# 國小學生數列作業一般化策略運用之研究

陳嘉皇

崑山科技大學　通識教育中心

## 摘要

本研究利用數字板設計數列,用以探索 33 位國小 6 年級學生一般化策略運用的表現，作業內容包含辨識數字關係、尋找樣式組合、一般化解題和擴展、臆測等活動。資料分兩部分分析，量化資料針對學生產出之策略予以類型分析與應用人次、百分比比較；質性資料則深入分析學生採用此策略之理由。研究發現：學生會運用基礎數論特徵，說明數列關係；能採取循環策略組合有效的樣式進行解題；對數列中的未知數會採用多元策略解題,並利用逆算法求解;利用先前建立的樣式規則擴展至其他情境,正確的進行臆測。研究建議：教師應促進學生一般化活動中樣式辨識與代數推理的連結，激發有效樣式的產出；加強學生樣式的形式與解題方法之間的轉化，協助數學概念建立；強化學生符號的思考與運用，促進代數推理能力，以協助學生解決樣式規則擴展和臆測歷程產生的樣式辨識錯誤、執著於數字運算而忽略其他有效解題樣式等問題。

**關鍵字詞：解題、數列、一般化、臆測**



通訊作者：陳嘉皇　chenchai1109@yahoo.com.tw

# 壹、緒論

許多學者(Carpenter, Franke, & Levi, 2003；Kaput, 1999；Kieran, 2004；Mason, 1996)認為一般化指的是不同數學概念與表徵之間關係的推理、探究與檢驗。因此，數學教育的核心任務應在於喚醒學生對數學一般化本質的覺知，促使學生運用數學模式表達數量關係，使用代數符號呈現數學結構，以進一步理解樣式及函數。數學一般化若能透過特殊案例的分析，進行系統組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現結構知識並轉化物件之間的關係，且能表達和論證一般化，不但能提供學生思考路徑及發現規則等實質效益，還能促進解題能力與技巧的發展(Blanton & Kaput, 2005)。

實施一般化活動對學生數學概念的建構和發展非常重要，美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics〔NCTM〕, 1989)之《Curriculum and evaluation standards for school mathematics》主張數學課程的教導，需包含能促進學生參與樣式、關係與函數理解的活動。教育部(2003)也宣稱六年級學生應能利用數量關係，列出適當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。然而研究發現從算術轉換至代數推理的一般化歷程，已成為許多學生困難所在(Carpenter, Franke, & Levi, 2003；Kaput, 1999；Kieran, 2004；Mason, 1996)，包括缺乏描述關係所需的合適語言、運用錯誤策略描述一般化的趨勢，無法利用空間知覺推理樣式規則，也無法將情境的數字與樣式做連結。這些困難若持續下去，將來會造成學生偏向重視運算結果，而忽略一般化步驟的規律，進而阻礙推理能力的擴展。

檢驗樣式一般化的研究發現，學生雖然可以辨識樣式的變化，但無法獲得有用的代數式或利用一般化擴展至其他樣式(Blanton & Kaput, 2002; English & Warren, 1995; Lee, 1996)，一些研究也指出：由於學生解題常傾向循環而非函數的關係，因此在一般化的擴展和應用表現就產生障礙(李美蓮，2003；李佩玟，2004；陳嘉皇，2007，2010；Schliemann, Carraher., & Brizuela, 2007)。學生一般化表現產生的問題，

一方面出於實務現場教師教學方式的影響，雖然算術為小學課程的核心，教師仍以計算技巧的熟練及精算為主，較少著墨於關係思考與一般化能力的培養，以致於學生在代數推理的表現較不顯著；另方面顯示教師對一般化知識和技巧的缺乏，無法將合適的素材與策略應用於教學實務上，指導提升學生一般化歸納推理的策略和技巧。一般化是項重要的能力，是數學學習的基石，但對小學師生而言，是屬於一新的且不熟悉的議題，要讓一般化活動能在小學課程扎根，順利進行教學，勢必要提升教師在此方面的知識、概念與能力。

「數與計算」是小學數學課程教學的重點，學生藉由算術經驗與技巧解決面對的問題。因此，要理解與促進學生一般化能力，可藉由提供數字樣式(numerical pattern)的活動，引導探索、推理、歸納問題中的數學概念，藉由樣式變化的規則推演算式並應用解題。數字板(尤其是百格板，Hundred chart)是小學課室裡常用的教學工具，教師用他來教導十進位、乘法或具餘數之除法的數學概念。數字板可提供學生利用視覺辨識、比較與推理，歸納數學結構，並以數列的單位關係導出樣式規則，能以代數式解釋其關係，所以，數字板也是明瞭與建構樣式一般化的利器。樣式是數學的核心，學生組織與發展樣式的能力與他是否能運用數學推理的能力息息相關(White, Alexander & Daugherty, 1998)，數字板具有重複樣式與數字樣式的特徵，足以激發學生探索建構樣式規則，提供研究者與教師對其在一般化歷程解題策略與思考方法的理解。基於上述理由，本研究藉由數字板設計數列問題，探究六年級學生一般化的表現，明瞭其在一般化歷程中，會運用何種策略進行解題，其模式為何？進而將研究發現提供未來代數推理教學與課程設計參考。本研究目的如下：

**一、探索學生辨識數列關係的策略，以明瞭一般化教學的方向。**

**二、探討學生發現有效樣式運作的策略，做為指導一般化課程設計之參考。**

**三、探討學生數列解題的策略？以提升學生一般化表現成就。**

**四、探討學生一般化擴展臆測至不同情境的表現，提供改善教學實施之依據。**

# 貳、文獻探討

## 一、一般化的定義與活動設計

代數常被視為是「一般化的算術」，因此可在數字樣式裡透過算術一般化的概念而洞察代數概念的本質。一般化是什麼？Dreyfus(1991)認為是：對特殊案例進行推理或化約，辨識其間的共通性，並正確的加以擴展。Kaput(1999)則將一般化定義：對數學問題加以推理與溝通並擴展可能的範圍，能明確辨識與說明不同樣式的共通性，轉移推理與溝通至其他樣式或情境。以 Kaput(1999)的觀點來說，一般化與以下活動相互連結：(1)辨識不同例證之間的共通性，(2)擴展推理，以超越原初的範圍，或是(3)從特殊的例證中衍生出較廣泛的結果。從上述定義可以理解：學生進行一般化，需能正確的辨識問題變項的意義，有效運用合宜的策略進行推理，歸納問題的規則或結構的方式呈現關係。所以，一般化可視為是規則的創造，類似歸納的觀念，能描述成物件共通性的確認；一般化也可視為是演繹的歷程，擴展某人的推理。不管是規則的創造，或推理的擴展，這些表現都與數學概念的抽離歷程有關。

Lee (1996)宣稱：如果想促進學生正確的一般化，首要之務，應探索他們如何洞察與理解樣式。因此，小學實施樣式一般化教學，目的應協助學生發展推理、歸納的能力，並採用有意義與正確的方法表達一般化。基本的樣式作業指的是能讓學生參與有意義和多樣化的一般化活動，此種活動能組合學生的知覺和符號推論的能力，以便建立和論證合理與有用的代數結構，並能在公理的形式下獲得確認(Lee, 1996)。Shipley (1993)認為一般化的進行應包含兩項作業：(1)組合：從線索中導引出公式，即便線索不完整仍可提供合理範圍的項目，藉由一些方式而彼此組合；(2)外推：採用檢測將推論的步驟投射到其他的要素上，並使其連結。從 Shipley 的觀點可以理解：學生要從有限、不完整類型之樣式進行一般化，組合和推理的知識扮演著非常重要的角色。從組合的歷程來看，有意義的樣式應該是種具有順序結構的物件，學生可針對作業物件或項次之間的一致性關係，促進執行時採用一種做數學的態度，完成關係的連結與擴充。在外推部分，由於樣式結構的形成

是種主觀建構的活動，學生必須明白如何將關係的知覺與對符號推論加以有效的組合，說明樣式結構的變化，應用到已知或未知的項次。

研究發現，要讓學生發展有意義的推理步驟，引導一般化知識的建構，須有正確且可執行的一般化作業，因為這些作業與數學抽離等議題緊密連結，可協助產出組合與推理的行為，化約一般化所需的時間及能量(Dreyfus, 1991)。Rivera (2010)認為有意義的一般化活動包含兩項交互作用：(1)對物件推理和化約，實際的驗證樣式各項次的變項，包含使用代數式，如不同的計數與分離樣式中部分物件的方法；(2)符號化的行動，包含對樣式形式的轉化。Rivera 認為，當學生探索合理的規則時，可同時說明與採用已知項次所具備的知識，對不完整的未知項次加以建構。亦即學生需針對所給予的樣式，提供假設性的解釋，包含在擴展項次的關係時，能對樣式中相關要素辨識、關係組合、樣式類型的推理，進而將歸納產出之規則引導至進一步的確信。Rivera 提出的一般化交互作用歷程，事實上，亦如 Lee 宣稱的一般化重點，即應組合學生的知覺和符號推論的能力，才能建立和論證合理與有用的代數結構。因此，完整的一般化作業，應包含樣式要素的知覺、推理、關係組合、符號表徵與解題等活動，並讓其解釋所以然。

為配合上述論點的要求，本研究採取學生經驗熟悉且常接觸的數字板，設計相關作業，做為探索學生一般化表現的工具，期盼能透過其所具有的數字樣式特質，探索學生是否能對樣式要素進行辨認，具體化產出規則，解釋問題結構的關係，並將這些規則予以臆測，擴展應用至更廣泛的範例上，協助引導學生從算術至代數推理平順的轉化。

## 二、數列樣式之一般化研究

樣式是數學的核心，是數學知識的基礎，所以數學常被指稱為樣式的科學(Resnick, 1997)。數學家常以觀察樣式、臆測、檢驗、討論、言語表述、及一般化樣式描述「做數學」的意涵。例如，教育部(2003)頒佈的《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》之代數能力指標，明示六年級學生能利用常用的數量關係，列出適當的算式，

進行解題並檢驗解的合理性。雖然條例並未明說「樣式」此術語，但可理解的是數量關係的表徵即是具有特定性質的樣式，如此學生才能從觀察樣式的變化與發展，抽離出重要的規則，利用符號表達物件結構的關係，進而臆測、檢驗這些規則，形成重要的數學概念。

在小學的教材裡，算術問題為學生學習的重心，為讓學生明瞭數學問題的關係與結構，設計的問題大多具有基礎數論(elementary number theory)有關「重複樣式」與「數列樣式」的特徵。重複樣式是種具有可辨識的重複單位(Threlfall, 1999)，此樣式具有循環的結構，可以透過小部分的樣式重複應用而產生，例如 A, B, A, B,...的樣式，或是每週的天數，這些重複的單位可當成最小的元素集合，透過連續應用而產出樣式，例如 ABAB ...或 ABABAB ...皆可同時產出重複樣式 ABABAB ...重複的單位皆由 AB 構成。

數列樣式是由數字構成的樣式，其範圍只能侷限於一些具有數值元素的樣式，即此樣式能被轉換至非數字的樣式，但不會喪失原來樣式的一些特徵，例如，樣式 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 可以轉換成 abcdcba，雖然成了非數字樣式，但仍是運用數字當成個別元素的樣式。而像 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2,...當他轉換成 abaabaaab ...，並未喪失樣式的本質。

重複樣式的作業，可當成教導數學概念一個有用的基礎，將做樣式的行動當成具體與熟悉的經驗，可有意義的推論到新概念的討論(Threlfall, 1999)。小學數學教材對樣式的處理，基本上集中於重複樣式，經驗大多是每週的天數、每月的日數等循環特質的樣式。學生顯示不同的重複樣式作業，包括複製、辨認與表達重複的單位、擴展與外推或填滿空格、轉換與改變成不同的模式、及創造或產出自己的重複樣式(Threlfall, 1999)。而數列樣式操作的過程常包含四種基本的作業：解題與提供規則(非正式或正式的表達產出樣式的要素)、擴展與持續樣式、辨認與決定數列樣式的存在，以及創造和建構自己的數列樣式(Heargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks - Taylor, 1999)。數字板具有重複樣式和數列樣式的特質與數學教育的功能，所以本研究擬透過數列的

設計，探討學生對樣式要素的辨識、有效樣式組合、解題、擴展與臆測等一般化歷程，會採取何種策略因應，並探索其背後隱含的意義。

理解基礎數論概念是認識其他數學領域的基礎。有關基礎數論應用於學生表現的研究，部分是關於證明或解題的數學議題(Lester & Mau, 1993; Martin & Harel, 1989; Movshovitz-Hadar & Hadass, 1991)，部分研究則透過解題探索數字的乘法結構(Ball, 1990; Graeber, Tirosh & Glover, 1989; Greer, 1992)，部分則探索教師對基礎數論概念的理解(Campbell & Zazkis, 2002; Zazkis, 1998; Zazkis & Campbell, 1996a, 1996b)，另外 Olson(1991)建議可利用幾何觀點配合基礎數論探究「最大公因數」(greatest common divisor, gcd)的表現，但沒有探索基礎數論對最大公因數理解的影響。

Rowland、Martyn、Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，例如 3＋4＋5＝3×4，8＋9＋10＝3×9 以及 29＋30＋31＝3×30 的問題，要求實習教師歸納這 3 個範例，並寫下文字說明，許多人無法完成，一些則寫下錯誤的解釋如：3 個連續整數加在一起等於前 2 個數字的乘積。Rowland 等人將此種現象稱為窄化視野的效果(tunnel vision effect)，亦即個體常將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。要改變此缺失，Rowland 等人建議可要求學生依數列順序逐項的吟誦這些等式，促使注意力可集中並發現變化。

關於基礎數論應用於小學學生數學表現的探討，以往的研究大多集中在線性數列結構(數線)，要求學生觀察數列數字的變化，找尋規則，進而運用四則運算解題，求出未知數(項次)的答案、或計算出算術集(Arithmetic progression, A.P)的和，然而對抽離數列規則，轉化成符號或代數式表達結構關係之一般化要求則較不明確，致使學生從算術轉化至代數的歷程產生困難(李美蓮，2003；李佩玟，2004；陳嘉皇，2007，2010；Tall, 1992)。Tall的研究發現，提供學生連續數字的數列作業，他們能覺察到數列順序的律動模式及共同的公差，很快的計算連續項次的數字，使用的策略只是將數列當成循環的樣式處理，無法賦予數列代數公式，使得算術一般化的效用受到阻礙，因此建

議一般化的活動作業應同時呈現循環、代數公式和可迭代的其他方法。

本研究採用之數列模式，主要參考 Rowland、Martyn、Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，利用數字板空間幾何樣式的特性，結合基礎基礎數論，創發不同數列作業，以激發學生數學推理及一般化能力的展現，從中理解學生採用何種策略解題，其思考方式為何？

# 參、研究方法與步驟

本研究採用作業調查法方式進行學生一般化表現資料的蒐集，採取個別測驗的方式實施。首先提供研究者自編之「數字樣式一般化作業」予學生作答，根據學生作業表現之正確與否及解題運用的方式，對各作業解題運用的策略特徵與行為，歸納策略類型，再統計分析各策略運用之人次；作答歷程並配合每項作業完成後之訪談，以深入理解學生採用此策略之理由。

## 一、研究樣本

參與研究的學生來自於南部某國小 6 年級同一班級 33 位學生。參與研究班級的教師教學採取問題思考法，常詰問學生要求對問題線索思索，並對同儕的解答加以辯論與解釋，教師也常在課後提供補充數學教材訓練學生解題探究，故學生勇於接受問題挑戰。決定採用該班學生參與研究的原因，一方面考量一般化作業對學生而言較不熟悉，較困難且會卻步，為尋找勇於接受挑戰，了解學生成功的解題表現，故以該班學生為樣本；另方面，這些學生習慣在課室表現與說明解題策略與方法，協助提供其他學生作答參考，因此擬藉由其對問題的解題表現，深入探究學生對數列作業的反應。參與研究之學生在 5 年級下學期時已學過「未知數」、「找規律」等單元活動，本研究進行前，亦已學過「列式與解題」。

## 二、研究工具

本研究以設計之數字板數列樣式做為研究工具，此工具是參考 Rowland、Martyn、 Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，利用數字板空間幾何樣式的特性，結合基礎數論擴展而成，包含 4 類作業(如附件 1)。

第 1 項作業為「辨識數列總和之數字關係」，提供 4 種 3 個數字連接之數列(橫、直、左斜、右斜)，要求學生描述數列總和的數字關係，目的在了解學生是否明白不同模式構成的數列具有不同的結構關係，從中理解學生採用何種策略表達這些數字的關係，並藉由這些類型的策略做為基礎，進一步探索與其他一般化作業的關係；

第 2 項作業為「發現數列總和之有效樣式」，有 4 種類型數列(橫、直、左斜、右斜)，要求學生以快速的方式得出數列之數字總和，並解釋其所用的策略？此作業在於了解學生面對複雜繁瑣的數字總和計算時，能否從中發現有效之樣式進行解題，並藉由說明了解其發現樣式所用之策略。

第 3 項作業為「一般化解題」，安排數列具 3 個數字總和可以形成「3×中間數字值」的樣式 7 種，樣式裡隱藏某未知數，要求學生利用其所建立的樣式規則解題，並說明解題所用的策略，此作業的目的在於驗證學生是否明白且可運用其所發現的樣式規則進行解題。學生可用符號方式對策略進行說明，因為符號扮演塑造與描述數列結構關係的角色(Gravemeijer, 2004)，可以支持學生探究正式數學，促進做數學的意義。

第 4 項作業為「擴展與臆測」，將數列數字個數擴增為 5 個，分為兩部分進行，一為擴展作業，提供 4 種數列(橫、直、垂直交叉、斜線交叉)，要求學生利用有效的策略得出其總和；另一為臆測作業，提供數字任意排列之數列，要求學生利用先前發現的策略進行臆測，並探討是否適用。本作業在於了解學生是否能將先前發現之樣式概念予以擴展，並臆測此規則是否可應用於任何數列情境。

調查活動採取個別作業方式進行，為免除學生急於利用紙筆運算，並能充分思考解題步驟與策略，故逐次依相關問題呈現給學生作答。為鼓勵學生產出有效策略，研究者透過引導詢問「想一想是否有其他方法可用！」激勵學生思考，因此，學生對於每一試題可提供多種的解題策略。學生所採取的解題策略可藉由其在 4 種作業產出的

語文說明或動作表徵加以推測與解釋，並將具相似特徵的策略歸為一類，賦予名稱。以作業一、辨識數列關係為例，學生對線性數列可指出或說明各項次的公差，則此方法稱為「循環策略」；以數字在數字板所處空間位置說明數字關係，則可歸類為「單位關係策略」；若將數列上下數字加減 1，轉變公差的關係，說明數字關係，則歸類為「轉換策略」。

作業編製完成後，進行信、效度的考驗。效度方面，研究者將試題提供 2 位國小教師審查進行專家效度考驗，在第 1 項辨識樣式要素作業方面，教師要求能將各組數列給予不同顏色加以區別，以讓學生容易判別；在第 2 項發現有效樣式作業方面，希望試題能平均分佈數字板各處，勿集中於大的數字範圍，以減少學生作答耗費時間與認知上的負荷；在第 4 項擴展與臆測作業方面亦建議試題能提供非線性的數列 (多種組合方式)，以考驗學生是否理解。信度方面，試題經 241 位六年級學生預測後，依據其作答正確比例計算並經統計分析，總共抽取出四項作業因素，其信度係數之 Cronbach α 值分別為.94、.81、.79、.75，總體作業之 α 值為.87。各作業因素所形成之分量表信度係數介於.75 至.94 之間，皆在編製作業可接受之範圍內。

## 三、資料分析

蒐集之資料由研究者與 2 位國小教師先行判讀是否正確，然後再行策略的分類。由於設計的數字板問題，是以基礎數論之加法問題為主，目的在於探索學生一般化歷程產出之策略及其思考模式，因此編碼的基礎環繞在以數字加法轉換至乘法結構(N 個數字其總和等於 N×中間數字 C)的連續體上，也因為數字板隱藏的樣式可透過視覺化策略引出，因此學生作業結果的分析，可透過其思考的說明和解題策略的特徵予以歸類。關於學生各活動表現的分析，分為兩部分說明，一以描述統計方式計數各策略或解釋類型之人次與百分比，以瞭解學生對各作業最常使用的解題方法與思考模式。因學生在單一試題解題上可提供多種策略，因此其策略比例的分析，採使用人數除以總人數方式計算；另則以質性方式深入探討學生採用策略背後所蘊含的意義。資料採取

4 碼編碼方式進行分析，第 1 碼(A、B、C、D、) 代表一般化的 4 種作業；第 2 碼(T1、T2、T3、T4…)表示作業各試題編號；第 3 碼(a、b、c、d…)表示學生在各作業產出的解題策略或思考模式；第 4 碼(1、2、3、4⋯) 則表示受試學生之編號。研究者與 2 位教師依據蒐集的學生資料進行編碼，內部一致性為.91，關於不一致部分則透過觀看相關的影帶與學生作業表現的資料再行確認。

為使研究具有良好之信、效度，在信度上採用兩種策略，(1)資料的真實性：對於資料的呈現盡量以原始記錄及訪談記錄為依據，詳實的轉譯成逐字稿；(2)與研究人員討論修正：研究者於研究過程中與陳教授、2 位教師進行討論修正，以避免主觀偏見。效度的提升則採取(1)研究人員之三角檢定：研究過程中及資料蒐集後之轉譯分析，研究者與其他成員持續針對資料進行分析討論，以提供研究者不同面向之思考，減低研究者疏失及主觀偏見，並取得共識；(2)資料來源的三角校正：研究者運用回溯法獲得之訪談轉譯稿資料、錄影(音)、學生作業表現、教師現場記錄進行交叉比較與檢驗。目的希冀能運用豐富及多元之資料檢驗學生一般化的表現。

## 四、研究步驟

本研究參考文獻，編製調查工具，經過預試、修正之後，於 2009 年 12 月至 2010 年 6 月期間實施。調查採用個別作業方式，以學生充分完成作答考量，作業時間約為 40 至 50 分鐘，作業的歷程皆予以錄影(音)，以做資料分析之用。在施測之前，先說明作業目的、作答方式，要求學生思考，做出最佳判斷及提供合適之解題策略，每題都須作答，不能遺漏。每項作業一完成，研究者即針對作業內容的反應，要求學生立刻做說明，學生可運用動作、言語、繪畫等各種表徵解釋與表達其策略應用的理由。俟作業與訪談結束，即整理相關資料進行分類、統計，繕寫研究結果。

# 肆、研究結果與發現

學生一般化各作業表現結果，依辨識數列關係、發現有效樣式、一般化解題、擴展和臆測等分析資料呈現，進一步討論學生數字樣式一般化表現的情形。

## 一、辨識數列關係之策略分析

學生辨識數列關係採用之策略與人次分佈如表 1、2 所示。

表 1：學生辨識數列關係採用之策略

| 解釋關係之策略 | 說　　明 |
|---|---|
| a.循環策略 | 以公差說明數字關係 |
| b.空間關係策略 | 以數字在數字板所處空間位置說明數字關係 |
| c.轉換策略 | 將數列數字加減 1，說明數字關係 |

表 2：學生辨識數列關係各試題採用策略之人數統計

| 策略類型＼試題 | 運用人次 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1(橫式數列) | 2(左斜數列) | 3(右斜數列) | 4(直式數列) |
| a.循環策略 | 30(90.9%) | 26(78.8%) | 24(72.7%) | 30(90.9%) |
| b.轉換策略 | 18(54.5%) | 3(9.1%) | 3(9.1%) | 18(54.5%) |
| c.空間關係策略 | 0 | 3(9.1%) | 3(9.1%) | 0 |

從資料得知，對於數字板上不同數列的數字關係，學生運用了 3 種策略解釋數字之間的關係，其中以循環策略使用的人次最多，因為利用經驗將數字進行加減，就能發現數列的公差，而解釋其間的規則與關係。例如：

*79 比 88 少 9，88 比 97 少 9，79＜88＜97；95 比 84 多 11，84 比 73 多 11，95＞84＞73。*【AT3a09】

此種解釋最常出現在橫式與直式的數列(試題 1、4)，因為透過加減運算或視覺比對，就能發現相同的規則而解釋數字板數字的關係。較特別的是，對斜式數列數字關

係的解釋，除利用循環策略外，有 3 位學生對試題 2、3 採用空間關係的策略說明數字關係，他們將數字板數字所處之空間關係「定錨」，明白同列越靠右邊者數字越大，同行而跨列的數字則每列相差 10；採轉換策略說明數字間的關係，則發現呈現的斜線數列與直(橫)式數列的數字有所關聯(加減 10 或 1)，並與數字板的單位做連結，得出斜線數列的規則(左上右下會多 11，右上左下會多 9)。原案如下：

> *以 73、84、95 來說，是以 10 為單位的數字板，每一行上下的數之間都差 10(74、84、94)，74 減 1 就是 73，與 84 就差 11，95 比 94 多 1，比 84 多 11，這 3 個數都是差 11。*【AT2b03，AT2b18，AT2b019】

由學生的反應顯示，對於研究提供之數列設計，大部分學生會利用視覺觀察數字之間差異的特質，瞭解數列中各數字彼此的關係，找出數字之間的公差作為數列的要素，利用循環策略協助其辨識與解釋數列的關係。3 位學生則擴展循環策略，將情境中相關要素，例如斜線數列與線性數列之間的變化關係(多與不足)，轉換並建構成解題的規則，解釋數列中數字的關係。

## 二、發現有效樣式之策略分析

有關學生發現有效樣式採用之策略與各試題分佈之人次如表 3、4 所示。

表 3：學生發現有效樣式使用的一般化策略

| 樣式的類型 | | 說　　明 |
|---|---|---|
| 循環策略 | a.S×3＋D×3 | S 為數列中最小的數字，D 為各項次的公差 (例如 73、82、91，S 為 73，D 為 9)，總數即為 3S＋3D |
| | b.L×3－D×3 | L 為數列中最大的數字，D 為各項次的公差(例如：73、82、91，L 為 91，D 為 9)，總數即為 3L－3D |
| 轉換策略 | c.C×3 | C 為數列中間的數字，因其前後或上下數字的公差可互補，和為 3 個 C 值 |
| | d. A＋B＋C－3D | 以直式數列後的 3 個數字為基準 A、B、C，數列內的數字分別較其少 1 公差，所以數列數字的和為 A＋B＋C 再－3D(例如：69、79、89，A 為 70、B 為 80、C 為 90)。 |

表 4：學生發現有效樣式各試題採用策略之人數統計

| 試題 / 策略類型 | 運用人次 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1(右斜數列) | 2(左斜數列) | 3(橫式數列) | 4(直式數列) |
| a. 3S＋3D | 21(63.6%) | 24(72.7%) | 26(78.8%) | 26(78.8%) |
| b. 3S－3D | 0 | 0 | 3 | 0 |
| c. C×3 | 13(39.4%) | 13(39.4%) | 18(54.5%) | 15(45.5%) |
| d. A＋B＋C－3D | 0 | 0 | 3(9.1%) | 3(9.1%) |

從上述資料得知，學生發現的樣式類型會隨著數列的空間結構而有所不同，排除運用數字連續加法的策略外，大部分學生皆可發現有效的樣式進行解題。其中發現的樣式以 a 策略為最多，此種類型是以公差之循環策略做基礎，發現數字之間的樣式關係後，即將數列中最小的數字(S)做為基準，發現第 2 個數字與 S 有 1 個公差 (1D)，第 3 個數字與 S 有 2 個公差(2D)，因此以 S×3＋D×3 的樣式呈現數列關係。有 3 位學生則採取 b 策略以 3S－3D 的樣式解題，b 策略與 a 策略相似，但基準數是以數列中最大的數字為主。其次，發現有效的樣式模式為 C×3 此類型，學生將循環策略加以轉換，觀察數字空間位置與公差的關係，發現數字和可以中間數字(C)做基準，其他 2 個數字與 C 的公差在加總時可相互抵銷，因此可採用 3×C 的樣式處理。原案如下：

*我發現 73 比 82 少 9，91 比 82 多 9，73＋82＋91 可以變成(82－9)＋82＋(82＋9)，－9 和＋9 相互抵銷變成 0，和是 3 個 82。*【BT1c03】

*69 比 79 少 10，89 比 79 多 10，一個減 10，一個加 10，69 和 89 這 2 個數合起來等於 2 個 79，69＋79＋89＝79×3。*【BT4c10】

另有 3 名學生發現可利用 d 策略的樣式計算數字總和，此種思考是以「位置轉換策略」做為基礎，特別是數列數字接近 10 時，以鄰近位置之 10 的數字作為基礎，然後再將數列數字與其公差加總起來，獲得數字總和。

*97、98、99 都接近 100，我把他們想成都是 100，97 與 100 相差 3，98 與 100 相差 2，99 與 100 相差 1，97＋98＋99 可想成是 3 個 100 然後減 3、減 2 再減掉 1。*【BT3d03，BT3d18，BT3d19】

*69 比 70 少 1，79 比 80 少 1，89 比 90 少 1，69、79、89 總和等於(70－1)＋(80－1)＋(90－1)，等於 70＋80＋90－3。*【BT4c03，BT4c18，BT4c19】

由於研究要求學生不能使用連加的方式計算數字總和，因此迫使學生放棄舊有經驗，嘗試新的策略解題。學生透過觀察數列空間位置的特質與數值之間的關係，找出合適之數字當成基準物件，發現數字之間的公差具有倍數關係或可相互抵銷運算，可簡化加法繁瑣的流程，正確解題。從學生作業表現顯示，要進一步歸納出有效樣式進行解題，除理解數列的關係(循環策略)，仍須將決定有效樣式相關重要的元素抽離出來(例如公差具倍數關係、可相互抵銷)，並加以應用。Lee (199)認為學生對於發現樣式並非沒有能力，但阻礙他們成功解題的原因，在於沒有發現代數有用的樣式此能力。本研究發現部分學生針對提供的作業，無法將數字的公差視為樣式重要的元素，視為數列結構中一項重要因子，因此無法利用他歸結出有效的樣式進而解題。但不少學生可深化循環的策略成轉換策略，簡化問題結構(例如利用 3×C)，更易解決數字樣式問題。

## 三、樣式一般化解題之策略分析

學生採用樣式規則解題的策略與各試題分佈之人次如表 5、6 所示。

表 5：學生一般化解題使用之策略

| 解題所用策略 | 說　　　明 |
|---|---|
| a.A±D | 將數列中已知數字 A，加減數字的公差 D，做為探索未知數的依據(例如數列 35,36,X, X＝36＋1) |
| b.A±D/2 | 以數列中已知數字 A，加減數列上下或前後兩個數字之公差 D，再除 2，即可得到中間的未知數(例如數列 35,X,49, X＝(49-35)/2＋35) |
| c.S÷N | S(總和)÷N(數字個數)即可得到數列中間的未知數 |

表 6：學生一般化解題各試題採用策略之人數統計

| 試題 / 策略類型 | 運用人次 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 試題 1 | 試題 2 | 試題 3 | 試題 4 | 試題 5 | 試題 6 | 試題 7 |
| a.A±D | 32(97.0%) | 0 | 0 | 30(90.9%) | 31(93.9%) | 26(78.8%) | 24(72.7%) |
| b.A±D/2 | 0 | 10(30.3%) | 8(24.2%) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| c.S÷N | 0 | 18(54.5%) | 18(54.5%) | 0 | 0 | 0 | 0 |

總結上述資料得知，學生運用的一般化解題策略，會隨著未知數在數列的位置不同而有所差異。未知數若在數列前後的位置，學生較易使用循環策略，以 A±D 的策略，利用已知數加減公差即可解題。例如：

*和是 270，中間的數是 90，97 比 90 多 7，這個空格比 90 少 7，是 83，加 7 與減 7 等於 0，3 個數等於 93×3＝270。*【CT5a01】

*73 比 67 多 6，空格的數是 79，79 比 73 多 6，這個多的與這個少的合起來可以抵銷，73×3 等於 219。*【CT7a11】

*這是由左上向右下斜的數列，空格是 82－11＝71，82 的上面是 72，空格在 72 的左邊，也就是 71。*【CT4a03】

*73＋6＝79 是空格的答案，67 的旁邊是 66，66 和 73 相差 7，空格的答案是 79，73 下面的數字是 80，73＋7 是 80，80 的左邊也就是 79。*【CT7a19】

由資料亦知，數列的排列方式會影響學生解題的正確性，如試題 6、7 為斜式數列，學生會利用循環策略進行運算，但在計算過程則產生錯誤。另外未知數處於中間位置的數列，參與的學生，有些會利用 A±D/2 的策略解題，他們發現數字之間「等差」與「單位關係」，前後兩數字與中間數字的公差相同，且前後數字公差加總可以相互抵銷的特質，將他們的差數除以 2(策略 b)，獲得 3 個數字間的公差關係，而得到中間數字的值。例如：

*61 和 75 相差 14，這是以 7 為單位的 3 連子，這個數是 68，因為 61 的下面就是 68，68 的下面就是 75。*【CT3b28】

*75 和 61 相差 14，每個數都相差 7，14÷2＝7，這邊的數會比中間多 7，這邊會比他少 7，兩個加起來等於 0，中間的數字是 68。*【CT3b03】

另外資料也顯示一些學生(18 位)已瞭解連續數字的數列，可藉由 C×3＝總和的規則解題，因此可利用 C×3＝總和，逆算求得中間數字 C 的值。例如

*這 3 個數的和是 231，把他除以 3，就是中間的數，67 比 77 少 10，87 比 77 多 10，加起來是 77×3＝231。*【CT2c18】
*連續數字可用中間的數乘以有幾個就是答案，中間的數就用全部除以個數就可以得到。*【CT3b19】

上述結果顯示，對於應用樣式規則進行數列未知數解題，最基本的能力需能發現並將數列有關的結構因素予以連結，例如構成數列的循環單位、數字間的公差等特徵，將能順利解題；但若能進一步推想樣式規則之間的轉化，例如洞察出連續數字(奇數)的數列，中間的數字可由 C×3＝總和逆算得出，對於將樣式規則擴展臆測至其他樣式，學習數學一般化將更容易。

## 四、一般化擴展與臆測之策略分析

關於學生是否能將前述作業發現的一般化策略，擴展與臆測到其他情境，其表現從兩個部分加以說明。

### (一)一般化策略擴展表現

關於學生如何運用先前習得的策略擴展應用到 5 連子數列總和，所用之策略與運用人次如表 7、8 所示：

表 7：學生一般化擴展採用之策略

| 所用策略 | 說　　明 |
|---|---|
| a.N×5 策略 | 將公差相互抵銷，以中間數字乘以 5 表示數列結果 |
| b. A±D 策略 | 以數列前後數字為基礎，加上其公差得出結果 |
| c.轉換策略 | 將數列分成 2 個 3 連續數列，分別加上數列中之公差得出結果 |

表 8：學生一般化擴展各試題採用策略之人數統計

| 試題 / 策略類型 | 運用人次 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1(橫式數列) | 2(直式數列) | 3(直式交叉) | 4(橫式交叉) |
| a. C×5 策略 | 18(54.5%) | 20(60.6%) | 20(60.6%) | 16(48.5%) |
| b. A±D 策略 | 26(78.8%) | 26(78.8%) | 12(36.4%) | 10(30.3%) |
| c.轉換策略 | 0 | 0 | 12(36.4%) | 11(33.3%) |

從上述資料得知，大多數學生經由前項一般化作業的練習與關係檢驗，至此問題時，會利用先前嘗試與比對的策略包含循環策略、轉換策略及「C×5」策略，擴展到 5 連子的解題。例如：

*這 5 個數跟前面 3 個連續數一樣，能找到一個中間的數，33 和 53 兩數與 43 都相差 10，加起來後可以抵銷，42、44 與 43 相差 1，加起來後也可以抵銷，和等於 5 個 43，只要 43×5 就可以得到答案。*【DT3c11】

*38 比 49 少 11，而 60 比 49 多 11，一個多一個少等於 0，而 40 比 49 少 9，58 又比 49 多 9，抵銷變成 0，只要將 49×5 就可以算出來了。*【DT4c14】

另發現數列設計的形式會影響學生解題運用的策略與正確性，雖然循環和 C×5 策略是學生較常使用的策略，然而面對 5 連子交叉數列，由於此種數列設計是兩種具不一樣的公差數列構成，學生需先觀察然後予以分離運算，不能將其視為皆具公差的結構，否則容易造成錯誤。許多學生僅觀察單一數列變化的現象，未和另一數列比對，誤認兩數列具同樣結構，雖獲得正確答案，但一般化的概念錯誤，這有如 Rowland 等

人描述的窄化視野的效果，亦即學生常將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。例如：

*40、49、58 相差 9，都相差 9，用 49×5 就可算出答案。*【DT4b31】

*33 比 43 少 10，53 比 43 多 10，每個數都比 43 多 10 或少 10，一個多一個少等於 0，這裡可用 43×3 算出答案，這裡也可用 43×3 算出答案。(研究者質疑，交叉的數列每個數字都與中間數差 10）？不對！直的差 10，橫的不是，橫的都差 1。*【DT3b14】

一些學生則發現 5 連子的數列是由兩個 3 連子數列交叉構成，雖然其公差不同，但可各自相互抵銷，所以可藉由兩個「C×3」的規則應用轉換策略，簡易快速的得出這些數字總和。

*38、49 與 60 和前面的 3 連子一樣，可以用 49×3，40、49 與 58 是另一個 3 連子，也可以用 49×3，全部就是 49×6，這兩個交叉，49 重複 2 次，應該再扣掉 49。*【DT4c03】

要求學生解釋「C×個數」的規則是否能應用到任何數列時，參與的學生有 28 位回覆此一般化的規則只能應用於奇數數目的連續數字數列上，因為奇數數目的數列才能看到中間的數字，公差才有「對稱」、互相抵銷的情形產生，偶數的數列則無法應用此規則。原案如下：

*奇數數目的數列，可以將中間的數以 A 表示，左邊的數目可用 A－1、A－2、A－3 表示，和 A 相差 1、2、3，而右邊的數用 A＋1、A＋2、A＋3 表示、和中間的 A 也相差 1、2、3，可以相互抵銷，可以運用這個規則算出答案。*【DT1a18】

*49 是中間的數，38 和 49 的差與 60 和 49 的差可以抵銷，40 和 58 可以抵銷，可用 49×5 的規則算出答案。*【DT4b03】

*左邊有 1 個數，右邊也應該有 1 個數，上面有 1 個，下面也要有 1 個，一定要對稱才能將他們和中間數的差相互抵銷，也才能用「數字×C」的規則算答案(試題 3)。*
【ET3b19】

**(二) 一般化策略臆測表現**

進一步提供臆測之圖形讓學生檢驗是否能正確的運用「C×5」的規則，其結果如表 9 所示：

表 9：學生應用「C×5」的規則之臆測表現(受試樣本 33 人)

| 作業 | 作業 5.1 | | | | | 作業 5.2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 試題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 正確人數 | 23 | 30 | 29 | 29 | 29 | 29 | 31 | 21 | 24 | 24 |
| 比例(%) | 69.7 | 90.1 | 87.9 | 87.9 | 87.9 | 87.9 | 93.9 | 63.6 | 72.7 | 72.7 |

從表 9 可知，除作業 5.1 之(1)題，與 5.2 之(3)、(4)、(5)等 4 題有較多學生產出錯誤外，其餘試題學生大多能正確臆測與說明。關於錯誤產出的原因，學生大多以圖形空間的視覺效果作為判斷基準，認為圖形具有對稱(尤以線對稱圖形)特徵即可應用「C×5」的規則解題，無視這些對稱的空格是否具有等差可以互補的另一特徵；另外產出錯誤原因在於仍想以算術運算方式，將圖形內之空格填入相關數字進行檢驗，只是無法建構出合適之數列關係，因此透過猜想認定這些圖形可應用樣式規則解題。錯誤的原案說明如下：

*5.1 作業的第(1)個圖形可用中間數×5 的方法，這裡可當成中間的數，這裡有 2 格，這邊也有 2 格，可以抵銷。*【CT1d02】

*第(4)個圖形(作業 5.2)像一架新型的飛機，中間這個像機頭，兩邊是他的機翼，機翼一樣大小而且對稱，可以應用中間數×5 解題。*【CT4d16】
*第(3)(4)(5)的圖形(作業 5.2)都有一個中間的格子，兩邊的圖形都一樣，而且都是兩個格子，可以應用中間數×5 算出答案。*【CT345d17】

*中間這一個數字(作業 5.2 第(5)小題)訂為 35，左邊這兩格的數字就是 34 和 44，右邊這兩格就是 36 和 46，左邊和 35 分別少 1 和 10，右邊是多 1 和 10，可以互補，可以利用中間數×5 算出答案。*【CT5d15】

只以圖型「對稱」作為正確臆測的條件是不足的，對上述問題正確判斷的學生大多數仍會代入公差或藉由符號算式之說明，做為論證之用，而確定此圖形是否可應用 C×5 的規則解題。

*我把中間這個數當成 A 來看(作業 5.2 第(5)小題)，左邊這格是 A－1，右邊這格是 A＋1，這兩格可以互相抵銷，A 下面一格可想成是 A＋10，左邊是 A＋9，右邊是 A＋11，一個＋9，一個＋11，這兩格沒有辦法抵銷，這個圖形不能應用中間數字×5。*【Cd03】

*中間這格的數字(作業 5.2 第(3)小題)我把他想成是 54，他的上面一格是 44，比 54 少 10，44 的右邊就是 45，他和 54 相差 9，54 的左邊這一格是 53，比 54 少 1，53 下面這一格是 63，比 54 多 9，這個 9 和這個 9 可以抵銷，這裡少 10，這一格少 1，不能抵銷，不能用中間數字×5 的規則。*【Cd18】

*這(作業 5.2 第(3)小題)是斜的數列，用中間數×5 算出，這 2 個格子一個在上一個在左，他們和中間數的差沒有辦法抵銷，不能用中間數×5 的規則。*【Cd19】

*這個圖形(作業 5.2 第(4)小題)如果要用中間數×5 的規則，那麼要將下面的兩格移到中間空格的右邊，或將左邊這兩格移到上面來，圖形就會對稱，而且可以互補，因為中間數是 A 的時候，下面空格可以當成 A＋10 和 A＋20，上面的空格就是 A－10 和 A－20，就可以抵銷，變成 5×A。*【Cd03】

上述結果顯示，大部分學生可利用先前習得的「C×個數」的樣式規則，擴展該概念並對不同的數列進行臆測，經由驗證、說明而獲得數學概念。少部分學生受限於圖形視覺化和算術經驗的影響仍有所錯誤。研究者認為圖形可提供學生樣式規則視覺化搜尋比較的線索，但要正確解題，仍須有推理與歸納關係的能力協助，才能正確完成一般化的作業。如 Presmeg(1986)的宣稱：只有對圖像線索的知覺是不夠的，這些線索必需被用來當成分析推理的要素，學生呈現出知覺推理的傾向，只能當成在解題初始感知變項發展的一種可能的策略，或當成一種分析方法的補充而已，否則學生就容易掉入 Rowland 等人描述的窄化視野的效果，亦即將注意力置於某範例，而忽略其他可

以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。

## 伍、結論與建議

本研究旨在透過數字板設計的數列問題，探究學生建構數列關係時運用的策略，如何發現有效樣式？如何進行數列解題？以明瞭學生一般化擴展臆測至不同數列情境的表現，提供改善一般化課程與教學設計之參考。根據研究結果，總結如下：

### 一、學生依數列的特性，採取多種策略說明數字關係，以循環和空間關係策略最常運用

本研究設計之數列是以基礎數論的特徵做為重點，要求學生觀察數列的空間位置特性與數字之間的公差，正確的描述數列關係。研究發現學生能解釋數字之間的關係，且以觀察公差之「循環策略」與「空間關係」策略做為解釋的依據，而提供的特殊數列(斜式)可誘發學生擴展循環策略成轉換策略而解釋數字之間的關係。很明顯的，學生可透過數列的特徵，發現數列重要的變項線索及發展的規則，明確的說明數字在數列結構上的關係，這對於建構一般化能力而言是項重要的基礎，可協助研究者與教師探索學生如何洞察與理解樣式建構的要素，具體的說明數字關係，因此，未來有關代數推理課程與教學設計，可思考利用數字板的數列建構學生一般化學習的材料。

### 二、大多數學生能依數列結構變化採取多元策略，建構有效樣式進行解題

一般化歷程中一項重要的能力在於能明確辨識與說明不同樣式的共通性(Dreyfus, 1991; Kaput, 1999)，在數列裡，學生要能有效迅速的得出數字總和，較佳的方式就是發現各數字間的公差具有不變數的特徵，可以抽離成為進行加減或倍數的計數單位。研究結果得知學生在發現有效樣式的作業裡，會以數字間的公差做為思考策略，這些公差是不同數列具有的共通性，大部分學生能夠加以辨識和運用，並與原有數字結構

結合成一有效解題的樣式。分析學生有效解題的樣式，其組成的策略可分為「部分結構組合」的循環策略，與「整體結構組合」的轉換策略兩種模式，前者將基準量與公差分開思考，分別以基準量與公差的倍數計算數字整和；後者則推演出連續奇數的數列可以中間數字做為基準量，將各數字的共同差異量加以抵銷轉化後，以基準量的倍數進行計數。研究發現，快速解決數字和之有效樣式產出，知覺數列數字之公差呈現規則的變化外，仍需配合進一步的推理與歸納，將公差與數字結構加以組合，才能推演出有效的解題樣式。亦即知覺與辨識數列中各數字之間具有等差此不變數，仍需將他化約成解題有效的結構關係。

辨認樣式中的公差並將他化約組合成有效之關係結構，對學生而言並非簡單之事，教師可利用數字版的數列設計，鼓勵與誘發學生對產出的樣式關係加以連結，從不同的觀點激發學生進行一般化的推理。

## 三、學生對數列中的未知數會採用多元策略解題，並利用逆算法求解

研究發現學生在未知數求解問題上，大多能利用數字間公差之循環策略進行數列未知數的解題，並獲得正確答案。在解題過程中，學生發現各數字間的公差為一不變數，利用此不變數的特質對已知數字進行運算，並對其他數列進行策略的檢測、推論，以驗證答案的正確與否。另學生發現透過循環策的轉換可將數列中間數字訂為基準量，其前後數字與該基準量的差皆為 1 單位的公差，可以抵銷，而形成數字個數×中間數值的樣式規則，若要求數列中的未知數，利用此規則逆算後，再加減公差即可得到答案。

研究亦發現，學生對數列所建立的數字關係與有效樣式的結構組合，會影響其對數列中未知數的解題策略，例如運用循環策略組合樣式的學生，求未知數答案時亦多採取基準量加減公差的方式解題，而運用公差互補或位置轉換策略的學生，則容易傾向思考抵銷或位置轉換的方式解題。此現象與 Rivera(2010)的研究發現一致，即學生

於一般化初始階段對提供之樣式採取的辨識與知覺方式，會影響其一般化擴展與解題採取的策略。因此，在教導學生一般化的作業時，如何激發學生產出有效的樣式，以利後續一般化擴展和驗證的進行，實為一般化教學重要的關鍵。

## 四、學生會擴展建立的樣式規則至其他情境，並正確的進行臆測

從3連子連續數列轉變至5連子或不同排列形狀的樣式，是種自然的擴展，雖然樣式相似，但需包含更多的計數與代數思考策略才能成功。本研究發現：大部分學生皆能利用先前3連子作業習得的樣式規則：連續數字的數列，其總和可用數字個數×中間值之公式得出而進行擴展與臆測，並得到正確的結果。這些學生從先前範例概括建立的數學概念，透過思考論證而建立樣式規則，並採取推演的形式與合適的方法，表達一般化擴展和類推的過程，宛如Blanton和Kaput (2005)所描述的「代數推理」過程。由於本研究提供的數列，讓存在於數字與空間樣式裡的關係可運用文字、動作、圖形和符號呈現，因此，學生可創造與解釋樣式一般化，並運用這些關係作臆測，獲得對產出的樣式規則驗證的機會。然而數列特徵產出Rowland等人描述的窄化視野的效果，亦即將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色，亦有所存在，因此學生在數字樣式一般化活動的歷程，樣式要素的辨識與分析需同時結合，才能精進學生一般化解題策略的產出，並獲得正確答案。

本研究透過數字板數列的設計，發現學生採用多元策略進行數字關係的辨識，形成有效之樣式並進行解題，並能將發現的一般化規則擴展應用到不同數列的臆測。運用數列方式探索一般化有其優點存在，其採用的數字不僅能適用於國小階段整數的運算，還可以用於連續性的函數關係，且可擴展到更大的數值情境。在教室裡運用數字板的數列作業，對於提升學生解題與發展豐富的代數推理和數學概念的理解而言，是有價值的。探索學生這些作業策略的表現，可提供分析樣式一般化教學的要點，用來提升代數推理課程的設計與研發。針對研究發現：學生對於樣式規則擴展和臆測歷程

產生的樣式辨識錯誤、執著於數字運算而忽略其他有效解題樣式等問題，提出下列建議，以提供日後研究設計與教師教學改善的參考。

## 一、加強一般化活動樣式辨識與代數推理的連結，激發有效樣式的產出

一般化教學初始，教師可將重點放在視覺化策略，配合數字關係的辨識與數字計數的方法，與期待能觀察到數學方式(有效樣式)做結合，此種手段－目的方法之間的引導，可指引學生更多洞察的方法出現，利於一般化的擴展。

## 二、擴展一般化歷程數列形式與解題方法間的轉化，協助數學概念建立

由於注意與觀察樣式的行動是複雜的，開始時並非數學的，所以有的學生會採取方便實務的解題策略，誤認數學總是數字的操弄，忽略其他解題線索，形成所謂窄化視野的效果。如何發展對樣式視覺理解的能力，首先，可提供多元樣式的數列問題，鼓勵學生洞察樣式動態中固定變化的數值(不變數)，並探索這些數值可能帶來解題的效益；其次，比較相同的樣式所產出不同算式或解題策略相異之處，分析與說明何種一般化的策略較容易得到答案，並能擴展至更大的樣式上。

## 三、鼓勵學生利用符號思考與呈現數列結構關係，促進代數推理能力

雖然視覺化可提供學生樣式變化的線索，但如何促進思考呈現結構關係，而非以單一案例的線索或是圖形某一特徵(例如對稱)進行一般化的擴展和臆測，避免落入Rowland 等人所謂視野狹窄的效果現象，則可強化符號運用的功能，因為符號可對不變數的結構，以及數學物件之間的關係，提供構念、臆測與論證等系統性的手段，可彌補視覺化至符號化過程的縫隙。

# 參考文獻

李美蓮(2003)。**一位國二學生在等差數列解題表現之研究**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。未出版，嘉義市。

李佩玟(2004)。**國小六年級學童發現數列樣式的推理歷程之分析研究**。國立臺北教育大學教育心理與諮商學系碩士論文。未出版，台北市。

教育部(2003)。**國民教育九年一貫課程綱要：數學學習領域**。台北教育部。

陳嘉皇(2007)。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究：以三個個案為例，**國立嘉義大學國民教育學報，第19 期**，79-107。

陳嘉皇(2010)。六年級學生線性樣式問題一般化表現之研究。**高雄師大學報:自然與科技類，29**，63-85。

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Blanton, M., & Kaput, J.(2002). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper represented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,36*(5), 412 −446.

Campbell, S. R., & Zazkis, R. (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. Westport, CT: Ablex.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. W. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F, Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference* *for Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4), 1-19.

Graeber, A., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Pre-service teachers misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 95-102.

Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 105–128.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 276-295). New York: Macmillan.

Heargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London: Cassell.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In k. Stacey., H. Chick., & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 21-33). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalisation Activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for*

*Research and Teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lester, F. K., & Mau, S. M. (1993). Teaching mathematics via problem solving: A course for prospective elementary teachers. *For the learning of mathematics, 13*(2), 8-11.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & R. A. Lesh (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Movshovitz-Hadar, N., & Hadass, R. (1991). Preservice education of mathematics teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 265-287.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Olson, J. (1991). Function recognition and computerized graphing. *Physics Teachers, 29*(5), 293-295.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Resnick, M. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*, 297-328.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. In T. Rowland & C. Morgan(Eds.) *Research in mathematics education Vol 2: Papers of the British Society for Research into learning mathematics*(pp. 3-18).

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic* *character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Shipley, E. (1993). Categories, hierarchies, and induction. In D. Medin (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 265–301). San Diego, CA: Academic Press.

Tall, D. (1992). The Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns, or Proceptual Programming? *New Directions in Algebra Education*, 213–231. Brisbane: Queensland University of Technology.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

White, C. S., Alexander, P.A., & Daugherty, M. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems. In L.D. English (Ed.), *Mathematical cognition (special issue)-Mathematical reasoning: Nature, form, and development 4*(2), (pp. 103-123). Hove, East Sussex: Psychology Press.

Zazkis, R. (1998). Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics, 36*, (1), 73-89.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996a). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 207-218.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996b). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

附件 1：數字樣式一般化作業(如圖片檔)

# 一、數字關係辨識

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

1.54、55和56有何關係？請你說明 2.73、84和95有何關係？請你說明
3.79、88和97有何關係？請你說明 4.62、72和82有何關係？請你說明

# 二、發現樣式

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

1.請你找出總和和三個數字之間的關係？你發現什麼？請你說說看。

2.你發現的方法在百格板裡都可以應用嗎？試試看。

3爲何（不）可以應用？解釋你的理由。

# 二、發現樣式

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

1.粉紅色區塊數字總和多少？2.藍色區塊數字總和是多少？3.綠色區塊數字總和是多少？4.黃色區塊數字總和是多少？

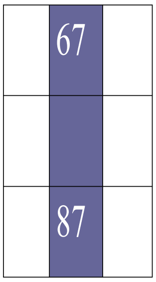
★說說看你用的方法？

## 三、樣式一般化解題

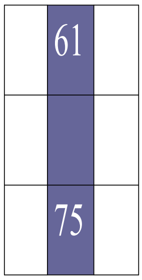
| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 93 | 94 | |
| | | |

1.紅色區塊的數字總和是282，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

## 三、樣式一般化解題

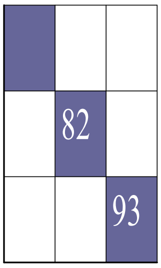



2.粉紅色區塊的數字總和是231，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

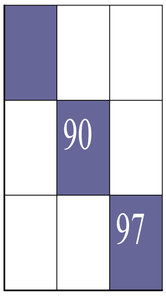



3.總和204

## 三、樣式一般化解題

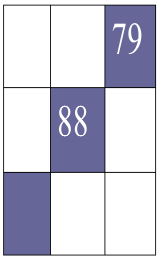



4.藍色區塊的數字總和是246，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

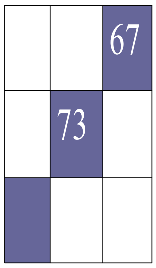



5.總和270

## 三、樣式一般化解題




6.棕色區塊的數字總和是264，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法



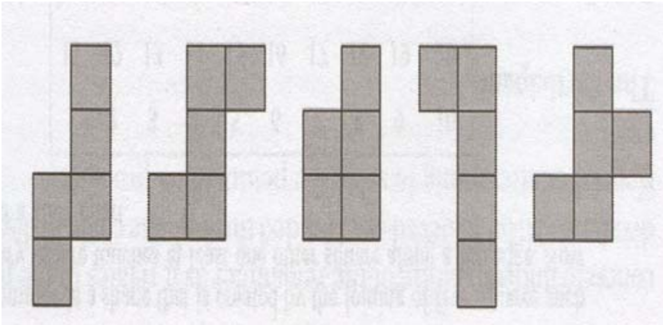

7.總和是219

## 四、擴展

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 78 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

（1）紅色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（2）綠色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（3）藍色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（4）紫色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（5）從上面的範例，發現什麼規律？這些規律要怎麼解釋？說說看？

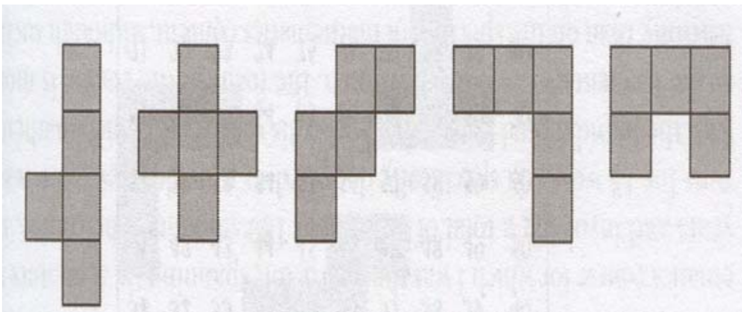
## 四、臆測



(1) (2) (3) (4) (5)

以上的區塊，哪一個數字的總和會等於中間的數字x5，並說說看你的解釋

## 四、臆測



(1) (2) (3) (4) (5)

以上的區塊，哪一個數字的總和會等於中間的數字x5，並說說看你的解釋