小雅於情境式應用問題之解題歷程

-以線型函數為例

李其錚

國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本研究是個案研究，個案小雅是高職一年級的學生，在校成績優異，但是對於文字敘述較複雜的應用問題卻是沒有信心。因此先以情境式之線型函數應用問題工作單為主要施測工具，並透過訪談來了解小雅的解題歷程，綜合討論則從「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」四階段作為解題歷程之分析架構。重要研究結果發現如下：(1) 小雅對於問題擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解不夠。(2) 在計畫擬定時，小雅對於所有的題目皆採用同一種解題策略。(3) 熟練解題中常需運用之計算程序，但對於較少擬定之策略所需之計算執行力欠佳。(4) 原先的解題記錄中看不出驗算或回顧之表現，但在訪談給予引導式的提問之下，逐能展現其驗算回顧的能力。

關鍵字: 應用問題；解題歷程；線型函數

通訊作者：李其錚 ccl1106@hotmail.com

壹、緒論

NCTM（2000）在數學教育原則與標準（Principles and Standard for School Mathematics）中提出，數學即解題、推理與證明、溝通、連結和表徵，可見數學解題在數學學習的重要性。國內的九年一貫課程綱要（教育部，2003）將「學習應用問題的解題方法」列為數學學習領域的四大教學總體目標之一，由課程綱要的內容可以看出，國內相當重視學習應用問題的數學教材來培養學生解題能力。然而研究者在教學實務上，發現學生在許多單元的學習，針對計算題皆能達精熟的程度，但面對應用問題，則容易產生解題的困難。學生的概念性知識薄弱，常無法正確的將文字題給定之條件轉換為數學式，雖然計算能力佳，程序性知識熟稔，卻常面對解題的失敗。Polya（1945）提出數學解題可細分成四個歷程，學生於解題過程中，必須先能理解文字內容，擬定解題策略，進而轉換文字為抽象數學符號，最後才是計算的執行，並驗證答案的合理性，每一步驟都影響解題是否順利，故學生在解題過程中之真實思維是教師在教學上應正視的問題。

依研究者的在高職數學的教學經驗中發現，與其他函數單元（如二次函數、三角函數）比較，學生在線型函數單元的測驗會有相對較高的答對率，然而即使孩子能夠正確解題，但也有可能只是機械式的操弄題目中給定之條件，也就是說學生答題正確，未必表示有正確的數學概念。而 99 年教育部公布的高職數學課綱中，已將函數單元整個刪除，卻在第一學期的第一個單元「直線方程式」之教材大綱中提到：「本單元宜複習線型函數與二次函數...」。雖然函數單元在高職已被刪除，但學生馬上會在第一冊第二章中面臨三角函數的挑戰，往後還有指數函數、對數函數、多項式函數等和函數相關且更進階之課程，故學生的函數基礎知識到達哪個階段，是否足夠做為往後其他函數單元學習之基礎皆是教師關心的重點。

基於上述研究動機，本研究將藉由「線型函數」課程為主題，探討個案學生於應用問題的解題表現，並深入訪談以了解其思維脈絡，從中探討：(1) 個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現。(2) 個案學生於引導式的提問後在備驗算回顧階段的思維改變。

貳、文獻探討

為探究學生於線型函數情境式應用問題的解題歷程，以下將分別介紹數學解題的歷程、線型函數應用問題的相關研究及線型函數的多重表徵：

一、 數學解題的歷程

Polya（1945）認為數學解題就是為了達到一個不能立即達到的數學目標，期間解題者沒有方法被告知，但卻要克服困難，繞過障礙而達成目標的方法。Polya 是最早系統化提出解題歷程的學者，在其著作「怎樣解題」（How to solve it）書中，強調教導學生啟發知識（Heuristic knowledge）與解題的重要性，他認為學生在尋求解答的過程中，不管想法還是看待問題之觀點會歷經幾個階段。解題之始，對問題的了解可能有限；當解題活動有些進展後，對問題產生不同的了解；到了快要知道答案時，對問題又有一番新的認識。書中提到數學解題可細分成四個歷程，分別說明如下：（一）了解問題（understanding the problem）：根據題目的提示，解題者必須了解題意、問題目標、已知條件以及題意中所有能運用的條件。（二）擬定計畫（devising a plan）：解題者根據題意，找出未知數與已知數之間的關係，從自我的舊經驗中搜尋相關性的問題或數學概念，建立獲得答案的想法，而後設計一個具有可能成功的計畫。（三）執行計畫（carrying out the plan）：解題者著手執行所擬定的計畫，將解題計畫付諸實現，並仔細檢查每一步驟。（四）驗算回顧（looking back）：解題者根據題意的條件，對答案再做一次的驗算或回顧答案之正確性與合理性。

Mayer（1992）從問題解決和認知心理學的觀點，將解題歷程分為兩個步驟，每個步驟又包含兩個子步驟，其分述如下：1.問題表徵（problem representation）：即將文字或圖案轉換成心理表徵，又包含二個子步驟。（1）問題轉譯（problem translation）和（2）問題整合（problem integration）。2.問題解決（problem solution）：即從問題的心理表徵進行到最後答案的過程，含二個步驟（1）解答的計畫與監控（Solution planning and monitoring）和（2）解答的實施（solution execution）。Mayer 同時指出，在解題歷程中，每個步驟所需的知識並不相同：問題表徵時，轉譯的過程需涉及語言和語意知識；而再

整合的過程，則有賴於基模知識的運用；問題解決時，解題計畫與監控和策略知識有關。而解題的實施，則和程序性知識有關。

綜合上述學者的觀點，雖然每位學者對解題歷程各有不同的觀點，但其實在解決問題的路徑上是一致的。在面對問題時，皆是閱讀、了解問題與察覺問題，再去分析和整合問題，並與自己的先備經驗做連結，擬定解題的計畫，形成解決問題的策略；最後進行計畫的執行，在計畫執行期間，發揮監控的能力，評估解答的合理性。然而 Mayer 將「解題計畫」與「監控」併列成同一解題歷程，且「解題計畫」與「問題整合」兩階段任務之間的界線又難以區分。因此，本研究將以階段區分最簡要明確的 Polya 解題歷程四階段「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算與回顧」作為主要分析架構。

二、 線型函數應用問題的相關研究

數學應用問題是以日常生活事件為材料，且用語文型態來描述數學問題，因而比一般數學題目涉及更複雜的認知歷程，學生在解題時首先需整理題意，把「語文理解」轉換成「形式數學」，也就是按題意列式，然後再進行運算過程，而困難處即在按照題意列式（張新仁，1989）。Kintsch & Greeno（1985）也提出應用問題的解題常需要結合兩種能力：一是理解能力，二是計算能力。學生根據應用問題的狀況，將文字表達的條件改用數學符號表示，是普通語言到數學算式的一種轉譯，因此學生必須徹底瞭解題目給與的條件與熟悉數學表達的形式（Polya，1945）。上述研究皆顯示學生在解應用問題時，不僅要能利用程序性知識解題，更要能掌握題目中的文字或情境所代表的意思。

國中函數課程也從應用問題著手（國立編譯館主編，2010），藉由建立情境問題以幫助學生理解函數的意義。教育部（2003）提出九年一貫課程綱要之分年細目 7-a-13 其中說明之例題：自強號火車的行駛速率為每小時 120 公里，假設其依固定速率行駛，下表為行駛時間與行駛距離的數據記錄：（如表一）

表一：自強號火車的行駛時間和距離對應表

行駛時間（小時）	行駛距離（公里）
1	120
2	240
3	360

學生需要從上表中，觀察出火車在固定速率時，位移 y 與時間 x 的成比例關係，並將此種比例關係，以函數式 y=120x 來表示。

NCTM（2000）除了強調應該將函數課程納入數學教學計劃中外，更對六到八年級提出要將線型函數列為重要的研究課題。在「學校數學的原則與標準」中就認為中學生要能夠透過應用問題，去探究線型函數符號表徵與函數圖形的關係，且在其教學目標有提到「學生要能理解線型函數的表列、圖表之關係」、「學生應利用模型解決問題，類似能利用表列和圖形來顯現它們的函數和型態」，且認為教師「應鼓舞學生利用表列和圖形進行推論和解決概念性問題」。

綜上所述，學生於線型函數的學習，除了熟習函數關係式的計算、自變數和應變數間的轉換和代入特定值等程序性知識外，更應重視線型函數應用問題之解題。試著建立應用問題的情境來幫助學生理解函數的意義，甚而提升學生對線型函數的認知，因此學生處理應用問題的解題思維是值得探討的。

三、 函數概念的多重表徵

函數概念並非單一的形式，可由多種不同樣貌呈現，此即函數的多重表徵（multiple representation）。許多學者針對函數概念之表徵，都曾作過詳細的探討與研究，例如 Herscovics（1979）提到同一函數概念可由三種型式表徵，分別為數值表列（numerical table）、圖形（graph）和方程式（equation）。Janvier（1987）另外加入了文字敘述（verbal description）作為第四種表徵。Even（1990）集多數學者為大成，將函數分為一般表徵和其他表徵，認為函數的一般表徵有：代數式、圖形；其它的表徵有集合映射圖（arrow diagram）、表列式、有序數對集合（sets of ordered pairs）以及來自日常生活和其它學科的情境。

Kaput（1989）年曾提到每種函數表徵皆有其特質。代數式表徵以數學式為主，呈現應變數之值來自於自變數之值的規則，是函數表徵中最常使用的形式；圖形式表徵將自變數與應變數之間的關係藉由直角平面座標呈現，並稱之為函數圖形，能呈現出整體的概念；表列式分別列出定義域與值域之各項數值，所顯示的資料在數值的變化上較明確；集合映射圖容易看出在定義域與值域之間各元素的映射關係；文字情境敘述以文字敘述函數概念，能呈現無法以其他表徵呈現之情境。

而在臺灣國高中現有線型函數的各版本教科書課程中，研究者發現在線型函數應用問題方面，題目設計大多以文字情境敘述為主，圖形式（即視覺或圖形）、表列式（即數值表列或表格）為輔。不同的表徵呈現雖能加深學生不同的函數概念，卻也限制了其他函數表徵的發展，故研究者希望能針對不同表徵之線型函數，設計情境式應用問題工作單，透過解題表現以及訪談所得之內容，來更深入了解學生在不同的情境問題表徵之下其解題能達至何種階段。

參、研究方法

本研究採個案研究法，研究架構以線型函數為主軸，設計情境式應用問題工作單，讓學生自由解題，並藉由訪談來深入瞭解學生在應用問題的解題歷程。研究中將 Polya（1945）所提出的解題歷程「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」四階段分成兩部分：先將重點放在個案能否了解情境式應用問題之題意、擬定適宜之解題策略並正確執行解題策略，分析學生的解題思考過程；而由於個案學生曾表示對於應用問題缺乏信心，不知道算出來的答案是否正確，故研究者將於訪談學生時，觀察其是否驗證答案之合理性，倘若受訪者預期性的行為沒有發生時，則給予引導式的建議（the guides use of heuristic suggestions），從中觀察個案學生於驗算回顧階段的思維變化。

一、研究對象

參與本研究的個案小雅（化名）喜好閱讀，擁有很好的表達能力，在校數學成績相

當優異，對於解工作單問題所需具備的程序性知識的建立頗為完備，例如熟練比例式的基本運算，能解二元一次聯立方程式，以及能在直角坐標平面上描繪線型函數的圖形。但研究者在觀察小雅平時考試中應用問題的解題後，曾發現再解題過程中，有概念性知識錯誤但是解答正確的情形，詢問原因後，小雅坦承很害怕遇到應用問題，有時解題只是把題目中的數字套進公式中，對於非例行性的問題缺乏信心，不知道算出來的答案是否正確。此外，研究者也發現到小雅個性活潑開朗，課堂上和研究者互動良好，敢勇於發問，透過訪談可以提供豐富的資料以作為解釋（interpretation）之用。因此透過此研究，研究者想了解小雅能否能將以上先備知識應用到解線型函數應用問題的解題計畫之中，並關注小雅是否具備驗證答案合理性之能力，希望能增強其解題信心。

二、研究者

為了瞭解小雅在解題時的自發性想法，於解題之前，研究者會要求學生以完整的代數式子或畫圖表徵呈現其想法或策略，若有需要可用文字輔助說明。在學生解題之後，研究者將扮演晤談者之角色，利用 Polya 的解題理論為訪談架構，分析個案在解題歷程各階段的表現。其中「執行計畫」階段多數屬學生程序性知識之計算，研究者主要參考學生的解題紀錄，訪談過程中僅就需要才提問學生想法。訪談重點將針對其他三個階段:「了解問題」、「擬定計畫」及「驗算回顧」，先對個案進行非引導式的詢問，基本結構和問句條列如下：

（一）詢問學生是否能掌握題目中各項資訊的含義，例如：你知道題目中的已知條件為何嗎?你知道題目中之所求目標為何嗎?你知道基本通話費代表什麼意義嗎?

（二）詢問學生如何完成解題目標，例如：你使用何種策略?為什麼你會使用此種方法?

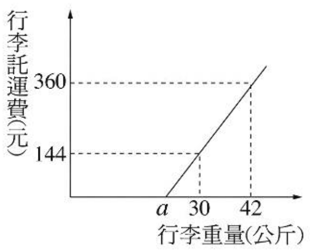
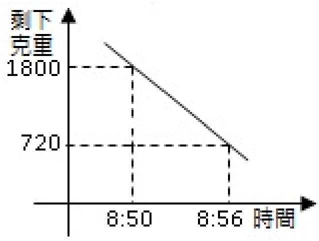
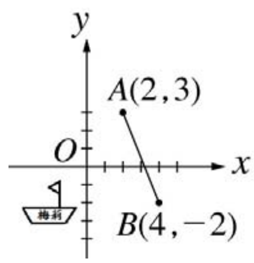
（三）詢問學生能否驗算回顧答案之合理性，例如：如何判斷你的答案是否正確?你覺得你算的答案合理嗎?而在此階段，如果受訪者預期性的行為沒有發生時，研究者將給予引導式的建議，盡量引導學生思考如何驗算或回顧答案，例如：你有發現表列數值的規律嗎?從圖形中可以觀察出什麼嗎?你能使用別種方法嗎?

三、工作單

為了深入探討小雅於情境式應用問題之解題歷程，研究者以「圖形表徵」與「數值表列」為基礎，參考國內外線型函數應用問題之相關文獻，分析國內各版本教科書及國中基本學力測驗歷屆試題、高職四技二專統測試題，編修出六題敘述情境各不相同之應用問題，並依照題目中表徵函數的方式，將工作單分為「表列式」和「圖形式」兩類；每類各三個題目。編製成「線型函數應用問題工作單」，如表二：

表二：*線型函數應用問題各題分析表*

<table>
<tr><th>題型</th><th>問題特質</th><th>題號、題目</th></tr>
<tr><td rowspan="3">表列式</td><td>常數函數</td><td>1. 已知某線型函數其對應關係如下表，求$\alpha+\beta=$？
[編修自 92 基測二 7]
<table>
<tr><td>x</td><td>…</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>…</td><td>4</td><td>α</td><td>4</td><td>β</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>離散點表徵的函數</td><td>2. 四邊形的內角度數和為 360 度，五邊形的內角度數和為 540 度，六邊形的內角度數和為 720 度，已知多邊形的邊數 x 與內角度數和 y 的關係，可用線型函數來表示，則試求二十二邊形的內角度數和為多少度？
<table>
<tr><td>X</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>180</td><td>360</td><td>540</td><td>720</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>分段函數</td><td>3. 右表為大華公司的通話費計算方式：300 秒以內(含)只繳基本費 a 元，超過 300 秒之後的費用，與通話時間成線型函數關係，則基本費是多少元？[編修自 93 基測二 26]
<table>
<tr><td>通話秒數</td><td>0</td><td>150</td><td>…</td><td>300</td><td>500</td><td>1200</td></tr>
<tr><td>費用(元)</td><td>a</td><td>a</td><td>…</td><td>a</td><td>36</td><td>50</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

圖形式	斜率為正值	4. 型男航空公司規定，旅客行李重量若在 a 公斤以下(包含 a 公斤)，則完全免費，但若超過 a 公斤，則超重部分與行李託運費成線型函數關係，其關係如右圖所示。試求行李重量在幾公斤以下不需託運費?	
	斜率為負值	5. 如圖為八克星咖啡館某天早晨研磨咖啡豆時剩下咖啡豆重量和時間的關係圖，已知咖啡豆剩餘重量和研磨時間呈線型函數圖形如右圖，推估八克星咖啡館最快幾點幾分能將咖啡豆研磨完畢？[編修自 93 基測一 16]	
	斜率為固定值	6. 已知梅莉海盜船之航線在平面座標圖上恰呈線型函數$y=f(x)=\frac{1}{2}x+b$，某日梅利號航經某海域，得知海軍在A(2，3)、B(4，－2)兩地之間佈下水雷網，若航海士要帶領這群海盜順利避開水雷網(航線不能與AB線段相交)，則b的範圍為何？	

註：Markovits, Eylon & Bruckheimer（1986）在九年級已修過函數相關課程的學生的研究中，發現學生對於下列三種函數最感困惑：常數函數、分段函數（piecewise function）和以離散點表徵的函數，故研究者依此作為「表列式」表徵的設計依據。

四、資料蒐集與分析

本研究的資料來源，主要是小雅填寫在工作單上的解題記錄（包含文字敘述、畫圖表徵、數學算式…等等），以及研究者初步分析工作單之解題記錄後，深入訪談學生的錄影及錄音資料，轉譯過程適當的刪除與主題無關的對話，形成解題歷程的原始資料。原始資料完成後，以 Polya 解題歷程四階段為主要分析架構，將「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」做為主要編碼（coding）類別。

分析面向可分為了解問題：探討能否根據題意說出已知條件、解題目標以及題意中所有能運用的資訊。擬定計畫：解題者根據題意，找出未知數與已知數之間的關係，連結舊經驗或數學概念以建立獲得答案的想法，而後設計一個具有可能成功的計畫。

執行計畫：檢視解題者能否將解題計畫付諸實現。驗算回顧：包含個案能否對答案驗算、對過程的驗算、用別的方法推導出相同的結果、一眼看出答案、或是在別的問題上，應用這個結果與方法。

為求資料分析的客觀，提高研究的信度，將採用重覆情節（episode）的方式（甯自強，1998）。例如以情境與數據不同，但表徵結構類似的問題，檢核訪談時小雅對相同概念的一致性，並對照前後解題之策略是否相似。在效度上則採用三角校正法（triangulate），在訪談對話資料的編碼過程中，與研究同儕、指導教授共同討論、修正，做為人員的三角校正；分析不同的資料來源，檢視是否一致，避免資料詮釋流於偏見，以做為資料的三角校正。例如小雅在第四題運費託運題中，經由研究者引導式的提問之後，能用比例的概念推算答案的正確性，而在第五題研磨咖啡題中，亦能利用比例推理驗算出正確之答案，重覆的行為證實小雅卻已能在引導式的詢問之後，發展出驗算回顧的能力。

肆、結果與討論

本研究以情境式之線型函數應用問題為主要施測工具，藉由工作單之解題紀錄，以了解小雅在線型函數應用問題的解題表現，接著透過深入訪談來理解小雅在解題時的真實思維。而由於小雅在原始解題記錄中皆未呈現出驗算回顧之階段，故研究者將以引導式提問來深入了解小雅之解題到達何種歷程。本章將逐題分析小雅在訪談時所呈現的真實思維脈絡，再討論在引導式的提問之下，其解題思維之變化。為了節省篇幅，茲建表三以整理在引導式提問前，小雅於每一個歷程的表現。

表三：提問前，小雅六題的解題歷程

（表徵）題號	了解問題	擬定計畫	執行計畫	驗算回顧
（表列）1	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	解題中未見，但經訪談證實有連結舊經驗以回顧答案之合理性。
（表列）2	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	重新驗算解題過程
（表列）3	不夠確實	a. 轉換圖形式表徵 b. 聯立方程式	轉換圖形式表徵時遺漏部分圖形	解題中未見
（圖形）4	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	解題中未見
（圖形）5	完整呈現	a. 時間轉換成個位數 b. 聯立方程式	時間轉換時誤用基準點	解題中未見
（圖形）6	不夠確實	代入特定值	執行正確	解題中未見

表列式：題號1

小雅利用設立二元一次聯立方程式的方式出線型函數，先假設線型函數為f(x)＝ax＋b後，代入（1,4）和（3,4）後找出a＝0，b＝4，故f(x)＝4，而題目所求$\alpha+\beta=$ f(2)＋f(4)＝4＋4＝8（圖1）；訪談時，在小雅正確解釋題意和解題目標後，研究者判斷小雅已具備**了解問題**、**擬定計畫**、**執行計畫**三階段，而轉向詢問小雅能否證明此題結果是否正

確。而小雅表示：「這題我一算完就發現白算了，因為α和β一看就知道是4」。研究者進而詢問小雅「你怎麼能一看就知道是4，能不能說明給老師聽?」小雅：「因為這題所有的f(x)都等於4，畫出來是水平線」。

從訪談過程中，研究者發現小雅利用聯立方程式解完函數式後，即看出應變數皆相同，連結舊經驗後，想起常數函數在直角座標上的圖形為水平線，而判斷此題答案正確，故研究者認定小雅在此題已具備**驗算回顧**之解題歷程。此外，由於發現小雅在第 3 題之分段函數應用問題中，將表列式表徵轉換成直角座標圖時產生部分疏漏，故引導小雅練習將數值表列轉換成圖形之概念（如圖 2），以作為訪談第 3 題驗算回顧時之依據。

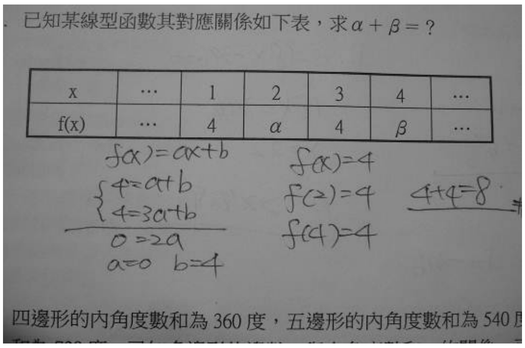


圖 1 第 1 題之原始解題記錄

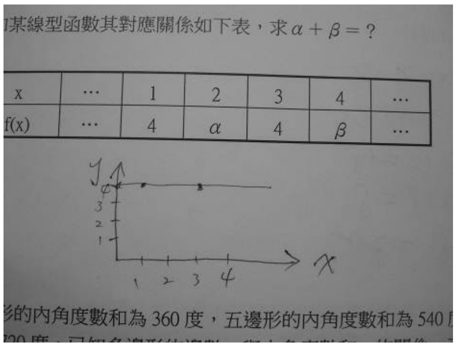


圖 2 第 1 題之訪談解題記錄

表列式：題號2

小雅仍以設立聯立方程式求出線型函數：f(x)＝180x－360，再將自變數22代入線型函數，得到f(22)＝180×22－360＝3600（如圖3）；研究者嘗試測驗小雅一些非例行性之問題，例如：「如果x=2的話，你會得到內角度數和為幾度?」小雅皆能正確回答出：「最少需要三邊才能畫出多邊形。」故根據解題記錄和訪談內容，判斷小雅已具備**了解問題**、**擬定計畫**、**執行計畫**的能力。而當詢問能否證明此題結果是否正確時，小雅隨即重新將解題過程檢驗一次，表示：「驗算完了，應該沒錯」。而雖然Polya認為重新驗算亦屬於驗算回顧之表現，但基於希望小雅能從多方向角度去思考應用問題的原因，故進而詢問小雅：「你能不能用別種方法算算看呢?」小雅沉思後表示：「沒辦法了」。至此，研究者確認小雅無法使用不同之解題策略，開始以引導式方法詢問小雅：

0211T:你能否仔細觀察這個表格，告訴老師這裡有沒有什麼規律?

0212S:（仔細觀察後，手比表格）度數和每一格都增加 180 度。

0213T: 那所以 7 邊形、8 邊形、9 邊形的內角度數和是多少?

0214S:（開始由 720 度往上加）是 900...1080...

0215T: 那 22 邊形?

0216S:（開始列出算式，如圖 4）：恩，答案一樣。

0217T: 你能否告訴老師，為何你每題都採用解二元一次聯立方程式的做法?

0218S: 因為題目中有提到線型函數阿，老師說線型函數就是要設 f(x)＝ax+b 阿。

0219T: 那你有考慮過邊長數和內角度數和的關係嗎?

0220S: 沒有，我看到題目就直接算了。

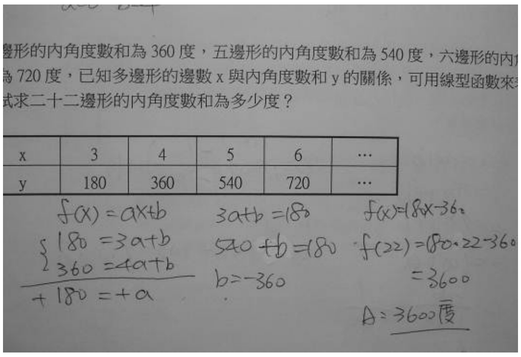


圖 3 第 2 題之原始解題記錄

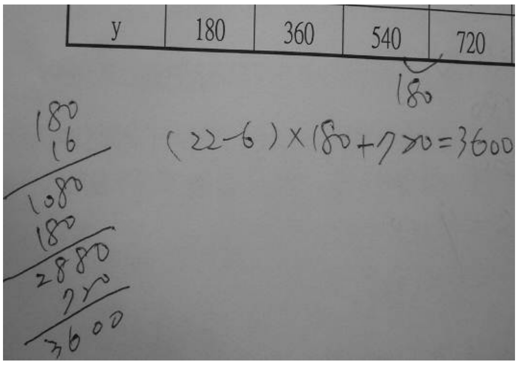
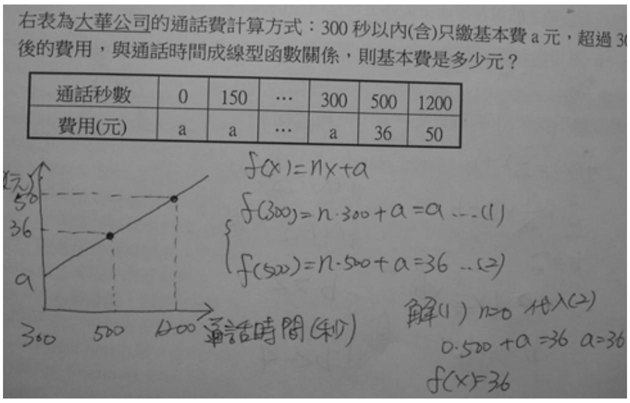


圖 4 第 2 題之訪談解題記錄

從解題記錄和訪談過程中，研究者發現小雅無論是表列式表徵或圖形式表徵之題目，皆慣用二元一次聯立方程式求解函數式的策略，研究者詢問後的結果是因為小雅認為遇到線型函數就是要利用聯立方程式解函數式（行號：0218S），推究其原因可能和學校多利用程序性知識去解題，導致小雅忽略了在此題情境中，邊長及內角度數和有「內角和＝(邊長－2) ×180」之關係。而在研究者的引導提問之下，小雅始能利用不同之解題策略（比例推理）來驗證其答案，而達到**驗算回顧**之階段。

表列式：題號 3

小雅在工作單第三題，先將表列式表徵轉換成直角座標圖形，並描繪出表格中超過基本費的三個座標（如圖 5），接者假設函數式為 f(x)＝nx+ a，代入（300 , a）和（500, 36）解函數式，經過計算後解出 n＝0，a＝36；計算過程到最後寫出 f(x)＝36 即停止作答，因解題紀錄不完整，難以推測後半段解題思維為何，將透過訪談以了解小雅之真實想法。



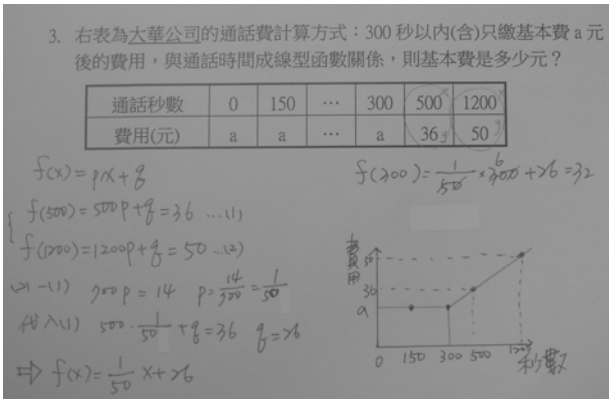


圖 5 第 3 題之原始解題記錄　　　　圖 6 第 3 題之訪談解題記錄

0301S：基本費在 300 秒以下都是 a 元，所以打 0 元也要付基本費，打 150 元也要付基本費，然後超過 300 後的費用會和通話時間成比例關係。

0302T：那你畫的圖所代表的意思是...?

0303S：就是題目中超過 300 秒之後的費用，300 秒的費用是 a 元，500 秒要付 36 元，然後 1200 秒要付 50 元。

0304T：那 300 秒以下的你為什麼不畫?

0305S：因為求函數用不到，所以可以不用畫...

…

0310T：你告訴我你覺得錯在哪裡？

0311S：就是算出來後 f(x)＝36，這樣好像是水平線才對...

0312T：你這函數式怎麼和前幾題設的不太一樣?（比著 f (x)=nx+a）

0313S：因為圖形的截距是 a 阿，所以我假設 f (x)=nx+a。

0314T：截距指的是什麼?

0315S：截距指的是圖形和 y 軸的座標...

0316T：那你的 a 是和 y 軸的座標嗎，你可以比對看看你在第一題時是如何畫圖的嗎?

0317S：我畫錯了，a 應該是在 300 的座標才對...

0318T：那你覺得應該要怎麼改?

0319S：(沉思)設函數式不要設 a 就好了，可以設 f (x)=px+q。

訪談之始，研究者先讓小雅重新嘗試解釋題意，過程中可以發現小雅能理解題目中「基本費率」所代表之涵義（行號 0301S-0303S），此為**了解問題**的展現。但當小雅將表列式表徵轉換為圖形式表徵的過程中，卻認為基本費以下的數值不屬於解題目標的一部分，故自行省略了 300 元之下的欄位，導致在設定函數式 f(x)時產生錯誤（行號 0313S），但在透過訪談後，藉由引導式提問，小雅漸漸發現當表列式表徵轉換成圖形式表徵時產生的錯誤（行號 0314T-0317S），因為少畫了 300 元之下的座標，導致誤判 a 值（即基本費）為該圖之截距。研究者認為小雅雖掌握題目之中心思想，但卻未能觀察數值表列之全貌，故認定小雅在**了解問題**階段不夠完備。而也由於將表列式表徵轉換圖形式表徵時造成的疏漏，因而誤設函數式為 f(x)＝nx＋a，導致小雅即使在**擬訂計畫**上和前兩題如出一恻，卻無法正確**執行計畫**。而在小雅修正函數式為 f(x)＝px＋q 後，研究者請小雅重新作圖和計算，即可正確**執行計畫**（如圖 6）。

圖形式：題號4

小雅於第四題依然使用設立聯立方程式解函數式的作法（如圖7），正確求出函數式並找到特定值，並於訪談中清楚闡述「不需託運費代表託運費為0元，題目要求的就是當託運費為0元時行李的重量為幾公斤。」故研究者根據小雅之解題表記錄和訪談後分析後認為小雅已具備**了解問題**、**擬定計畫**、**執行計畫**三階段，而轉向詢問小雅能否證明此題結果是否正確。

…

0405T：那你能說說看要怎麼證明你的答案是對的呢?

0406S：(沉思) 將 22 寫至圖形中 a 之位置。

0407T：(引導式提問)能否僅利用圖形中的資訊來推算呢?

0408S：(思考後，開始作圖和計算如圖 8)沒錯，22 公斤是對的。

0409T：能否說明你在算什麼呢?

0410S： 22 到 30 每增加 8 公斤就會多 144 元，比例剛好等於每 20 公斤增加 360 元。

0411T：你怎麼知道他的比值剛好相等?

0412S：因為交叉相乘後是相等的…

有鑑於小雅每題皆使用相同之解題策略（二元一次聯立方程式解函數式），研究者盡量引導小雅利用更多元的策略來驗算答案的正確性，而小雅在研究者的引導式提問之下，先試著將22填至圖形中 a 的位置，小雅思考後喚起先前的舊經驗，利用相似三角形邊長成比例的概念，先寫下兩個三角形底和高之比值，並利用比例式交叉乘積相等來驗證該比率是正確的（行號0407T-0412S），進而**驗算回顧**原本答案是正確的。而研究者也將測試小雅在下題中是否能利用比例推理之策略來驗算答案，所得結果是正向的。

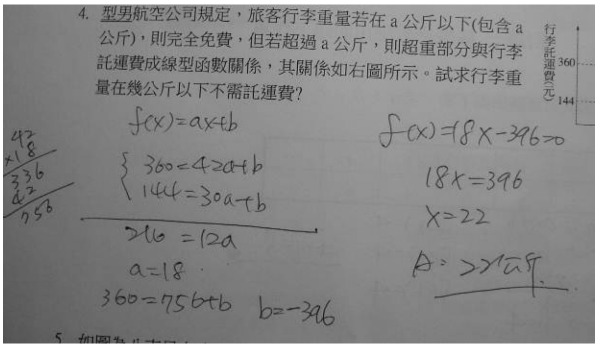


圖 7 第 4 題之原始解題記錄

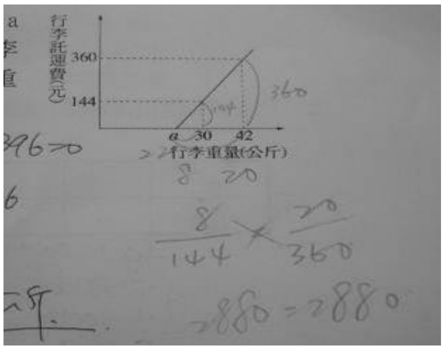


圖 8 第 4 題之訪談解題記錄

圖形式：題號5

小雅首先假設函數式 y＝ax＋b，利用二元一次聯立方程式解函數式的作法，代入(0，1800）和（6, 720）兩點而算出函數式。函數式為 0 時，x＝10；最後利用 8:56＋10＝9:06 的式子得到咖啡豆會在九點零六分研磨完畢（如圖 9）。小雅此題已成功擬定解題計畫並推算出答案，但卻在最後一步功虧一簣，茲將透過訪談以探究小雅在此題之解題歷程。

0501T：小雅，能否說說看這題題目在問什麼?

0502S：就是咖啡豆一開始在 8 點 50 分的時候剩下 1800 克，到了 8 點 56 分的時候剩下 720 克，題目是要問幾點幾分的時候可以把咖啡豆磨完。

…

0505T：那你能說說看這裡為什麼要代入 0 和 6 呢?

0506S：(沉思) 我想會比較好算吧，因為一看到題目就想用 0 和 6 代替 8:50 和 8:56...

0507T：那再來，你為什麼會令函數式等於零去計算 x 的值呢?

0508S：因為咖啡磨完的話，等於咖啡會剩下 0 克重…

0509T：所以你算出來 x＝10 後，代表什麼意思?

0510S：代表時間還會經過 10 分鐘。

0511T：從哪裡經過 10 分鐘?

0512S：從 8 點 56 分。

0513T：所以你認為加上十分鐘後咖啡會在 9:06 分磨完，沒錯吧?

0514S：應該沒錯吧。

0515T：好的，那你可以證明給我看看你的答案是正確的嗎?

0516S：(開始計算，解題記錄如圖 10，計算出答案為 9：00)

0517T：喔，答案不一樣呢，哪個是對的?

0518S：是九點，因為從 720 克重變成 0 克只需經過 4 分鐘，因為本來我設定 50 分為 0，56 分為 6，所以如果算出來是 10 的話，答案應該是用 50 分去加才對...

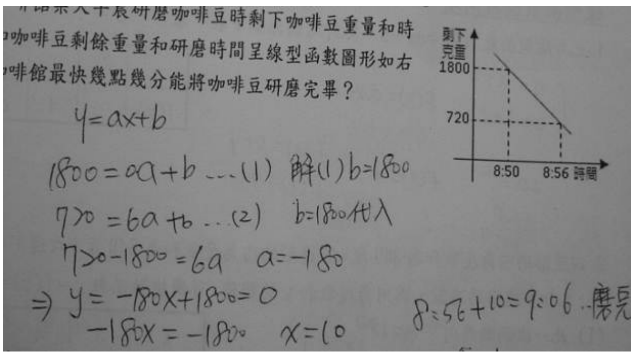


圖 9 第 5 題之原始解題記錄

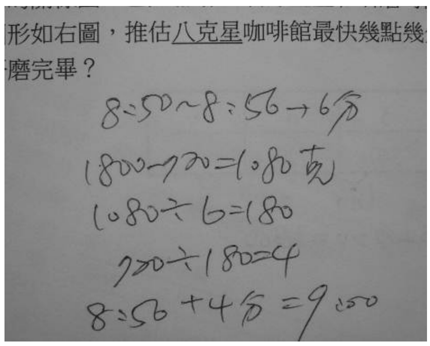


圖 10 第 5 題之訪談解題記錄

訪談時，研究者請小雅說明本題的解題目標，小雅基本上可以理解題目中的已知條件（咖啡豆在 8：50 為 1800 克、8：56 為 720 克）和解題目標（幾點幾分研磨完畢），也了解到當咖啡豆研磨完畢時，其重量會剩下 0 克重之意義（行號 0504S、0508S），皆為小雅在**了解問題**上的展現。而在**擬定計畫**階段將不再贅述小雅慣用之「聯立方程式解函數式」策略，特別的是小雅已經可以適當的運用「切換基準點」的策略，將時間軸上 8:50 當成基準點，轉換設定成 0 分，將 8:56 轉換成 6 分，以增進運算的速度。可惜的是小雅在後來計算出答案是 10 分鐘的時候，卻把 8:56 設定成基準點，導致無法順利地將時間轉換回正確時間 9:00，證明小雅在**擬定計畫**的階段，當擬定出非例行性之解題策略時，在**計畫執行**上仍不夠完備，例如在時間轉換的過程中仍有找錯基準點的問題(行號 0509T -0514S)。此外在**驗算回顧**階段，小雅已能根據題 4 於訪談時，研究者所引導之比例推理的策略，發現兩者之解題結果相異之處，更回頭發現時間和數字之間轉換上有誤用基準點的錯誤。(行號 0516S -0518S)。

圖形式：題號6

小雅首先將兩點（2,3）和（4,−2）帶入函數式，以求得兩點之 b 值，並推導出 b 值的範圍（圖 11)。並在訪談中陳述題目的題意和解題策略（行號 0602S)，此為**了解問題、擬定計畫、執行計畫**之歷程的展現。而在解題記錄中，研究者發現小雅雖能陳述解題目標，甚至成功推算出正確答案，但在觀察其解題記錄時，發現小雅對於海盜船之航線圖卻是畫錯的。小雅雖然善於利用程序性知識解題，但卻未對問題情境和已知條件做深入性的理解和判斷，也就是**了解問題**部分不夠深入。雖然經過訪談後小雅在重新畫上函數的圖形表徵後發現兩條航線是平行的(行號 0610S)，不過也證明了即使學生未能完全了解問題之所有概念，卻有可能正確地完成解題目標。

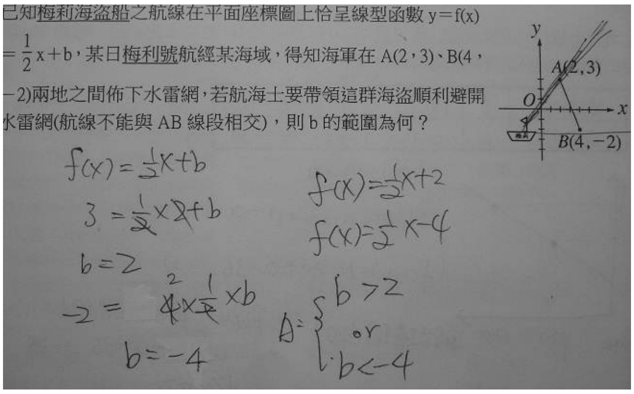


圖 11 第 6 題的原始解題記錄

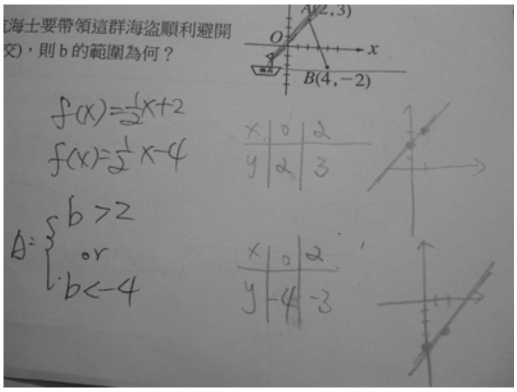


圖 12 第 6 題的訪談解題記錄

0601T：小雅，能否說說看這題題目在問什麼?

0602S：船一開始在這裡，如果要避開水雷，就要航行在 AB 線段之外，所以我把數字代進去後，在 2 和 4 之外就對了。

0603T：那你這兩條線代表什麼意思呢?

0604S：代表船只能走在這兩條路線之外。

0605T：那你有辦法證明這題是正確的嗎?

0606S：(沉思) 沒有辦法...

0607T：那你認為航線的圖形這樣畫是對的嗎?

0608S：是對的。

0609T：所以你可以試著畫畫看這兩個函數式的圖形嗎?

0610S：（作圖如圖 12）應該是平行才對，不過對答案應該沒影響。

為了節省篇幅，將以表四呈現小雅在引導式提問後，其解題歷程思維之改變。

表四：訪談後，小雅六題的解題歷程（粗體為有改變之處）

（表徵）題號	了解問題	擬定計畫	執行計畫	驗算回顧
（表列）1	完整呈現	**a. 利用函數圖形為水平線之概念** **b. 轉換成圖形表徵**	執行正確	**比對先備知識後後確認解題正確**
（表列）2	完整呈現	**a. 發現數值之規律** **b. 利用比例推理之策略**	執行正確	**比對原始答案後確認解題正確**
（表列）3	**比對第一題表徵轉換時的過程，發現原始解題中遺漏部分函數圖形，導致求函數式時產生錯誤**	a. 令 $f(x) = px+q$ b. 代入特定值	**執行正確**	訪談中未見
（圖形）4	完整呈現	**利用相似三角形邊長成比例之策略**	執行正確	**透過引導式提問後利用比率推理之策略驗算答案之合理性**
（圖形）5	完整呈現	**利用咖啡研磨速率不變之策略**	執行正確	**和原始答案後有異，發現在時間和數字的轉換上產生錯誤。**
（圖形）6	**理解題目中海盜船之航線為相互平行**	代入特定值	執行正確	訪談中未見

五、結論與建議

一、結論

本研究主要在探討小雅在線型函數應用問題的解題歷程，研究結論將就研究目的分成兩部分：（一）個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現。（二）個案學生於引導式的提問後是否具備驗算回顧的能力。

(一) 個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現：

１. 了解問題：小雅擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解略顯不足。

當題目給定之已知條件為小雅熟悉之訊息時，往往利用程序性知識去解決問題，在常數函數（第一題）和多邊形內角和（第二題）中，小雅僅透過表列提供之數值資訊即開始代入聯立方程式解題，卻忽略了題目之情境可運用先前學過之數學概念，例如第一題常數函數的值域皆為固定值，第二題多邊形內角和可透過邊長和度數和的關係更快達成解題目標。此外在海盜船一題（第六題）中，小雅熟練地將特定值代入函數式中，雖然答案正確，卻忽略了函數式之斜率固定，航線應為水平線之數學概念。此種結果和考試引導教學有關，考試往往只重視結果，卻忽略了學生對於題目的思考歷程，學生受到的訓練的就是快速、精準且制式的解出正確答案，小雅就曾表示線型函數的解法就是設立函數式 f(x)＝ax+b 後解聯立方程式，久而久之在解題時只關注題目中的數值，導致學生越來越著重在程序性知識的發展。

2. 擬定計畫：小雅在原始解題記錄中，對所有的題目皆採用單一種策略。

劉秋木（1996）就 Polya 的擬訂計畫階段提出幾項一般性的解題策略，包括:有價值的聯想、條件目的分析、應用算術式、應用代數式、畫圖、作資料表、簡化資料、尋找組型、猜測與檢核、發現關係、推理等十類。而蕭淑娟（2010）針對八年級學生處理線型函數情境問題指出，學生處理情境問題的解題策略區分成操作圖形物件、運用比例推理與解聯立方程式。相較之下，小雅於原始解題中所呈現的類型較為貧乏，但經由研究者在訪談給與小雅引導式的提問後，例如在行李託運題中利用比例推理之策略，小雅漸漸地能在別提（如咖啡研磨題）中應用此種策略。

3. 執行計畫：小雅對於解題中常需運用之計算能力極為熟練，但對於較少擬定之策略所需之計算執行力欠佳。

從小雅的解題計畫和訪談過程中可以發現，小雅對於程序性的計算解題相當優異，不管是解聯立方程式，比例推理的運算或者是一般的計算式，皆很少看到小雅出錯。此外不管是函數表徵方式的不同，也未能影響小雅執行計畫的正確性。例如在圖形表徵中，雖然三題題目之斜率分別為正值、負值和固定值，小雅皆能精確運算出函數式或求解特定值。但是在和概念性知識相關之計畫執行時，小雅的表現就略顯不足，例如在咖啡研磨題（第五題）中，小雅在時間和整數的轉換上就產生找錯基準點的錯誤，導致該題在最後執行時計算錯誤。

（二）個案學生於引導式的提問後在備驗算回顧階段的思維改變：

1. 訪談之前：小雅於原始解題記錄中，無法觀察出具備驗算或回顧的解題表現。

Polya 的解題理論中，「驗算與回顧」階段包含對答案的驗算、對過程的驗算、用別的方法推導出相同的結果、能否一眼看出答案、能否在別的問題上，應用這個結果與方法。而綜觀小雅在這六題情境問題的解題結果，發現僅在第一題常數函數能驗證答案的合理性，而第二題在研究者的要求下有重新驗算解題過程是否計算錯誤，其餘題目皆無驗算或回顧的表現，整體來說小雅在驗算回顧方面的能力是有待啟發的。

2. 訪談之後：在訪談中適時給予引導式的提問之下，逐能展現其驗算回顧的能力。

訪談中小雅曾表示以往課堂所學的舊經驗中，線型函數的數學式就是 $f(x)=ax+b$，所以當他看到題目中出現「線型函數」的關鍵字就會制式的設立函數式。此種先備知識往往容易影響學生解題時的策略決定，以及侷限解題後對答案合理性的驗證。小雅原先認為線型函數就是要利用程序性的設立方程式的方式解題，但卻忽略了針對不同的情境問題，可利用題目中所給定的條件加以組織出不同的解題策略。而在引導式提問的介入之下，喚起了小雅其他數學先備知識，例如在第二題多邊形內角和中，小雅在研究者提示觀察表格之間的規律後，隨即能將焦點關注在表列中自變數和應變數的關係，並發現每邊長每增加一邊，度數和就會增加 180 度；在第四題中藉由提示可利用圖形中之幾何

關係，小雅隨即畫出相似三角形之對應邊，再利用對應邊長成比例的概念驗算答案。甚至訪談至第五題時，小雅能將策略推展至咖啡研磨題，利用咖啡豆研磨的速率不變的概念發展出類似比例推理的策略，藉以驗證和回顧答案之正確性。

二、建議

在本研究中發現，小雅擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解略顯不足。即使像小雅數學成績這麼優秀的學生，仍在多數題目中利用程序性的聯立方程式解題，但卻未先對問題做深入性的理解再進行策略擬定，也就是「了解問題」部分不夠深入。建議教師在教學時間的允許之下，不要任由考試引導教學，或是利用公式代入來速算求解，而是陪著學生去了解每個情境、每個文句、每個圖形與每個表格所表徵的意義，其背後是否隱含學生不易發現的概念性知識，或是容易造成學生迷思的概念。

此外，在解題記錄中可以發現，小雅在解題後欠缺驗算或回顧的歷程，但在老師的引導和提問之下，小雅漸漸能修正其解題的策略。King在1989年提到，提問本身就是一種後設認知的歷程，具有反思的功能，學生藉此能活化其認知和理解。教師於平時教學時，不應直接向學生說明解題中的疏漏之處，而是藉由問題的引導，讓學習者能透過教師提醒某些訊息後而啟發靈感，進而修正學習的策略，達到認知的調整。

讓學生具備問題解決的能力，是數學課程教學的重要目的，更是教育部強調學校教育的目標，解線型函數應用問題之單元正是讓學生從許多個別問題的思考。教師在教學時，可試著嘗試透過了解問題，擬定計畫，執行計畫，驗算回顧成為形式化的問題解決機制，期使學生能將數學問題的解決能力，轉移成日常生活問題的解決能力。

參考文獻

張新仁（1989）：不同學科的認知歷程分析。*教育研究*，3，43-59。

劉秋木（1996）。*國小數學科教學研究*。台北：五南。

甯自強（1998）。涂景翰的數概念。*科學教育學刊*，6(3)，255-269。

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。台北市：教育部。

曹雅玲（2007）。提升兒童解決數學應用問題的能力。*國教新知*，54(4)，44-50。

國立編譯館主編（2010）。國民中學數學第二冊。台北市：國立編譯館。

教育部（2010）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。台北市：教育部。

蕭淑娟（2010）。八年級學生之解題策略分析，未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學，臺北。

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of function. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 521-544.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.) , *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 27-31.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 19-26. Hillsdale, NJ:Erlbaum.

King, A. (1989). Effects of self-questioning training on college student’s comprehension of lectures. *Contemporary Education on psychology, 14*, 366-381.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.

Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindguiet (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp.36). BC: Mc Cutchan.

Markovits, Z., Eylon B. A. , & Bruckheimer, M. (1986). Function today and yesterday. *For* *the Learning of Mathematics*,*6*(2) 1828.

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*(pp.123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.), New York: W. H. Freeman and Company.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles & standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (2006)。*怎樣解題*（蔡坤憲譯）。台北：天下文化。（原著出版於 1945）。