展，哪些方面需要數學教育工作者多加以關注。「結果」為學習成就的研究發現，「取得」指的是教育資源分配與教育機會的獲得，「對待」為學生在學校或課室的學習經驗或教師教學，筆者將於文末建議國內數學教育工作者在公平議題可進行的方向。

「結果」：巨大學習成就落差

許多研究已指出在所有科目中，台灣學生學習成就落差最大的科目是數學科(王世英等人，2006；林俊瑩與黃毅志，2008；范麗娟，2007；陳奕奇與劉子銘，2008)，例如：數學科的城鄉差距最為顯著，原住民較多的鄉鎮為教育低成就區域(陳奕奇與劉子銘，2008)，王世英等人(2006)針對新移民子女編製學習成就問卷並於六個最多外籍母親定居的縣市進行大規模施測，他們發現新移民子女在所有的學習科目中，以數學科的學習最弱，在小學階段即表現不理想，在國中落至班後段，形成學習的惡性循環，研究者認為雖然政府已針對新移民子女安排國語與數學的補救課程，補救課程的效果並不理想，建議學者聚焦在教學法、課程與師資以進一步探討造成新移民子女數學學習低成就的原因，整體而言，堅實的證據指出台灣如同美國一樣正面臨著數學學習成就落差的情況。

社經地位：與學習成就相關的因素

在美國，家庭社經地位是形塑學生學習成就的重要因素(Coleman et al., 1966)，Coleman等人(1966)報告學習成就與家庭社經地位有顯著相關，學校對於學習成就的影響相較於家庭社經地位則是小了許多(Coleman et al., p. 21)，然而，許多人卻誤解為學校對學生學習成就沒有影響(Cohen, 1982)，Coleman等人的報告引起不小的爭論(Konstantopoulos, 2006)，Metz (1998)即質疑學習發生在教室層級而不是學校層級，Coleman等人的研究忽略了普遍存在於美國高中的教育實務：能力分班(tracking)，能力分班惡化學習成就差異，學

校層級的平均成績無法反映能力分班對學習成就的影響。

在台灣，研究證據也指出社經地位對學習成就有顯著影響(邱仕凱，2011; 林俊瑩與黃毅志，2008; 張芳全，2006; 孫旻儀與蔡明學，2007; 龔心怡、林素卿與張馨文，2009)。例如：林俊瑩與黃毅志(2008)應用結構方程模式探索影響國中生學習成就的因素，發現社經地位不但直接影響學習成就，而且間接經由其他中介變項，像是家庭教育資源、負面文化資本與學習態度影響學習成就。然而，一篇針對26個研究社經地位與學習成就關係的後設分析提出有趣的發現(孫旻儀與蔡明學，2007)，社經地位與學業成就關係是顯著但非高相關，社經地位的影響力在學生進到較高年級時逐漸降低，張芳全(2006)分析TIMSS 2003的資料也發現影響台灣八年級學生學習成就的首要因素是學生的特質，像是父母的期待、對數學學習的信心與對數學重要性的看法；家庭的文化資本，像是藏書量與電腦數，對於八年級學生的學習成就影響並不高，整體說來，國內在「結果」這方面的研究已取得相當的成果，社經地位雖然是影響學習成就落差的因素，然而其影響力並不如想像的大。

「取得」：特惠待遇與教育機會不均

特惠待遇

台灣為多元族群社會，主要包括了漢族與14個原住民族群，許多原住民居住於偏遠地區，他們之中大多為經濟與文化弱勢。政府認知到這個問題，立法保障經費與資源優先撥給偏遠地區。例如，教育基本法第五條就規定：

各級政府應寬列教育經費，並合理分配及運用教育資源。對偏遠及特殊地區之教育，應優先予以補助。教育經費之編列應予以保障；其編列與保障之方式，另以法律定之(教育部，2007)。

儘管美國的少數族群學生(minorities)與低社經地位學生收到較少的政府經費補助(Arroyo, 2008; Flores, 2007; Wilkins et. al., 2006)，台灣政府撥給偏遠地區的原住民學生充足的經費補助(陳奕奇與劉子銘，2008)。「多給一些」一直是促進偏遠地區教育公平政策的主流(王麗雲與甄曉蘭，2007)，然而這樣的教育政策被批評為關注課室設備與學校設施的改善，沒有提供偏遠地區教師充分的機會參與教師專業發展(甄曉蘭，2007)，僅有為數不多的系統性評鑑探討偏遠地區教師對於教育政策的看法與政策的效果。

近年來，另一個特殊的少數族群：新移民子女，已逐漸受到政府的注意，中國時報(無名氏，2002)報導進到國小就讀的新移民子女自2002年起快速增加，並預測幾年內，新移民子女在某些縣市的學校將會達到學生數的五分之一，根據教育部近五年的統計資料顯示(教育部統計處，2012)，新移民子女就讀國中小的人數分別為2007年103,587人、2008年129,917人、2009年155,326人、2010年177,027人、2011年192,224人，人數逐年增加，新移民子女會成為台灣社會的重要族群，由於跨國婚姻的夫妻多為低社經地位背景，新移民子女也可能成為文化與經濟弱勢族群(許文盈，2011;張芳全，2007)。

新移民子女的學習成就與文化調適已成為台灣教育政策近年來的重點之一，教育政策白皮書初稿(教育部，2004)即指出必須提供外籍新娘與其下一代合適的教育機會以避免他們成為台灣新的弱勢族群；基於社會公平的理念，來自社會、經濟、或文化弱勢家庭的學生在教育資源分配上應受到特惠待遇(教育部，2004)。總之，台灣的教育政策強調特惠待遇與分配較多的預算給原住民學生與外配子女，台灣的少數族群學生並沒有像美國學生遭遇經費短缺與能力分班的問題，學習成就落差可能起於教育機會不均。

教育機會不均

TIMSS的分析發現台灣與美國皆有教育機會不均的問題，高、低社經地位學生受教於高素質教師(即有合格教師證、數學或數學教育主修與有經驗的教師)的機會落差在受測國家中是非常高的(Akiba, LeTendre, & Scribner, 2007)，除了TIMSS資料，美國大規模的國家調查也指出非裔美國人、拉丁裔美國人與貧窮學生有相當高比例被分到低能力班級，受教於不合格或沒有經驗的數學老師(Lubienski & Crockett, 2007; Tate & Rouseau, 2002; Wilkins, et. al., 2006)。

實徵研究已顯示在美國高、低能力班級或是高、低社經地位學校所教授之數學內容有所差異，在「班級」層級，高能力班級學生較低能力班級學生學習到較多數學內容與技巧，高能力班級的學生接觸到高層次的數學知識、想法和概念，但低能力班級學生則是年復一年學習基本的計算技巧(Oakes, 1985, 2005)，在「學校」層級，低社經地位學校學生被教導死記硬背的知識與運算規則，而高社經地位學校學生則是培養推理與解題能力(Anyon, 1996)。相較於少數族群學生，白人學生擁有充分的教育機會而展現出較高的學習成就，因此被視為有能力與天分去學好數學，Flores (2007)即警告談論學習成就落差而不

討論學習機會落差會誤導教師與教育學者聚焦於「缺陷」模式，以族群、文化差異、貧窮、父母低教育程度等因素來“解釋”學習低成就，他認為學習成就落差來自學習機會落差，建議從學習機會落差的角度重新思考與界定學習成就落差的議題。

國內的學者也注意到「取得」的議題，聚焦於教育機會的公平性，例如，高、低社經地位家庭的學生進到頂尖大學的比例存在有顯著差距(鄭勝耀與洪志成，2009)，原住民學生被較不具資格或沒有經驗的教師教到(牟中原與陳伯璋，1996)，甄曉蘭(2007)的調查發現超過一半服務於偏遠地區的教師沒有五年以上的教學經驗，在一般中學僅有三分之一比例的教師不具五年以上的教學經驗，偏遠地區中學教師的流動率相當高，為15.45%，在一般中學，教師的流動率是相當低，只有4.59%。台灣與美國的弱勢學生皆較少有機會受教於合格與有經驗數學教師(Akiba, LeTendre & Scribner, 2007)，比起其他可歸咎於低成就的校外因素，像是父母教育程度與收入，教師素質是影響學習成效的最重要因素(Wilkins, et. al, 2006)。從學習機會落差(取得)到教學品質落差(對待)來思考數學學習不公常是美國數學教育研究與行政人員討論公平議題的進路(Goffney, 2010)，由於不同社經地位學校教師教學方式的差異可能造成學習成就落差，有必要從「對待」檢視學習成就落差。

「對待」：需要更多的關注

美國：不平等的對待

在美國，「對待」議題已經有相當充分的討論與研究，不平等的教學造成有色人種學生(非裔、拉丁裔與原住民)與白人學生、中產階級學生與貧窮學生的學習成就差距(RAND, 2003; Silver & Kenney, 2000)，研究證據顯示數學教師在不同社經地位學校(Anyon, 1996)、不同能力分班(Oakes, 1985; Oakes, 1990; Oakes, 2005)、甚至是在同一班級內(Buriel, 1983; Fennema, 1990; Irvine, 1990)有教學差異。例如，高能力分班教師希望培養學生解題能力與獨立思考，然而低能力分班教師則是要求學生熟練規則與遵守規矩，他們強調控制更甚於學習，由於不同能力分班教學的差異，再加上貧窮學生與少數族群學生有相當高的比例在低能力班級，學校正不自覺有系統地傷害某些學生族群的學習(Oakes, 1985; Oakes, 2005)，相較於女學生，男學生與教師在學科上有較多的互動，接受到更多讚美(Fennema, 1990)，教師的口語回饋依學生的性別與種族而有顯著的不同(Irvine, 1990)。

少數族群學生的教師較少強調推理、非例行性問題解決與應用科技融入數學教學 (Flores, 2007)，他們偏向使用選擇題或是其他評量低層次認知的工具 (Lubienski & Crockett, 2007; Madaus, West, Harmon, Lomax, Viator, 1992)，低社經地位學生與少數族群學生往往是數學教師低期待下的受害者 (Flores, 2007; Ladson-Billings, 1997; NCTM, 2000)。

台灣：需要更多對待方面的研究

雖然不平等的教學與能力分班是造成美國數學學習落差的可能原因，不過由於能力分班在台灣被立法禁止，以確保每位學生有公平的教育機會與受到無差別待遇的教學，能力分班不應該是國內學生成就落差的重要原因，此外，九年一貫課程對於每一年級所要教授的數學內容均有詳細的規定與說明 (國民教育社群網站，2012)，例如，台灣七年級學生要開始學習形式代數，而美國八年級的學生可能因為其成績或能力而無法選修代數課；雖然課程內容順序可能不同，台灣的數學教科書必須在特定的學期教授規定的數學內容，在美國，同樣選修代數一 (Algebra I) 課程的學生可能會拿到不同難度的教科書與學到不同內容的數學 (Cogan, Schmidt, & Wiley, 2001)。這樣的學習內容差異反映在 TIMSS 的平均成績上，台灣學生在 2007 年與 2003 年的 TIMSS 數學成績分別為 598 和 585，而美國學生的數學成績則是 508 與和 504。

雖然研究證據顯示台灣有著教育機會不均等的問題，鮮少有研究深入探討學校的生態環境、行政議題與教學內容，關於學校或是課室的田野研究資料更是付之闕如 (甄曉蘭，2007)，已知有 Chen, Crockett, Namikawa, Zilimu 與 Lee (2011) 從對話式形成性評量實務 (discourse-based assessment practice) 分析台灣任教於不同社經地位學校數學教師的教學，個案研究發現高社經地位學校教師會運用高層次問題來追問學生，以促進學生的數學理解，偏遠地區學校教師則是以低層次問題讓學生說出正確或老師心目中所要的答案。

「對待」議題目前沒有在台灣數學教育界被廣泛與深入討論，相關的數學教育實徵研究論文相當稀少 (Chen et al., 2011)。由於台灣為集中式 (centralized) 的教育系統、統一的國家課程與制式化的師資培育，許多人可能認為數學教師的教學方式應該非常類似，然而，我們也許和美國大眾有著相同的迷思，他們相信美國的高中是非常相似的 (Metz, 1998)。豐富而令人信服的研究證據顯示教學實務會受學生的種族、性別與社經地位所影響，不同社經地位學校數學教師的教學實務也許是台灣巨大學習成就落差的原因之一，然

而很少有實徵研究使用課室做為場域來探討與檢驗公平議題，我們需要更多的田野研究來蒐集學校與課室的證據來探討學習成就落差。

結論

在本文中，筆者以美國相關文獻為對照，從「結果」、「取得」與「對待」的概念架構，探討造成台灣數學學習成就落差的可能原因，在「結果」方面，許多研究證據指出國內數學學習成就有顯著差距，而且是所有學科最大的，無論在台灣或是美國，社經地位顯著聯繫到學習成就，其效應對台美學生有所不同。

在「取得」方面，政府會關注少數族群學生的學習需求而給予更多的協助，豐富的經費與特惠待遇一直是教育政策的重點，台灣的少數族群學生並沒有如同美國遭遇到經費短缺的問題，但是，台灣與美國同樣有學習機會不均的問題，低社經地位學生與少數族群學生較少受教於高素質與有經驗的數學教師，雖然九年一貫課程確保弱勢學生能學習同樣的數學內容，台灣的學習機會落差仍高於美國。

學習成就落差反映出學習機會落差，我們應該進一步追問在學校與教室場域發生了什麼事，「對待」是瞭解學習成就落差的關鍵，不同社經地位學校其校園生態、教學、課堂管理等是否有所不同？若是有所不同，是什麼樣的不同？如何形成學習落差？可惜的是，在台灣很少有實徵研究深入探索此一方面，故筆者無法從「對待」的研究證據探討學習成就落差，我們需要更多這一類的實徵研究，特別是來自學校的田野觀察來瞭解造成學習成就落差的原因，從而提出有效策略來縮短學習台灣的數學學習成就落差，以促進高品質的數學教育與數學教育全民化理念的實現(數學教育學門資源整合規劃小組，1996)。

參考文獻

- 王世英、溫明麗、謝雅惠、黃乃熒、黃嘉莉與陳玉娟等人(2006)。我國新移民子女學習成就現況之研究。《教育資料與研究》，68，137-170。
- 王麗雲與甄曉蘭(2007)。台灣偏遠地區教育機會均等政策模式之分析與反省。《教育資料集刊》，36，25-46。
- 牟中原與陳伯璋(1996)。《原住民教育》。教改會第二十四次委員會議委員報告，取自 <http://www.sinica.edu.tw/info/edu-reform/farea8/j21/>
- 邱仕凱(2011)。北部地區育幼機構八年級學童數學學習成就相關因素之調查研究。《科學教育月刊》，337，2-14。
- 林俊瑩與黃毅志(2008)。影響臺灣地區學生學業成就的可能機制:結構方程模式的探究。《台灣教育社會學研究》，8(1)，45-88。
- 范麗娟(2007)。台灣弱勢者教育的現況分析與未來展望。《教育資料與研究》，台灣文化與社會之回顧與展望專輯，77-90。
- 陳奕奇與劉子銘(2008)。教育成就與城鄉差距：空間群聚之分析。《人口學刊》，37，1-43。
- 孫旻儀與蔡明學(2007)。社經地位和學生學業成就關係之後設分析。《國教學報》，19，199-221。
- 張芳全(2006)。影響數學成就因素在結構方程式模型檢定：以2003年台灣國二生TIMSS資料為例。《國立台北教育大學學報》，19(2)，163-196。
- 張芳全(2007)。新移民子女的研究界說。收錄於張芳全等人編輯，《新移民子女的教育》(pp. 1-24)。台北市：心理出版社。
- 許文盈(2011)。淺談新移民家庭的優勢與困境。《家庭教育雙月刊》，32，28-35。取自 http://140.130.196.175/family/uploads/tadnews/file/nsn_8_2.pdf
- 無名氏(2002, 8月21日)。外籍新娘子女進入就學高峰期。《中國時報》。
- 教育部(2004)。《教育政策白皮書初稿》。取自 http://www.edu.tw/EDU_WEB/EDU_MGT/EDURES/EDU6239001/930401.htm?search

教育部 (2007)。教育基本法。取

自 [http://law.moj.gov.tw/Eng/Fnews/FnewsContent.asp?msgid=2855&msgType=en&key
word=undefined](http://law.moj.gov.tw/Eng/Fnews/FnewsContent.asp?msgid=2855&msgType=en&keyword=undefined)

教育部統計處(2012)。新移民子女就讀國中小人數統計。取

自 http://www.edu.tw/files/site_content/b0013/fomas.xls

鄭勝耀與洪志成(2009)。誰是台灣頂尖高等教育學府的學生？載於張雪梅、彭森明（主編），*台灣大學生的學習歷程與表現*（pp.103-140）。台北：國立台灣師範大學教育評鑑與發展研究中心。

國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心 (2008)。二〇〇八年國中基測研發成果。

取自 <http://www.bctest.ntnu.edu.tw/flying/flying51-60/NO55-002-008.pdf>

國民教育社群網站 (2012)。97年課綱(100年度實施)。取自 [http://teach.eje.edu.tw/9CC/3-
2.php](http://teach.eje.edu.tw/9CC/3-2.php)

甄曉蘭(2007)。偏遠國中教育機會不均等問題與相關教育政策初探。*教育研究集刊*，53(3)，1-35。

數學教育學門資源整合規劃小組(1996)。學門資源整合規劃資料：數學教育。台北市：行政院國家科學委員會。

龔心怡、林素卿與張馨文(2009)。家長社經地位與數學學習動機對數學學業成就之研究——以國中基本學力測驗數學領域為例。*彰化師大教育學報*，15，121-142。

Akiba, M., LeTendre, G. K., & Scribner, J. P. (2007). Teacher quality, opportunity gap, and national achievement in 46 countries. *Educational Researcher*, 36(7), 369-387.

Anyon, J. (1996). Social class and the hidden curriculum of work. In E. R. Hollins (ed.), *Transforming curriculum for a culturally diverse society* (pp. 179-203). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Apple, M. W. (1992). Do the standards go far enough? Power, policy, and practice in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 412-431.

Arroyo, C. G. (2008). *The funding gap*. Washington, DC: The Education Trust. Retrieved from http://www.nvasb.org/Publications/Research_Data/the_funding_gap.pdf

- Bishop A. J., & Forgasz, H. J. (2007). Issues in access and equity in mathematics education. In K. L. Frank, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1145-1167). Charlotte, NC : Information Age Pub.
- Buriel, R. (1983). Teacher-student interactions and their relationship to student achievement: A comparison of Mexican-American and Anglo-American children. *Journal of Educational Psychology, 75*, 889-897.
- Chen, C-H., Crockett, M.D., Namikawa, T., Zilimu, J. & Lee, S.H. (2011). Eighth grade mathematics teachers' discourse-based formative assessment practice in SES-different classrooms: A Taiwan study. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI: 10.1007/s10763-011-9299-7
- Cogan, L. S., Schmidt, W. H., & Wiley, D. E., (2001). Who takes what math and in which track? Using TIMSS to characterize U.S. students' eighth-grade mathematics learning opportunities, *Educational Evaluation and Policy Analysis, 23*(4), 323-341.
- Cohen, M. (1982). Effective schools: Accumulating research findings. *American Education, 18*(1), 13-16.
- Coleman, J. S., Campbell, E. Q., Hobson, C. F., McPartland, J., Mood, A. M., Weifeld, F. D., & York, R. L. (1966). *Equality of educational opportunity*. Washington, DC: US Government Printing Office.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
- Fennema, E. (1990). Justice, equity, and mathematics education. In E. Fennema & G. C. Leder (Eds.), *Mathematics and gender* (pp. 1-9). NY: Teacher College Press.
- Flores, A. (2007). Examining disparities in mathematics education: Achievement gap or opportunity gap? *The High School Journal, 91*(1), 29-42.
- Goffney, I. D. (2010). *Identifying, Measuring, and Defining Equitable Mathematics Instruction*. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan.
- Irvine, J. J. (1990). *Black students and school failure: Policies, practices, and prescriptions*. NY : Greenwood Press.
- Konstantopoulos, S. (2006). Trends of School Effects on Student Achievement: Evidence from NLS:72, HSB: 82, and NELS:92. *Teachers College Record, 108*, 2550-2581.

- Ladson-Billings, G. (1997). It doesn't add up: African American students' mathematical achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 697-708.
- Lubienski, S. T., & Crockett, M. D. (2007). NAEP findings regarding race/ethnicity: Mathematics achievement, student affect and school/home experiences. In P. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 227-260). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Madaus, G. F., West, M. M., Harmon, M. C., Lomax, R. G., & Viator, K. A. (1992). *The influence of testing on teaching math and science in grades 4-12*. Chestnut Hill, MA: Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy. (ERIC No. ED370772.)
- Metz, M. H. (1998). Veiled Inequalities: The hidden effects of community social class on high school teachers' perspectives and practices. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. San Diego, CA, April 13-17.
- Moses, R. P. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Boston: Beacon Press.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth Grades*. MA: Boston College.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Pierre, F. (2009). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. MA: Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Author.
- Oakes, J. (1985). *Keeping track: How schools structure inequality*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Oakes, J. (1990). *Multiplying Inequalities: The effect of race, social class, and tracking on opportunities to learn mathematics and science*. Santa Monica: Rand Corporation.
- Oakes, J. (2005). *Keeping track: How schools structure inequality* (2nd ed.). New Haven, CT: Yale University Press.
- RAND Mathematics Study Panel, D. L. B., Chair. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*.

Arlington: RAND.

- Romberg, T. A. (1992). Further thoughts on the standards: A reaction to Apple. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 432-437.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational Researcher*, 31 (1), 13-25.
- Secada, W. G., & Berman, P. W. (1999). Equity as a value-added dimension in teaching for understanding in school mathematics. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 33-42). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Silver, E. A. & Kenney, P.A. (Eds.) (2000). *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tate, W., & Rousseau, C. (2002). Access and opportunity: The political and social context of mathematics education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 271-299). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilkins, A., & Education Trust staff. (2006). *Yes we can: Telling truths and dispelling myths about race and education in America*. Washington, DC: The Education Trust. Retrived from <http://www.edtrust.org/dc/publication/yes-we-can-telling-truths-and-dispelling-myths-about-race-and-education-in-america>

從高職教師角度比較95暫綱、99課綱高職數學B之 三角函數教材的差異

廖光永¹、楊德清²

1國立土庫商工 教師

2國立嘉義大學 數理教育研究所 教授

摘要

本研究旨在比較台灣 95 暫綱、99 課綱高職數學 B「三角函數」單元在教材內容及教材編排順序之差異。本研究採用內容分析法與問卷調查的方式，選取市占率超過五成的 L 版高職數學 B 為研究對象，並採立意取樣法以開放式問卷調查有 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 實際授課經驗教師 8 位的意見。結果顯示：1. (1) 99 課綱增加「和差角公式與二倍角公式」和後續的章節並無關聯，而且在專業課程上並沒有相關的應用，只是徒增學生學習負擔。(2) 把「正弦與餘弦定理」改成選讀內容，缺乏實質意義。因為後續的「解三角形問題(含三角測量)」需要正弦或餘弦定理的先備知識。(3) 教學時數從 45 節調降到 40 節，在內容不減反增的情況下，無法在現有配置的時數下教完教材內容。(4) 99 課綱數學 B(I) (L 版)教科書使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」，是符合 99 課綱『訓練學生運用計算器與電腦軟體，解決日常實際問題及未來商業專業及資訊應用領域內實務問題。』的教學目標，但受限於教學時數，只有半數的教師在課室中會利用電腦軟體來進行教學。2. 95 暫綱一上第三章的「三角形的解法」緊接在第二章「三角函數」之後。可是 99 課綱把「三角形的解法」的內容移到的二下第一章「三角函數的應用」。所有教師都認為缺乏連貫性，不利於學生的學習。

Keywords : 95 暫綱、99 課綱、高職數學 B、三角函數、L 版高職數學 B

壹、前言

課程及教科書的改革是目前世界教育改革的主要趨勢(楊德清、陳仁輝, 2011; Ding & Li, 2010; Yang, Reys, & Wu, 2010)。因為, 課程與教材內容和學生的學習成效有相輔相成的效果(陳仁輝、楊德清, 2010; Tarr, Chavez, Reys, & Reys, 2006), 一套設計完善的教科書, 對於學生的學習不但有事半功倍的效果, 對於教師而言更是提升教學成效的最佳幫手(黃立期, 2010)。Tornroos (2004) 也指出針對教材進行分析, 對於學生學習數學是有很大的助益。目前國內關於教材的分析研究雖然已經有相當大的篇幅和內容。但是研究的範圍主要是以小學數學內容為主, 也有少量關於國中數學教材內容的分析研究, 但是關於高職數學教材內容的分析研究卻相當缺乏! 台灣是以教科書導向(textbook-driven)為主的教學, 而教科書具有引導的作用(李隆盛, 2007)。希望透過本研究來增加高職數學教材的能見度, 作為未來高職數學教科書改革的參考。

教育部自 99 學年度起實施「職業學校群科課程綱要」(即為 99 課綱)。98 年 10 月, 「職業學校一般科目暨藝術群科中心學校」為了了解高職老師對課綱之意見, 特別設計「職業學校一般科目課程綱要政策之教師意見調查」問卷, 結果顯示有 52.5% 的數學教師不贊同『99 課綱的內容與架構優於 95 暫綱』, 顯示有半數第一線的高職老師對於 99 課綱的架構是有疑慮的!

黃靚雯(2008)調查研究發現, 超過 80% 的高中生認為高中三年中學習起來最難的就是「三角函數」這個單元。而在教學現場, 研究者任教學校所使用的 99 課綱的 L 版高職數學 B(I)教科書在 99 年版的三角函數這個單元的編排主要依照 99 課綱, 可是 100 年的版本編排順序卻和 95 暫綱是一樣的! 這樣有趣的改變讓人思考 99 課綱的高職數學 B 是否比 95 暫綱的高職數學 B 對高職生的數學學習更有助益? 值得研究者深入探究!

本研究是針對 95 暫綱與 99 課綱之「L 版」高職數學 B「三角函數」單元的教材內容進行探究與分析比較, 希望本研究之發現可以作為未來國內高職數學 B 課程改革之參考依據與方向。本研究目的為:

- 一、比較 95 暫綱與 99 課綱之「L 版」高職數學 B「三角函數」教材內容之差異。
- 二、比較 95 暫綱與 99 課綱之「L 版」高職數學 B「三角函數」教材內容編排順序之差異。

貳、相關文獻

國內多項以「三角函數」為主題的研究都建議增加三角函數的授課時數（江佳玲，2007；黃鈺芸，2006；張琇涵，2006）。因為九年一貫課程將三角函數單元從國中教科書中全數刪除，直接影響了高中、職學生學習三角函數的基礎，而三角函數單元在高職數學B就包括了「三角函數」與「三角函數的應用」兩章。三角函數對高一學生而言是全新的單元，對於抽象的符號、有向角的度量、三角函數的定義及基本性質...等概念都需要更多時間建構，而繁雜的三角恆等式及其推導過程也都需要時間摸索、推理與計算。

郇錦程（2006）針對台灣與英國三角函數課程之教科書進行分析比較，研究結果發現英國教材在編製三角函數分為兩個時間點，在學生進入高一前施以函數概念相關的補充教材，高一才正式引入三角函數；而廣義角三角函數又是另一個時間點才切入，把三角函數拆成兩個部分在不同時間點教學，內容採螺旋式的編排加深、加廣在不同年級，幫助學生熟練相關定義，並且能以循序漸進的方式建構三角函數的知識。江佳玲等人的研究也建議台灣在三角函數單元拆成兩個部分教學，調整課本的編排順序，拉長三角函數的教學時程，給予學生一個喘息的空間，或許可以提高學生在三角函數單元的學習成效。

張琇涵（2006）比較分析台灣與新加坡三角函數課程，研究發現新加坡教材培養學生的量感，讓學生藉由生活經驗來猜測真實量的大小，再透過實際測量來比較兩者的誤差，以此強化學生量感的認識。而台灣雖然在小學就強調數、形、量的認知，但在教材編排中沒有強調量的估計能力。因此建議台灣在佈題的設計上，能依據學生的年齡發展設計不同層次的情境，讓學生能藉由教材拓展學習的視野，將生活情境與教材互相連結。另一項結果發現新加坡著重將科技融入教材，讓學生能利用電腦與計算器解決問題，並透過電算器的操作來學習數學的概念。在培養學生計算能力的同時，更教導學生能藉由輔助的工具自行驗證答案的合理性。建議台灣能讓學生應用計算器或電腦解決問題，落實資訊與數學之結合，希望能藉此提升學習效率。

從上述的的討論可以發現，關於授課時數的配置、教學順序的編排都深深的影響三角函數的學習。而估算能力的培養、生活情境融入教學都是目前數學教育改革的主要趨勢（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000），資訊教育在九十學年度起逐年實施的九年一貫課程中更是列為六大重大議題之一（教育部，2000）。透過對 95 暫綱、99 課綱高職數學 B「三角函數」教材的分析比較，對未來教科書的編排與內容設計應會有實質的幫助，進而有助於學生在三角函數的學習。

參、研究方法

基於研究主題的特性與目的，本研究同時採用內容分析法與問卷調查法，深入比較 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 「三角函數」教材之差異。

一、研究對象

基於研究進行之便利性，研究對象的選定採用立意取樣，在教材部分選擇研究者任教學校所使用「L 版」的 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 作為本研究之研究對象；問卷調查則以 8 位在職的高職數學教師為受試者。

(一) 95 暫綱、99 課綱 L 版高職數學 B

L 版高職數學 B 是目前市場占有率最高的版本，市場佔有率超過五成（剡文魁，私人通訊，2011，12 月 1 日；賴瑞勇，私人通訊，2011，12 月 12 日）（分別是 H 版和 L 版高職教材業務專員）。三角函數單元在 95 暫綱分成「三角函數」與「三角形解法」兩章；在 99 課綱則分成「三角函數」與「三角函數的應用」。兩套課綱在「三角函數」的內容是相同的；而 99 課綱的「三角函數的應用」和 95 暫綱的「三角形解法」的內容只差別在「三角函數的應用」增加了「和差角公式與二倍角公式」一節，詳細內容（如表 1）：

表 1：L 版（高宏輝）95 暫綱、99 課綱(100 年版) 「三角函數」單元比較

L 版 95 暫綱高職數學 B	L 版 99 課綱高職數學 B(100 年版)
B(I) CH2 三角函數	B(I) CH2 三角函數
2-1 有向角及其度量	2-1 有向角及其度量
2-2 三角函數的定義	2-2 銳角三角函數的定義及基本性質
2-3 任意角的三角函數	2-3 任意角的三角函數
2-4 三角函數的基本關係	2-4 三角函數的圖形
2-5 三角函數的圖形	
B(I) CH3 三角形的解法	B(IV) CH1 三角函數的應用
3-1 正弦定理與餘弦定理	1-1 和差角公式與二倍角公式
3-2 三角形的解法	1-2 正弦與餘弦定理*
3-3 平面三角測量	1-3 解三角形問題(含三角測量)
附錄： 三角函數值表	附錄： 電腦輔助教學「三角函數的圖形」：使用 Geogebra 軟體 電腦輔助教學「解三角函數值」：利用 Excel 2003

*為稍難的單元或例題，教師可依上課時數酌予免授

註：採自高宏輝（2009）。《數學 B (I) (95 課綱)》。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

註：採自高宏輝（2011）。《數學 B (I) (99 課綱)》。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

(二) 開放式問卷受試者

以開放式問卷調查在職教師關於兩套課綱在三角函數教材的差異，採立意取樣選取同時具有 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 實際授課經驗且使用 L 版教科書教學的教師。選取對象為雲林縣兩所國立高職教師共 8 位，5 位具有碩士學位、一位研究所 40 學分班畢業、一位正攻讀碩士學位、另一位師範大學數學系畢業，服務年資均在 5 年以上，分別以 T_1 、 T_2 ... T_8 表示。

二、研究工具

本研究旨在比較分析 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 「三角函數」教材內容之差異性，所以問卷設計主要以蒐集高職教師關於課程內容調整的意見為主。為達成研究目的，依據研究目的從調查高職教師對 99 課綱高職數學 B 教學目標、內容與編排順序調整三個層面著手。自行設計「95、99 高職數學 B 三角函數教材之教師意見調查」問卷（如附件一）為研究工具。為提高問卷的內容效度，問卷內容參考相關文獻以及本研究之研究目的而編製。並邀請二位具碩士學位且有 95 暫綱、99 課綱高職數學 B 授課實務經驗的數學科同仁進行問卷內容的修正，以提高本問卷的效度與可行性。

肆、研究結果與討論

依據研究目的，將95暫綱、99課綱L版高職數學B的教材內容分析整理，針對這兩個課綱在教材內容與編排順序的差異作綜合比較。研究之分析單位的制定，主要參考國內課程分析之相關研究（尤欣涵，2010；陳仁輝、楊德清，2010；董修齊，2011；鄭婷芸，2011）。先以「章」做為區分單位，再以「節」作為分析單位。因此，首先呈現兩套課綱在三角函數單元的差異性（如表2）：

表 2：95 暫綱、99 課綱高職數學 B 「三角函數」教學綱要比較

95 暫綱高職數學 B		99 課綱高職數學 B	
內容綱要	分配節數	內容綱要	分配節數
B(I) CH2 三角函數	27	B(I) CH2 三角函數 24	24
1.有向角及其度量		1.有向角及其度量	
2.三角函數的定義		2.三角函數的定義與圖形★	
3.三角函數的基本關係		3.三角函數的基本性質	
4.任意角的三角函數			
5.三角函數圖形			
B(I) CH3 三角形的解法	18	B(IV) CH1 三角函數的應用	16
1.正弦定理。		1.和差角公式與二倍角公式。	
2.餘弦定理。		2.正弦與餘弦定理*。	
3.三角形的解法。		3.解三角形問題(含三角測量)★。	
4.平面三角測量。			

註：採自職業學校群科課程暫行綱要。教育部技職司，2005。台北：教育部。

註：採自職業學校群科課程綱要暨設備基準—一般科目。教育部技職司，2009。台北：教育部。

註記★之內容可使用計算器或電腦軟體求值與作圖。

註記*者為選讀內容，教師得依學生需求調整授課內容。

結果顯示 99 課綱增加了「和差角公式與二倍角公式」一節，而「正弦與餘弦定理」則改為選讀內容。在教學時數的配置上從 45 節調降為 40 節。並明確註明「三角函數的定義與圖形」與「解三角形問題(含三角測量)」可使用計算器或電腦軟體求值與作圖。在編排順序上，95 課綱在第一冊第二章教「三角函數」，緊接著第三章就教「三角形的解法」；99 課綱一樣在第一冊第二章教「三角函數」，可是「三角函數的應用」卻調整到第四冊第一章才教，教學時間點的編排延後了一年半。針對以上差異，設計「95、99 高職數學 B 三角函數教材之教師意見調查」的開放式問卷，調查 8 位具有 95 暫綱與 99 課綱 L 版高職數學 B 教學經驗的在職教師意見（如表 3）：

表 3：95、99 高職數學 B 三角函數教材比較之教師意見

問題	次數	
(一) 對 99 課綱高職數學 B 教材內容調整的看法		
1. 99 課綱高職數學 B 在第四冊第一章「三角函數的應用」中增加了「和差角公式與二倍角公式」, 針對這樣內容的調整是有助於學生學習?	非常同意 (0) 不同意 (4)	同意 (3) 非常不同意 (1)
2. L 版的 99 課綱高職數學 B 課本在 100 年版的教科書內容中刪除了「利用三角函數值表和電算器求三角函數值」, 針對這樣內容的調整您認為會影響學生學習嗎?	會 (2)	不會 (6)
3. 99 課綱高職數學 B 在分配節數的調整 (95 暫綱 CH2 三角函數 27 節, 99 課綱 CH2 三角函數 24 節; 95 暫綱 CH3 三角形的解法 18 節, 99 課綱 CH1 三角函數的應用 16 節), 您是否能在分配節數內上完教材內容?	可以 (2) 會 (8)	不可以 (6) 不會 (0)
4. 99 課綱高職數學 B 把「正弦與餘弦定理」改為選讀內容, 您在「三角函數的應用」這章節授課時, 是否教授「正弦與餘弦定理」這個單元?		
(二) 對 99 課綱高職數學 B 教材編排順序調整的看法		
1. 95 暫綱一上第三章的「三角形的解法」緊接在第二章「三角函數」之後。可是 99 課綱把它移到的二下第一章「三角函數的應用」, 針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習?	非常同意 (0) 不同意 (5)	同意 (0) 非常不同意 (3)
2. 下面兩種教學順序, 您認為哪一項較有助於學生學習?		
(1) 銳角三角函數的定義 \Rightarrow 任意角的三角函數 \Rightarrow 三角函數的基本關係	(1) 3	(2) 5
(2) 銳角三角函數的定義 \Rightarrow 三角函數的基本關係 \Rightarrow 任意角的三角函數		
3. 99 課綱課程把「三角函數的圖形」和「三角函數的定義」放在一起, 最後才教「三角函數的基本性質」, 針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習?	非常同意 (0) 不同意 (7)	同意 (1) 非常不同意 (0)
(三) 對 99 課綱高職數學 B 教學目標調整的看法		
1. 99 課綱高職數學 B 強調『訓練學生運用計算器與電腦軟體, 解決日常實際問題及未來商業專業及資訊應用領域內實務問題。』您是否贊同?	非常同意 (2) 不同意 (1)	同意 (5) 非常不同意 (0)
2. 因應教學目標的調整, 99 課綱數學 B(I) (L 版)教科書在附錄中使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」。您是否贊同這樣的調整和教學目標?	非常同意 (0) 不同意 (2)	同意 (6) 非常不同意 (0)
3. 請問在您的課室中是否會利用電腦軟體來進行「三角函數」單元的教學?	會 (4)	不會 (4)

以下針對兩套課綱教材內容與教材內容編排順序, 從在職教師的觀點來進行深入的分析比較其差異:

一、95 暫綱與 99 課綱 L 版高職數學 B 「三角函數」教材內容的差異

不論是在教材單元、教學時數及教學方法上，兩套課綱都有增減和調整，分項說明如下：

(一) 增加「和差角公式與二倍角公式」對其他單元的學習沒有幫助，徒增學生負擔

超過半數的教師不同意增加「和差角公式與二倍角公式」單元是有助於學生學習。T₅敘述原因如下：

1. 99 課綱高職數學 B 在第四冊第一章「三角函數的應用」中增加了「和差角公式與二倍角公式」，針對這樣內容的調整是有助於學生學習？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

麻煩敘述您的原因：

因本校學生資質屬中後段，且學生專業課程部份幾乎不會應用到三角的部份，因此增加「和差角及二倍角公式」徒增學生負擔

圖 1. T₅敘述原因

99 課綱的設計理念是希望課程能作縱向的銜接與橫向的溝通連結。希望課程知識是層層堆砌，銜接無礙的；並且能運用在其他相關科目的學習上。而不論是高職數學 B 後續的單元或高職專業科目，都沒有「和差角公式與二倍角公式」的相關應用。研究者另一個對 99 課綱高職數學 B 教學內容調整的意見調查，結果顯示有 73% 的在職教師不同意增加和差角公式與二倍角公式，有助於商業類群學生學習專業科目或解決實際問題。

(二) 雖然「正弦與餘弦定理」改成選讀內容，但是基於課程銜接卻勢必要教

所有的教師都會在課室中實施「正弦與餘弦定理」的授課不會因為它是選讀內容而略過，T₁敘述原因如下：

4. 99 課綱高職數學 B 把「正弦與餘弦定理」改為選讀內容，您在「三角函數的應用」這章節授課時，是否教授「正弦與餘弦定理」這個單元？

會 不會

麻煩敘述您的原因：

雖然在 99 課綱把正弦與餘弦定理改成選讀，但是這部份應視為是下一節「解三角形問題」的先備知識，且有沒有正弦與餘弦定理的概念根本無法學習「解三角形問題」。

圖 2. T₁敘述原因

在 99 課綱 L 版「解三角形問題(含三角測量)」課本內容中，在 22 題（含例題與隨堂練習）的佈題中，就有 16 題需要使用正弦或餘弦定理，比例高達 73%，在「三角形的解法」觀念部分更是全部都需要用到正弦或餘弦定理（如圖 3）。

例題

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=30^\circ$ ， $b=2$ ， $c=\sqrt{3}+1$ ，試解此三角形。

解 已知三角形的兩邊 b 、 c 及其夾角 $\angle A$ ，
利用餘弦定理先求出第三邊 a ，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3}+1) \times \cos 30^\circ$$

$$= 4 + (4 + 2\sqrt{3}) - 4 \times (\sqrt{3}+1) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} = 2,$$

即 $a = \sqrt{2}$ ，

再利用正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin B},$$

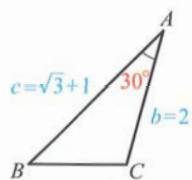


圖 3. 「三角形的解法」例題

註：採自 L 版數學 B(IV)（頁 28），高宏輝，2012。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

因此，99 課綱把「正弦與餘弦定理」列為選讀內容，沒有實質的意義與幫助。

（三）三角函數對學生而言是比較艱澀的單元，現有的時數配置明顯不足

絕大多數的教師認為部編的 40 節是無法完整呈現三角函數內涵與其應用。

T_8 敘述原因如下：

- 3| 根據附錄一（95 暫綱、99 課綱高職數學 B 差異比較），99 課綱高職數學 B 在分配節數的調整（95 暫綱 CH2 三角函數 27 節，99 課綱 CH2 三角函數 24 節；95 暫綱 CH3 三角形的解法 18 節，99 課綱 CH1 三角函數的應用 16 節），您是否能在分配節數內上完教材內容？
- 可以 不可以
- 麻煩敘述您看法：
- 根據這幾年來的教學，發現學生在三角函數的學習成效上並不理想，尤其是在任意角三角函數化銳角的三角函數的轉換，一方面是不知道甚麼時候該變成餘函數，另一方面則是不知道該正還是負，因此常常需要花很多時間來解釋。加上在這兩冊有三角函數的教科書中，其他單元的份量及難度也不少於三角函數，所以減少授課節數之後，根本很難把教材內容清楚的讓學生瞭解，而且讓學生演練的時間也明顯不足。

圖 4. T_8 敘述原因

事實上 99 課綱在三角函數單元的內容增加了「和差角公式與二倍角公式」，雖然把「正弦與餘弦定理」改為選讀，但是基於課程內容的銜接還是要教。在教材內容增加，而教學時

數卻減少的情況之下，勢必嚴重影響學生的學習成效。

(四) 99 課綱數學 B(I) (L 版)教科書使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」，是符合『訓練學生運用計算器與電腦軟體，解決日常實際問題及未來商業專業及資訊應用領域內實務問題。』教學目標的調整

多數的教師贊同 99 課綱高職數學 B 強調『訓練學生運用計算器與電腦軟體，解決日常實際問題及未來商業專業及資訊應用領域內實務問題。』的教學目標。也同意 99 課綱數學 B(I) (L 版)教科書在附錄中使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」是符合教學目標。對於 L 版的 99 課綱高職數學 B 課本在 100 年版的教科書內容中刪除了「利用三角函數值表和電算器求三角函數值」，認為不會影響學生學習。但是，卻有半數的教師並不會在課室教學中利用電腦軟體來進行「三角函數」單元的教學。 T_8 敘述原因如下：

3. 請問在您的課室中是否會利用電腦軟體來進行「三角函數」這個單元的教學？
會 不會
若回答不會，麻煩敘述您的原因：
以目前課程的安排來說，第一冊的內容同時有四章，除了第一章大部分是國中學過的以外，其餘皆是新的單元。在授課節數的安排雖然「三角函數」比其他單元多，但是為了要兼顧學生對其他單元的學習，只好將電腦軟體輔助教學的部份暫時略過，如果時間上能夠允許，再考慮是否要進行電腦軟體的教學。

圖 5. T_8 敘述原因

電腦軟體輔助教學取代了三角函數值表和電算器來求三角函數值，資訊科技融入三角函數教學也符合課程目標。然而教材內容的廣度及缺乏教學時數的配套，讓第一線的在職教師無法落實資訊科技融入教學，課程設計的理念和目標也打了折扣。

二、95 暫綱與 99 課綱 L 版高職數學 B「三角函數」教材編排順序的差異

針對兩套課綱在教材內容編排順序的調整，分項說明如下：

(一) 99 課綱把「三角形的解法」和「三角函數」拆開，並延後到二下才上「解三角形問題(含三角測量)」，課程缺乏連貫性

絕大多數的教師都認為這樣課程的調整對學生學習並無幫助，而且間隔時間太長，需要重新複習三角函數的性質。 T_4 敘述原因如下：

1. 95 暫網一上第三章的「三角形的解法」緊接在第二章「三角函數」之後。可是 99 課綱把它移到的二下第一章「三角函數的應用」，針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

麻煩敘述您的原因：

沒有運費，因台高課章節後，學生口呼都將三角函數的
基本定義遺忘，若要重新複習（口呼重新上這）
相當沒有效益！

圖 6. T_4 敘述原因

95 暫網把三角函數連續呈現的方式，在教學上感覺比較不會浪費時間。以 99 課綱的編排順序來說，二年級下學期的學生在經過一年多的時間之後，對一上所學的三角函數的印象大概已經忘差不多了，所以在三角形的解法的單元開始之初，有必要把之前教過的三角函數的定義再大略的複習一遍，這樣的結果，勢必會增加授課時間，影響課程的進行。研究者在另一個針對在職教師對 99 課綱高職數學 B 教學順序編排調整的意見調查，結果顯示有 92%（不大同意 47%，完全不同意 45%）的在職教師不贊同編排順序的調整。

（二）「三角形的圖形」和「三角函數的定義」應該拆開，先教「三角函數的定義、性質」，在教「三角形的圖形」

絕大多數教師都認為應該要先教「三角函數的定義、性質」，在教「三角形的圖形」。 T_3 敘述原因如下：

3. 99 課綱課程把「三角函數的圖形」和「三角函數的定義」放在一起，最後才教「三角函數的基本性質」，針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

麻煩敘述您的原因：

應先將性質教授完畢再進次畫圖
可以讓學生前後比較且可以利用
畫圖當成前面性質的佐證

圖 7. T_3 敘述原因

事實上，99 課綱的 L 版高職數學 B(I) 教科書在 99 年版的三角函數這個單元的編排是把三角函數的性質和三角函數的圖形放在同一節；可是 100 年的版本編排順序卻調整和 95 暫網是一樣，先教三角函數的定義與性質，最後才教三角函數的圖形（如表 4）。

表 4：L 版數學 B(I) 三角函數單元 99 年、100 年版編排順序差異比較

95 暫綱高職數學 B(I)	99 課綱高職數學 B(I)	99 課綱數學 B(I) (L 版 99 年)	99 課綱數學 B(I) (L 版 100 年)
CH2 三角函數	CH2 三角函數	CH2 三角函數	CH2 三角函數
1.有向角及其度量	1.有向角及其度量	2-1 有向角及其度量	2-1 有向角及其度量
2.三角函數的定義	2.三角函數的定義與圖	2-2 三角函數的定義	2-2 銳角三角函數的定
3.三角函數的基本關係	形	2-3 三角函數的基本性	義及基本性質
4.任意角的三角函數	3.三角函數的基本性質	質與圖形	2-3 任意角的三角函數
5.三角函數圖形			2-4 三角函數的圖形

註：採自高宏輝（2010）。數學 B (I) (99 年版)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

註：採自高宏輝（2011）。數學 B (I) (100 年版)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

綜合上述分析，99 課綱增加了「和差角公式與二倍角公式」和使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」，也把「三角形的解法」和「三角函數」拆開，並延後到二下才上「解三角形問題(含三角測量)」，這些調整都需要足夠的教學時數。可是教學時數卻從 45 節調降為 40 節，雖然調整了「正弦與餘弦定理」為選讀內容，但後一節的「解三角形問題(含三角測量)」卻需要正弦與餘弦定理的基礎，改列為選讀內容並沒有減少教材內容。

伍、結論與建議

一、結論

本研究有以下結論：

(一) 99 課綱教材內容太豐富，加入和差角公式與二倍角公式，卻又對高職學生其他專業科目的學習沒有幫助，依現有教學時數上課,可能上不完。這和 99 年「職業學校一般科目群科中心學校」對東區高職數學教師所做的「職業學校群科課程綱要教師意見調查表」中與會教師表達的意見是一致的！

(二) 把「正弦與餘弦定理」改為選讀內容沒有實質意義。缺乏「正弦與餘弦定理」的先備知識，學生難以銜接與學習下一節的主題「解三角形問題(含三角測量)」。

(三) 99 課綱把 95 暫綱四冊的內容壓縮成三冊，時數的配置原本就很緊湊。在三角函數單元又加入「和差角公式與二倍角公式」；又把「三角形的解法」延後到二下才教，需要花更多時間去複習三角函數的性質。可是教學時數卻反而縮減，嚴重衝擊高職生在三角函數單元的學習。而教學時間的減少也和相關文獻中江佳玲等人（2007）在關於三角函數研究中所建議的增加授課時數背道而馳。

(四) 雖然課程設計能讓學生應用計算器與電腦軟體，解決三角函數相關問題。在職教師也認同這個目標和理念。但在教學時數的限制下，恐難落實資訊科技融入教學的理念。

(五) 99 課綱把「三角函數」和「三角函數的應用」拆開，並且拉長教學時程，採螺旋式的課程安排，調整課本的編排順序，符合郜錦程等人(2006)在研究中所作的建議。然而教學時程拉的太長，反而造成單元主題間的連貫性不足。而三角函數內容對學生而言較艱深，又把「三角函數」及「三角函數的應用」拆開，分別在一上和二下授課。這樣的調整不但延遲教師上課進度，更不利學生學習。在 100 年「綜合高中數學科一、二年級課程銜接意見彙整摘要」中，教師也同樣指出高職數學 B 中第一冊教三角函數的內容，但事隔一年後再教三角函數的應用，同學在銜接上困難度高。

二、建議

依照上述結果提出三點建議提供課程設計者一些參考方向。

(一) 增加授課時數

三角函數對學生而言是較困難的單元，尤其九年一貫課程刪除三角函數，對高職生而言三角函數是前所未見的知識，抽象的概念學生需要一段時間去學習、摸索。也讓教師能運用電腦軟體去教三角函數值與圖形的描繪，落實科技資訊應用在解決三角函數問題，進而達成教學目標。

(二) 教材設計的連貫性

教學時程拉太長，學生需要更多的時間去重新建構相關的先備知識，感覺就不是螺旋式的編排方式，反而像是學習上的斷層。建議將三角函數分成「三角函數的基本概念」以及「三角函數的性質」與「三角函數的應用」三個部分。將「三角函數的基本概念」提早在國中教授，讓學生能慢慢的接觸、熟悉三角函數教材內容，讓學生進入高中、職後三角函數的學習能順利的銜接，讓學生能循序漸進的建構三角函數的知識。

(三) 回歸技職教育「務實致用」的精神

高職教育和綜合高中及普通高中的教學體制、精神和目標原本就不同，不能為了在三種學制上做橫向的整合，而在高職課程中增加較無應用性的理論課程。還是要以課程的應用性為主，讓學生能熟練的運用這些知識、技能去解決日常生活中所可能面對的實際問題及專業領域內的實務問題。

參考文獻

- 尤欣涵 (2010)。台灣、美國與新加坡中學階段幾何教材內容之分析比較-以三角形為例。未出版之碩士論文，國立嘉義大學數學教育研究所，嘉義。
- 江佳玲 (2007)。九年一貫課程實施後對三角函數學習之影響。國立中央大學數學研究所，桃園。
- 李隆盛 (2007)。教科書制度與影響—序言。台北：五南。
- 南投高商 (2011)。綜合高中數學科一、二年級課程銜接意見彙整摘要。國立南投高商，南投。
線上檢索日期：2011 年 12 月 26 日。網址：http://www.pntcv.ntct.edu.tw/~hischool/uploads/upfile/72_%E7%B6%9C%E5%90%88%E9%AB%98%E4%B8%AD%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91%E6%84%8F%E8%A6%8B%E5%BD%99%E7%B8%BD%E6%91%98%E8%A6%81.pdf
- 部錦程 (2006)。台灣與英國三角函數課程之教科書比較。未出版之碩士論文，國立中央大學數學研究所，桃園。
- 陳仁輝、楊德清 (2010)。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。科學教育學刊，18(1)，43-61。
- 黃立期 (2010)。臺灣四十年來國編版國小數學教科書「分數乘法」教材之分析比較。未出版之碩士論文，國立台北教育大學數學教育研究所，台北。
- 黃鈺芸 (2007)。九十四學年度高一學生三角函數之學習狀況研究。未出版之碩士論文，國立中央大學數學研究所，桃園。
- 黃靚雯 (2008)。高職一年級學生解三角函數問題思考表徵之個案研究。高雄師範大學數學系，高雄。
- 教育部 (2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。
- 教育部技職司 (2005)。職業學校群科課程暫行綱要。台北：教育部。
- 教育部技職司 (2009)。職業學校群科課程綱要暨設備基準—一般科目。台北：教育部。
- 張琇涵 (2006)。台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較。國立中央大學數學研究所，桃園。
- 董修齊 (2011)。台灣與芬蘭國小數學教科書幾何教材內容之分析比較。未出版之碩士論文，國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東。
- 楊德清、陳仁輝 (2011)。台灣、美國和新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學能力方式之研究。科學教育學刊，19(1)，39-67。

臺師大教育研究與評鑑中心附設「職業學校一般科目暨藝術群科中心學校」(2009)。職業學校一般科目課程綱要政策之教師意見調查。台北：國立臺灣師範大學。線上檢索日期：2011年12月19日。網址：<http://www.cer.ntnu.edu.tw/gcss/paper/> 職業學校一般科目課程綱要政策之教師意見調查結果分析(北區)20091118.doc 臺師大教育研究與評鑑中心附設「職業學校一般科目暨藝術群科中心學校」(2010)。99年職業學校群科課程綱要教師意見調查表東區(數學科)。台北：國立臺灣師範大學。線上檢索日期：2011年12月26日。網址：<http://cer.ntnu.edu.tw/gcss/record/99%E5%88%86%E5%8D%80%E8%AB%AE%E8%A9%A2%E8%BC%94%E5%B0%8E%E6%9C%83%E8%AD%B0%E7%B6%B2%E8%B7%AF%E7%89%88%E6%9D%B1%E5%8D%80/99%E5%B9%B4%E8%81%B7%E6%A5%AD%E5%AD%B8%E6%A0%A1%E7%BE%A4%E7%A7%91%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E7%B6%B1%E8%A6%81%E5%95%8F%E5%8D%B7%E7%B5%B1%E6%95%B4%20%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91.doc>

鄭婷芸(2011)。台灣、美國與新加坡國中階幾何教材內容之分析比較。未出版之碩士論文，國立嘉義大學數學教育研究所，嘉義。

高宏輝(2009)。數學B(I)(95課綱)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

高宏輝(2010)。數學B(I)(99年版)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

高宏輝(2011)。數學B(I)(100年版)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

高宏輝(2012)。數學B(IV)(99課綱)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。

Ding, M. & Li, X. (2010). A Comparative Analysis of Distributive Property in U.S. and Chinese Elementary Mathematics Textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(2), 146-180.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Tarr, J. E., Chavez, O, Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the Written to the Enacted Curricula: The Intermediary Role of Middle School Mathematics Teachers in Shaping Students' Opportunity to Learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191-201.

Tornroos, J. (2004). *Mathematics Textbooks, Opportunity to Learn and Achievement*. ICME-10M, Discussion Group 14 Copenhagen, Denmark.

Yang, D.C., Reys, R.E., & Wu, L.L. (2010). Comparing the Development of Fractions in the Fifth- and Sixth-Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA, *School Science and Mathematics*, 110 (3), 118-127.

附錄一

95、99 高職數學 B 三角函數教材之教師意見調查

第一部份：基本資料 (請您在適當的選項中打『V』)

1. 學歷：大學 _____
 研究所 _____
2. 服務年資：_____ 年
3. 是否有95課綱高職數學B的授課經驗 是 否
4. 是否有99課綱高職數學B的授課經驗 是 否

第二部份：95 暫綱與 99 課綱高職數學 B 三角函數單元調整內涵

(一) 對 99 課綱高職數學 B 教材內容調整的看法

1. 99 課綱高職數學 B 在第四冊第一章「三角函數的應用」中增加了「和差角公式與二倍角公式」，針對這樣內容的調整是有助於學生學習？
非常同意 同意 不同意 非常不同意
麻煩敘述您的原因：

2. L 版的 99 課綱高職數學 B 課本在 100 年版的教科書內容中刪除了「利用三角函數表和電算器求三角函數值」，針對這樣內容的調整您認為會影響學生學習嗎？
會 不會
麻煩敘述您的原因：

3. 99 課綱高職數學 B 在分配節數的調整 (95 暫綱 CH2 三角函數 27 節，99 課綱 CH2 三角函數 24 節；95 暫綱 CH3 三角形的解法 18 節，99 課綱 CH1 三角函數的應用 16 節)，您是否能在分配節數內上完教材內容？
可以 不可以
麻煩敘述您看法：

4. 99 課綱高職數學 B 把「正弦與餘弦定理」改為選讀內容，您在「三角函數的應用」這章節授課時，是否教授「正弦與餘弦定理」這個單元？
會 不會
麻煩敘述您的原因：

(二) 對 99 課綱高職數學 B 教材編排順序調整的看法

1. 95 暫綱一上第三章的「三角形的解法」緊接在第二章「三角函數」之後。可是 99 課綱把它移到的二下第一章「三角函數的應用」，針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

麻煩敘述您的原因：

2. 下面兩種教學順序，您認為哪一項較有助於學生學習？

銳角三角函數的定義 \Rightarrow 任意角的三角函數 \Rightarrow 三角函數的基本關係

銳角三角函數的定義 \Rightarrow 三角函數的基本關係 \Rightarrow 任意角的三角函數

麻煩敘述您的原因：

3. 99 課綱課程把「三角函數的圖形」和「三角函數的定義」放在一起，最後才教「三角函數的基本性質」，針對這樣內容的調整您認為有助於學生學習？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

麻煩敘述您的原因：

(三) 對 99 課綱高職數學 B 教學目標調整的看法

1. 99 課綱高職數學 B 強調『訓練學生運用計算器與電腦軟體，解決日常實際問題及未來商業專業及資訊應用領域內實務問題。』您是否贊同？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

2. 因應教學目標的調整，99 課綱數學 $B(I)$ (L 版)教科書在附錄中使用 Geogebra 電腦軟體輔助教學「三角函數的圖形」及利用 Excel 2003 教「解三角函數值」。

您是否贊同這樣的調整幅和教學目標？

非常同意 同意 不同意 非常不同意

3. 請問在您的課室中是否會利用電腦軟體來進行「三角函數」這個單元的教學？

會 不會

若回答不會，麻煩敘述您的原因：

再次感謝您的協助!感恩不盡~~

活動報馬仔

一、 2012/07/08(日)~2012/07/15(日)

The 12th International Congress on Mathematical Education

地點：Seoul, Korea

參考網址：<http://www.icme12.org/>

二、 2012/07/18(三)~2012/07/22(日)

**The 36th Conference of the International Group for the
Psychology of Mathematics Education**

地點：國立台灣師範大學

參考網址：<http://www.tame.tw/pme36/index.html>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（keywords），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

- (二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

- (三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

- (四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

- (五) 來稿請e-mail

至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw