

## 職前中學數學教師的信念和知識的調查研究

黃興豐<sup>1,2</sup> 李士錡<sup>3</sup> 李業平<sup>4</sup>

1 東北師範大學 教育學博士後流動站 長春

2 常熟理工學院 數學與統計學院 常熟

3 華東師範大學 數學系 上海

4 德克薩斯農工大學 教學與文化系 德克薩斯

### 摘要

教師的信念和知識是近來引起許多研究者關注的熱點。本研究採用問卷調查的方式，對選自 8 所院校的 438 名職前中學數學教師進行了研究。研究發現：（1）儘管還有不少職前教師對課程標準的內容設置瞭解甚少，但是他們已經基本接受了課程標準所提倡的教學理念；（2）雖然職前教師已經學習了許多高等數學課程，但是似乎並沒有加深他們對中學數學內容的理解；（3）職前教師普遍缺乏學科教學知識。

**關鍵字：**職前中學數學教師；教師信念；高中數學課程標準；教學需要的數學知識

## 壹、研究背景

近來，中國學生在一些國際大型比較研究中的突出表現（Lapointe, Mead, & Askew, 1992; Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004; OECD, 2003），引起了許多研究者對中國數學課堂教學特徵的關注，他們試圖通過透視教師及其課堂尋找導致學生取得優秀成績的重要因素（e.g., Leung, 2001, 2005; Leung & Park, 2002）。那麼教師為了開展有效的數學教學，他們應該掌握哪些知識？中國數學教師在職前受到嚴格的數學訓練這是不爭的事實，一個通俗而流行的假設是“給學生一碗水，教師應當先有一桶水”。一般認為，這可以為未來的數學教師打好數學基礎，有利於發展他們未來的教學能力。那麼除了具備必須的數學知識之外，數學教師究竟還需要哪些額外的知識呢？Shulman（1987）認為教師不僅需要學科知識（subject matter knowledge），而且還需要學科教學知識（pedagogical content knowledge）和課程知識（curriculum knowledge）。目前，探究數學教師如何掌握和使用數學知識，引起了許多研究者的興趣，他們認為這是一個促進數學教師專業發展的有效途徑（e.g., Adler & Davis, 2006; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Li & Huang, 2008）。

當前新一輪的數學課程與教學改革，已成為中國數學教育改革的重點，這對職前教師教育提出了新的任務和要求（袁貴仁，2002）。2001年頒佈的義務教育階段數學課程標準，以及2003年頒佈的普通高中數學課程標準，不僅在內容上增加了新的知識模塊，而且要求教師轉變教學觀念——提倡學生操作、探究、合作、討論的學習方法（教育部，2001，2003）。為了更好地培養適應課程改革需要的職前數學教師，我們不得不思考和探索這樣一些問題：職前中學數學教師已經具備了哪些數學知識，達到了什麼程度？他們還需要發展哪些知識，如何培養？他們對新課程改革的瞭解程度如何，是否對從事數學教學的職前準備充滿信心等等（濮安山，史寧中，2009；張奠宙，1999）。

## 貳、研究框架

### 一、職前教師的信念

教師的信念，也可以稱為是他們的觀念，主要是指教師在教學過程中對一些問題的總的看法（李士錡，2001）。一些研究綜述表明教師的信念會直接影響他們的課堂教學（e.g., Conney & Wiegel, 2003；Thompson, 1992）。在本研究中，我們主要關注：（1）職前教師對教學準備的信念。事實上，教師的信念可以涉及很多方面，不過在此我們只

局限於他們對將來從事數學教學的自信心。Li & Klum (2008) 認為他們關於教學準備的信念主要是在大學課程的學習中逐漸建立和發展起來的。(2) 職前教師對數學教學的看法。比如對“學習數學主要需要記憶”的觀點，在教學中對待學生錯誤的態度等。

## 二、職前教師教學需要的數學知識

教師需要怎樣的知識，在過去的近 20 年裏，許多學者紛紛提出了各自不同的理論和框架 (e.g. 申繼亮, 李瓊, 2001; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Bromme, 1994; Cochran, DeRuiter, & King, 1993; Shulman, 1987)。由於教師的知識和認知 (cognition) 會影響教師教學的各個方面，如對課程的理解，對教科書的使用，以及對學生學習的看法等 (陳向明, 2003; Birman, Desimone, Portel, & Garet, 2001)，因此這也成為當前教師教育研究關注的焦點 (陳向明, 2009)。

Ball 和她的同事對數學教師需要的學科知識進行了具體化，並做了較為詳細的分類，稱為“教學需要的數學知識” (mathematics knowledge for teaching, 簡稱 MKT)。MKT 是指教師實施數學教學工作時所需要的數學知識，這裏的“教學工作”包括向學生解釋概念，分析學生的解題方法，判斷和糾正教科書的錯誤，在課堂中恰當地使用各種表徵，給學生提供例題、演算法或者證明 (Hill, Rowan, & Ball, 2005)。

Ball (2006) 首次把 MKT 分成兩大類：學科知識 (subject matter knowledge) 和學科教學知識 (pedagogical content knowledge)。學科知識又進一步分成一般的學科知識 (common content knowledge, 縮寫 CCK)、專門的學科知識 (specialized content knowledge, 縮寫 SCK) 以及橫向的數學知識 (knowledge at the mathematics horizon)。學科教學知識則可以分成學科與學生的知識 (knowledge of content and student, 縮寫 KCS)、學科與教學的知識 (knowledge of content and teaching, 縮寫 KCT) 和課程知識 (knowledge of curriculum)。儘管如此，Ball 只是對 CCK、SCK、KCS、KCT 進行了簡要的說明，並给出了一些例子，並沒有對其中“橫向的數學知識”和“課程知識”給予必要的說明。Ball 關於上述 MKT 的描述一直延續到 2008 年，尚未改變 (Hill, Ball, & Schilling, 2008)。後來，Ball, Thames, & Phelps (2008) 再把“knowledge at the mathematics horizon”改為“horizon content knowledge” (HCK)，並對 HCK 進行瞭解釋和說明；同時她們也把“knowledge of curriculum”改為“knowledge of content and curriculum (KCC)”，不過未對其進行必要的說明。直到 2011 年，我們才可以看到她介紹 KCC 的相關例子 (Ball, 2011)。根據上述文獻，這些概念以相關例子羅列在表 1。

表 1：教學需要的數學知識 (MKT)

<b>學科知識</b>	
一般的內容知識 (CCK)	教師和學生都應當掌握的數學知識。比如判斷“一種對應關係使得所有正數對應 1，所有負數對應-1，而 0 對應 3”是否構成函數關係。
專門的內容知識 (SCK)	是指教師為了教學而必須具備的一種獨特的數學知識。也就是說，教學需要的知識遠比教給學生的知識來的豐富，而且深刻，不僅有量的差別，更是存在質的差異。比如：當你教學二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 時，如果一學生問係數 $a$ , $b$ 和 $c$ 有何意義，你如何解答學生的疑問？
橫向的內容知識 (HCK)	是指彼此不同數學專題之間的聯結以及對具體數學專題在課程或者學科中地位的認識。比如：函數與方程有什麼聯繫？請具體說明。
<b>學科教學知識</b>	
內容與學生的知識 (KCS)	教師必須能估計學生可能的想法，可能遇到的困難。教師必須學會傾聽學生的解釋，領會學生各種尚不成熟的想法。比如：分析解釋學生理解函數概念可能出現的錯誤。
內容與教學的知識 (KCT)	聯合了關於數學和教學這兩個方面的知識。瞭解不同的數學方法和過程所能提供的教學意義。比如：描述一項可用來檢驗學生是否真正理解函數與方程之間關係的活動。
內容與課程的知識 (KCC)	與課程內容相關的知識。比如：對國家數學課程標準框架和內容的瞭解和認識，對課程改革提倡之教學理念和教學方法的掌握等。

根據 MKT 關於教師學科知識的分類，我們試圖選擇一個具體數學專題，設計問題，調查職前中學數學教師的數學教學知識。對於中學數學而言，函數知識是一個重要的組成部分，它與其他數學知識存在著重要的聯繫，如微積分、概率等。因此，在本研究中，將圍繞函數教學這個話題，瞭解中學數學教師的職前準備狀況。

## 參、研究問題

中國的職前中學數學教師在大學期間要學習許多高等數學課程和研究初等數學的課程。比如有“老三高”——高等代數，高等幾何，數學分析，和“新三高”——泛函分析、抽象代數、拓撲之說，還有初等代數研究，初等幾何研究等等。一般認為，這些抽象的數學課程可以訓練職前教師的數學思維，為他們打下紮實的數學基礎，將來可以居高臨下地從事中學數學教學。張奠宙教授指出“師範大學的教學則在瞭解知識的學術形態之後，還必需幫助學生掌握知識的教育形態，這種轉換是一種特殊的能力，需要加以培養”（張奠宙，1999）。也就是說，要培養數學教師善於把數學的“學術形態”轉化成“教育形態”的能力，這樣才能深入淺出地解釋數學概念，開展生動活潑的教學活動。很顯然，這樣的觀點和 Ball 等提出的教師需要 MKT 是不謀而合的。然而，很少有大規模的研究，去考察職前中學數學教師知識準備的現狀，瞭解他們對課程改革的認識程度，以及掌握 MKT 的情況。

為了順應經濟和社會的發展，從上世紀末開始，國家教育部開始著手對師範教育體制進行改革，打破了原有“三級”師範學校培養職前教師的體系，鼓勵綜合性大學也承擔培養職前教師的責任，逐步探索職前和職後教師一體化的培養模式 (e.g., Li, Huang, & Shin, 2008; Li, Zhao, Huang, & Ma, 2008)。為了瞭解現行職前中學數學教師教育培養的現狀，我們有必要對此展開深入的研究。

在本研究中，我們選擇函數教學作為考察職前中學數學教師的載體，主要出於以下兩點考慮：（1）函數在課程中的重要地位。函數的概念逐漸形成和產生於 16-17 世紀，並一直佔據著數學的核心地位。20 世紀以來，世界各國的中學數學內容也從以解方程為中心轉到以研究函數為中心（張奠宙，張廣祥，2006）。1908 年，Klein 首次提出中學數學應當以函數為中心（Kilpatrick, 1992）。20 世紀 50 年代，函數在中國中學數學課程中取得核心地位（課程教材研究所，2001）。（2）函數對於學生而言是一個比較困難的概念（Vinner, Dreyfus, 1989；Sajka, 2003），這對教師的教學而言可以看成是一種挑戰。

為此，我們試圖以函數教學這個話題為載體，根據前面的框架，調查職前教師對職前準備的信念，以及他們的 MKT：

（一）職前中學數學教師對他們的職前數學教學知識準備所持何種信念，他們對數學教學有何認識？

(二)對於中學函數教學的知識而言，職前教師掌握的程度如何？

## 肆、研究方法

### 一、研究物件

當前，全國的師範院校和一些綜合性大學共同承擔了職前中學數學教師培養的任務。比如在 2004 年的時候，全國已經有 400 多所大學承擔職前教師教育的任務，其中師範院校約 280 所。在選擇樣本的時候，我們兼顧了這兩類不同的院校。同時，我們也考慮了不同水準的高校，比如，國家重點大學（“985”工程<sup>□</sup>和“211”工程大學<sup>□</sup>）和一般地方院校（普通大學）。因為這些不同水準的高校對招收的學生有不同的標準，從不同水準的大學選擇職前教師作為研究對象，這樣可以代表更廣層面的職前教師群體。基於以上考慮，一共有 8 所師範或綜合性大學的 438 名職前中學數學教師參與了本項研究（詳見表 2），其中來自師範院校和綜合院校的人數之比約是 2.3:1，重點大學和普通大學的人數之比約為 1.1:1。438 名職前教師均是四年制本科在讀的高年級學生（大三、大四）。其中男生 172 人(39.27%)，女生 256 人(58.45%)，未填性別 10 人(2.28%)。

所有問卷的分發和回收都是請各被試院校的教師協助完成的。一共回收有效問卷 438 份。我們對問卷第一部分的結果，按照不同的學校進行了統計分析；對問卷的第二部分的結果，首先進行編碼，然後按照編碼進行分析。

---

① 985 工程是中國中央政府為建設若干所世界一流大學和一批國際知名的高水準研究型大學而實施的建設工程。1998 年 5 月 4 日，江澤民在慶祝北京大學建校一百周年大會上提出：“為了實現現代化，我國要有若干所具有世界先進水準的一流大學。”由此，中國教育部決定在實施《面向 21 世紀教育振興行動計畫》中，重點支援國內部分高校創建世界一流大學和高水準大學，並以江澤民在北京大學 100 周年校慶的講話時間（1998 年 5 月）命名為：“985 工程”。先後有 30 所大學以建設“國際知名大學”為目標加入該工程。

② 211 工程是中國中央政府在 1990 年代中開始策劃和實行的、針對中國高等教育的一項戰略性政策。“211”的含義是“21 世紀的 100 所重點大學”。211 工程的目的是在於將中國的高等學校系統化。隨著工程的實施，許多過去被國家其他部門管轄的高等院校被納入教育部的管轄範圍，許多高校被合併，從全中國各地挑選出的約 100 個高等學校被設立為重點高校，這些學校在資金中獲得優先對待。

表 2：參與研究的職前教師來源

院校	類別	人數
<b>“985”大學</b>		
A	師範院校	97 (大三 59, 大四 38)
B	師範院校	82 (大三)
<b>“211”大學</b>		
C	綜合院校	50 (大四)
<b>普通大學</b>		
D	綜合院校	34 (大三)
E	師範院校	48 (大三 29, 大四 19)
F	綜合院校	40 (大四)
G	師範院校	38 (大四)
H	師範院校	49 (大四)

## 二、研究工具與資料分析

本研究採用的調查問卷一共分成兩個部分。第一部分共 4 題，調查職前教師對於高中數學課程的瞭解程度 (KCC)、數學教學準備的自信心，以及對數學教學的看法。這些問題參考了 Li & Huang (2008) 的研究，他們聲稱這些問題選自 TIMSS 2003 (Trends in International Mathematics and Science Study) 的背景調查問卷。第二部分一共有 3 個與函數教學相關的數學問題，其中有的還包括 2-3 個子問題分別評價職前教師 MKT 的不同方面。這些問題主要參考了 Even (1990, 1993) 的研究。按照 MKT 對內容知識的分類，下面的測試題對應了其中的各個部分：5a 是瞭解職前教師對函數概念的掌握程度 (CCK)，5b 是瞭解他們對學生關於函數知識的掌握情況，看他們是否能認識到學生產生錯誤的原因 (KCS)。6a 是調查職前教師是否正確掌握函數和方程的聯繫 (HCK)，6b、7 兩個問題調查的是教師需要掌握的專門化知識 (SCK)。6c 是瞭解教師針對具體數學問題，設計教學過程的知識 (SCT)。問卷的測試題詳見附錄。

表三：數學教師的信念和知識問卷測試題的構成

數學教師的信念和知識		測試題
信念	教學準備的自信心	3
	對數學教學的看法	4
SMK	對函數概念的掌握 (CCK)	5a
	對函數和方程聯繫的掌握 (HCK)	6a
	對函數問題的解釋 (SCK)	6b、7
PCK	對高中數學課程的瞭解 (KCC)	1、2
	對學生錯誤原因的診斷 (KCS)	5b
	對函數與方程的教學設計 (SCT)	6c

## 伍、研究結果

### 一、職前中學數學教師的信念

#### (一)高中數學課程標準的理解

68.72%的職前教師自我評價他們對高中數學課程標準的理解是“有限”的，10.50%甚至選擇了“低”，只有 18.95%和 1.37%的人分別選擇了“高”和“精通”。

為了進一步瞭解職前教師對高中數學課程標準的瞭解程度，我們列舉了一些常見的課題，請他們判斷數學課程的設置狀況。從表 3 的資料來看，判斷正確人數超過 50%的只有三個課題。這表明職前教師對高中數學課程標準的瞭解程度還是很有限的，這與他們對課程瞭解程度的自我評價相一致

表 3：職前教師在課題上的判斷

課題	正確判斷的人數 (%) <sup>*</sup>
集合與函數概念	67.88
直線方程	16.73
冪函數	63.17
演算法初步	20.06
矩陣與變換	50.16
函數與一元二次方程	41.18
用文字和模型等多種方式來描述、解釋複合函數	16.66

<sup>\*</sup>判斷正確是指判斷結果與國家課程標準內容（教育部，2003）的設置相一致。



## (二)職前準備的評價

從表 4 的資料可以看到，儘管許多職前教師對職前準備充滿信心，但是還是有不少職前教師感覺到在某些具體課題上，自身的教學準備還不夠。例如，近 31% 的人對“概率與統計”的教學準備沒有信心。有趣的是，當問及對代數教學是否作好了準備時，90% 以上的職前教師認為已經做好了準備或充分準備。但是，當對此問得更加具體一些的時候（比如“用不同的方式來表示、解釋基本初等函數概念”），認為做好準備的人數開始明顯下降。這也從側面反映了一部分職前教師的確對數學教學準備缺乏信心。

表 4：職前中學數學教師對教學準備的評價

課題	準備非常充分 (%)	有準備 (%)	沒有準備好 (%)
代數	37.22	54.79	7.76
代數 1	21.23	57.76	20.55
代數 2	24.66	54.11	21.00
代數 3	19.18	55.02	25.34
平面幾何	26.71	60.27	13.01
立體幾何	19.18	52.97	27.17
概率與統計	15.30	53.88	30.59

代數 1=用不同的方式來表示、解釋基本初等函數概念

代數 2=相關內容和概念之間的內在聯繫

代數 3=學生在理解一些重要代數概念時常見的錯誤

## (三)對數學教學的看法

第 4 個測試題可以幫助我們瞭解職前教師對數學教學的不同看法：其中 (i)、(ii)、(iv)、(v) 和 (ix) 涉及數學教學觀；(iii)、(vii) 涉及數學學習觀；(vi)、(viii) 涉及教師的數學觀。絕大多數的職前教師持有以下積極的數學教學觀：(1) 在數學教學中應該使用不止一種的表達方法（如，圖、具體材料、符號等）；(2) 動手操作和使用教具可以幫助學生避免抽象的數學；(3) 在某個數學主題的教學中教師需要知道學生常見的錯誤觀念/困難；(4) 在數學教學中將現實問題模型化是一個基本的環節。他們也同時持有如下的數學觀：(1) 解決數學問題的過程經常包括假設、估算、試驗和修正結論的；(2) 大多數數學問題都可用不同方法來解。這些觀念與課程改革所提倡的保持一致。這表明，儘管他們對課程標準的具體設置知之甚少，但是職前教師已經基本接受了課程改革的理念，這對於他們今後從事教學實踐具有重要的意義。

另一方面，還是有不少的職前教師持有這樣的數學學習觀：（1）有近 40%的職前教師贊同在“把數學當成能夠包含所有可能的演算法或者規則來學”這個觀點。（2）近 20%的職前教師贊同“學習數學主要需要記憶”的觀點。同時近 30%的職前教師贊同在學習過程中“教師應當防止學生犯錯誤”。

這也許是受到了他們自身的數學學習經歷和我國教學傳統的影響，而且在很大程度上取決於學校教授數學的方式。我國的數學教學傳統歷來強調記憶，認為牢固的記憶可以通向理解。有經驗的老師常常會借助口訣來幫助學生記憶數學公式或規則（李士錡，代欣，2009）。這一點又恰如其分地體現在數學“雙基”教學目標中，為了獲得運算的速度和準確程度，強調記住演算法，熟悉解題的套路，記住最基本的解題方法（張奠宙，李士錡，唐瑞芬，2005）。這些都會促使學習者形成強調記憶、把數學當作演算法和規則的態度。“防止學生犯錯誤”這也是中國傳統教學所關注的一點。比如，在講授新概念時，應當講深講透，目的之一就是防止學生產生片面或者錯誤的理解。這和《學記》上所說“禁於未發之謂豫，……，發然後禁，則地格而不勝”是一脈相承的。

## 二、中學職前數學教師教學需要的數學知識：函數

考慮到前面已經調查了職前教師在代數教學三個方面的自我評價。在問卷的第 2 部分，有意設計了：“用不同的方式來表示、解釋基本初等函數概念”（第 5a, 6b, 7 題），“相關內容和概念之間的內在聯繫”（第 6a 題），以及“學生在理解一些重要代數概念時常見的錯誤”（第 5b 題）這三個方面，來檢視學生的自我評價。下面利用 MKT 的框架，按照學科知識和學科教學知識分開呈現職前教師在這兩個方面的表現。

### （一）職前教師的數學學科知識

#### （1）函數關係的表示方式

大部分職前教師對常見的函數表示方式可以作出正確的判斷（詳見圖 1），如在用圖像表示的函數關係(i)上的正確率為 82.42%，常函數(ii) 上的正確率為 78.08%，分段函數(iv) 上的正確率為 81.96%，以及在(v) 上的正確率為 82.42%。但是在(iii)和(vi)上，相當多的職前教師判斷出現了錯誤，錯誤率分別是 34.93%、55.02%。從職前教師給出的理由來看，對於(iii)，他們混淆了“對應”與“映射”的概念。對於(vi)，他們只把它看成是一個集合，沒有認識到函數的“關係說”定義（張奠宙，張廣祥，2006）。

在 6b 中，請職前教師判斷是否所有的函數都可以用代數運算式或公式表示，並要求具體說明。其中作出正確判斷的有 71.69%，但是進行合理解釋的只有 18.95%。儘管

有比較多的職前教師認為並非所有的函數都可以由代數運算式或公式來表示，但是 40.41% 的人在具體解釋說明時出現了錯誤。比如，例舉日常生活中沒有變化規律的現象：“1998 年某月內每天的最高溫度不能用代數式表示，因為沒有規律。” 比如，指出有限集合之間的映射未必可以用公式表示： $A=\{1,2,3,4\}$ ， $B=\{3,2,7,8\}$ ，從 A 到 B 的對應法則  $f:1\rightarrow3, 2\rightarrow2, 3\rightarrow7, 4\rightarrow2$ 。事實上，定義在有限集合之間的離散型函數，都可以利用插值多項式表示出來。其餘的人一般通過具體的例子，做出合理解釋。比如舉出正確的反例——狄利克雷 (Dirichlet) 函數，黎曼 (Riemann) 函數等。比如畫出表示函數關係的無規律的連續曲線——某天的氣溫變化圖，某天的股指漲幅圖。

### (2) 二次函數的表示

第 7 題考查職前教師對二次函數解析式  $y = ax^2 + bx + c$  中係數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  意義的解釋。從表 5 的統計資料來看，只有 16.21% 的職前教師指出  $a$  的絕對值大小確定對應拋物線開口大小的數學意義。其餘  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的數學意義也有一半左右的人給出瞭解釋。

表 5：職前教師對二次函數係數的解釋

二次函數係數	數學意義	人數 (%)
$a$	符號確定拋物線的開口方向	53.20
	絕對值確定拋物線的開口大小	16.21
$b$	與 $a$ 共同決定拋物線的對稱軸	48.63
$c$	拋物線在 $y$ 軸上的截距	52.28

### (3) 函數與方程的聯繫

在第 6a 中在描述聯繫的時候，64.41% 職前教師給出了許多關於函數與方程區別與聯繫的不同描述，詳見表 6。其中，方程可以看成是（或可以寫成）函數的形式，或者把函數看成是（或可以寫成）方程的形式，這些觀點都是不正確的。比如，上面提到的狄利克雷函數，黎曼函數就不好用方程來表示；同樣圓方程、橢圓方程也不好表示一個函數關係。只有 13.27% 的職前教師認識到了函數圖像與方程之間的聯繫。例如，G19（表示 G 大學編號為 19 的職前教師）寫道：

函數與方程是相互聯繫的，在一定條件下，它們之間可以互相轉化。如解方程法  $f(x)=0$  就是求函數  $y=f(x)$  圖像的零點，方程  $f(x)=g(x)$  的解就是函數  $y=f(x)$  與  $y=g(x)$  的圖像的交點橫坐標的值相等。函數在於揭示問題的變量的動態研究，方程是研究等量關係。

還有 24.09%的職前教師僅僅描述了函數或者方程的特點，未能把兩者聯繫起來：方程表示相等（2.65%），方程含有未知數（7.44%），函數表示對應（5.49%），函數含有變量（4.25%），函數有定義域和值域（0.53%），以及其他的說法（3.72%）。

表 6：職前教師關於函數與方程關係的描述

函數與方程的聯繫	人數 (%)
1、方程是特殊的函數。	13.81
2、函數 $f(x)$ 圖像與 x 軸的交點對應方程 $f(x)=0$ 的解。	13.27
3、函數可以由方程來表示。	12.21
4、方程和函數可以相互轉化。	4.60
5、方程和函數都是刻畫現實世界的數學模型。	3.89
6、函數都可以由方程來表示，但反之不然。	3.72
7、函數的變量、應變量與方程的一組解一一對應。	3.01
8、在一定情況下，方程和函數可以相互轉化。	2.12
9、函數表示對應唯一，而方程不要求。	1.59
10、函數和方程是動態和靜態的，整體和局部的關係。	1.59
11、函數不一定是方程。	1.42
12、方程都可以寫成函數的形式，反之則不然。	1.06
13、函數中的兩個未知量地位不同，方程中的兩個未知量地位相同。	0.88
14、方程不一定是函數，函數也不一定是方程。	0.71
15、方程不一定是函數。	0.53

調查的結果顯示，儘管職前教師在大學期間已經學習了許多高等數學課程和初等數學研究的課程，但是並沒有像大家想像得那樣，他們都能“居高臨下”地準確理解和合理地解釋中學數學知識。這和最近另一項研究的結果也是相一致（黃興豐，李士錡，龔玲梅，湯炳興，2009）。這對於職前教師培訓的課程改革是一個重要的資訊。職前數學教師所學習的高等數學課程應當有別於其他專業的數學課程，應當強調高等數學知識與初等數學知識的銜接，應當關注通過高等數學知識的學習，加深職前教師對初等數學知識的理解。

## (二)職前教師的學科教學知識

### (1) 設計教學活動，考察學生理解“函數與方程的關係”

在本研究的 438 名職前教師中，只有 59 人（13.47%）給出了符合測試題（6c）要求的回答。他們設計的活動大體可以分成 5 種：①利用函數圖像解方程（16 人）。比如，

讓學生在同一坐標系內畫出  $f(x)=x^2-2x$  和  $g(x)=x$  的圖像，讓他們根據圖像求出  $x^2-3x=0$  的根 (E48)。②求函數的零點 (31 人)。比如，求  $y=3x^2+7x+2$  與  $x$  軸的交點 (A9)。③給定函數值，求對應的  $x$  值 (7 人)。比如，令  $y=x^2+x+1$  中的  $y$  等於 8，求方程的解 (C47)。④使用二分法求方程近似解 (4 人)。比如，求方程  $2\ln x=x$  的近似解 (F39)。⑤一元二次方程根的分佈 (1 人)。若方程  $ax^2+2x+3=0$  在  $[-1,1]$  上有兩個不相等的根，求  $a$  的取值範圍 (G9)。而且她還說明瞭設計的意圖：此題主要是將其轉化為函數  $y=ax^2+2x+3$  的兩個零點在  $[-1,1]$  上，然後再用二次函數 ( $a \neq 0$ ) 的性質來進行判斷。

## (2) 分析學生錯誤判斷函數關係的原因

在測試題 6b 中，只有 25.75% 的職前教師對學生錯誤判斷函數關係的原因作了具體的解釋。他們認為學生出錯的具體原因主要有以下各類：認為函數只能一一對應 (36 人)；缺乏對分段函數和常數函數的認識 (33 人)；沒有理解函數概念中的關鍵字，如“任意”、“唯一”等 (28 人)；認為函數圖像一定是連續的 (20 人)；不理解函數和圖像的關係 (12 人)；不理解函數的定義域和值域 (12 人)；認為函數一定要有解析式 (8 人)，認為函數解析式一定要帶有變量  $x$  (7 人)。另外 52.91% 的職前教師只是很籠統地解釋說“沒有理解函數的概念”或者是“函數概念太抽象”。

這些資料表明，絕大多數職前教師對學科教學知識很陌生，他們既不知道如何設計教學活動，也不瞭解學生是如何理解 (誤解) 具體數學概念的。這是當前職前教師培訓者必須認真思考和亟待解決的問題：需要採取哪些改革措施？採取什麼教學方式？可利用的途徑有哪些？這些都是職前教師培訓者和決策者面臨的嚴峻挑戰。

## 陸、總結與討論

在本研究中，我們調查了來自全國 8 所院校的 438 名職前中學數學教師，研究發現職前中學數學教師的信念和知識呈現了比較複雜的狀況。首先，職前教師對高中數學課程標準的內容設置瞭解不多，這和他們的自我評價是相吻合的。儘管如此，他們已經基本接受了課程標準所提倡的教學理念，這對他們今後從事教學實踐具有重要的現實意義。其次，我們也看到似乎職前教師，並沒有大家想像得那樣能“居高臨下”地理解和解釋中學數學知識。特別是，他們的學科教學知識相當匱乏。

事實上，數學教師既要掌握學科知識，還要掌握學科教學知識，必須有能力將自己所理解的知識轉化為與學生的能力、興趣和經驗相關的知識形態，從而以一種最有利於

學生學習的方式開展教學。這種能力取決於諸多方面：對學科的認識和理解、對學科的態度和信心、教與學的知識，以及自身的學習經驗、學習目的和風格（Allebone & Davies, 2000）。

那麼，哪些途徑可以有效促進教師知識的發展呢？範良火（2003）來自美國的研究表明：數學教師的教學知識，主要是通過自身的教學經歷和反思、和同行日常交流以及職後的培訓獲得的，和職前教育的關係相對不大。這從一個側面說明瞭美國職前教師教育所存在的不足和問題。本研究的結果直接表明了我國當前師範教育類似的狀況，教師的職前教育似乎也沒有給予他們即將從事教學的充分準備。黃榮金和李業平（2008）的研究也間接地揭示了這一點。在他們的研究中，所有受訪者都不滿意當前的師範教育，認為所學的高等數學知識與初等數學知識之間缺乏聯繫，教育理論與實踐嚴重脫節，無論是學科知識還是教學法知識的準備都是不充分的，同時所有受訪者都強調了中學實習和觀摩在師範教育中的重要性。

為了改變這種現狀，調整職前教師的課程設置和教學方式應該是當務之急。如何把高等數學和初等數學知識相互聯繫起來，讓高等數學的知識真正起到居高臨下的作用？如何在培養方案中把教育教學理論和中小學實踐緊密聯繫起來，真正把理論與實踐相結合？這些都是職前教師教育中面對一直尚未解決的老問題。

## 參考文獻

- 陳向明 (2003)。實踐性知識：教師專業發展的知識基礎。《北京大學教育評論》，1(1)，104-112。
- 陳向明 (2009)。教師實踐性知識研究的知識論基礎。《教育學報》，5(2)，47-55。
- 範良火 (2003)。《教師教學知識發展研究》。上海：華東師範大學出版社。
- 黃榮金、李業平 (2008)。中國在職數學教師專業發展的挑戰與機遇。《數學教育學報》，17(3)，32-40。
- 黃興豐、李士錡 (2006)。數學課堂：教師的觀念與實踐。《數學教育學報》，15, 3, 38-40。
- 黃興豐、李士錡、龔玲梅、湯炳興 (2009)。職前中學教師學科知識的調查研究，《數學通報》，增刊，124-131。
- 教育部 (2001)。《全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）》。北京：北京師範大學出版社。
- 教育部 (2003)。《普通高中數學課程標準（實驗）》。北京：人民教育出版社。
- 課程教材研究所 (2001)。《20世紀中國中小學課程標準、教學大綱彙編（數學卷）》。北京：人民教育出版社。
- 李士錡 (2001)。PME：數學教育心理。上海：華東師範大學出版社。
- 李士錡、代欣 (2009)。中國傳統文化與數學教育，載于王建盤（主編）。《中國數學教育：傳統與現實》(pp. 1-29)。南京：江蘇教育出版社。
- 李業平、黃榮金 (2009)。從國際比較研究的視角來看中國職前數學教師教育。《浙江教育學院學報》，1，37-44。
- 申繼亮、李瓊 (2001)。小學數學教師的教學專長：對教師職業知識特點的研究。《教育研究》，7，61-65。
- 袁貴仁 (2002)。高等師範院校要把基礎教育課程改革納入教育科學研究內容。《西南大學學報（人文社會科學版）》，28(6)，5。
- 濮安山、史寧中 (2009)。新課程背景下的高等師範院校數學教育類課程的變革。《黑龍江高教研究》，185(9)，177-179。
- 張奠宙 (1999)。高師數學系改革的若干設想。《數學教育學報》，8(1)，1-2。
- 張奠宙、李士錡、唐瑞芬 (2005)。中國大陸的“雙基”數學教學。載於範良火、黃毅英、蔡金法、李士錡（主編），《華人如何學習數學》(pp. 153-169)。南京：江蘇教

育出版社。

張奠宙、張廣祥 (2006)。 *中學代數研究*。北京：高等教育出版社。

- Allebone, B., & Davies, D. (2000). Developing subject knowledge, In S. Herne, J. Jessel, & J. Griffiths (Eds), *Study to Teach: A Guide to Studying in Teacher Education* (pp. 56-69). London: Routledge. Hobson.
- Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Ball, D. L. (2011). What do math teachers need to know? Retrieved from <http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/index.html>.
- Birman, B. F., Desimone, L., Portel, A. C., & Garet, M. S. (2000). Designing professional development that works. *Educational Leadership*, 57(8), 28-33.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., and King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: an integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, 44(4), 263-272.
- Cooney, T., & Wiegel, H. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A. J. Bishop; M. A. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 795-828). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6): 521-544.
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2): 94-116.
- Hill, H. C. Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371-406.
- Kilpartrick, J. (1992). America is likewise bestirring herself: A century of mathematics



- education as viewed from the United States. In I. Wirszup and R. Streit (Ed.), *Developments in School Mathematics Education around the World* (Vol. 3, pp. 133-145), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lapointe, A. E., Mead, N. A., & Askew, J. M. (1992). *Learning mathematics*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Leung, F.K.S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* 60, 199–215.
- Leung, F.K.S. (2005). Some Characteristics of East Asian Mathematics Classrooms Based on Data from the TIMSS 1999 Video Study, *Educational Studies in Mathematics* 47, 35–51.
- Leung, F.K.S., & Park, K.M. (2002). Competent students, competent teachers? *International Journal of Educational Research* 37, 113–129.
- Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: the case of fraction division, *ZDM-the international journal on mathematics education*, 40, 845-859.
- Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division, *ZDM-the international journal on mathematics education*, 40, 833-843.
- Li, Y., Zhao, D., Huang, R., & Ma, Y. (2008). Mathematical preparation of elementary teachers in China: Changes and issues. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 417-430.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- OECD (2003). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2000*. Paris: organization for economic co-operation and development.
- RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Towards a strategic development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND Corporation MR-1643.0-OERI.
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229-254.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard*

*Educational Review*, 57, 1–22.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. B. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

U.S. Department of Education. (2000). *Before it's too late: A report to the nation from the national commission on mathematics and science teaching for the 21<sup>st</sup> century*. Washington, DC:Author.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

## 附錄

### 職前中學數學教師數學知識調查問卷

(本調查中的國家數學課程標準，是指九年制義務教育和高中數學課程標準)

1. 您如何評價自己對國家數學課程標準理解的程度? ( )  
(a) 精通      (b) 高      (c) 有限      (d) 低
  
2. 下面列舉了一些中學數學中常見的課題，請選擇以下能夠最好描述中學生是否學習該課題的選項，並填到相應課題的括弧內。
  - (a) 主要在高一年級之前講授
  - (b) 主要在高一年級講授
  - (c) 在高一年級沒有教或者只是在高一年級介紹
  - (d) 國家數學課程標準中沒有
  - (e) 不確定

( ) 集合與函數概念  
( ) 直線方程  
( ) 冪函數  
( ) 演算法初步  
( ) 矩陣與變換  
( ) 函數與一元二次方程  
( ) 用文字和模型等多種方式來描述、解釋複合函數
  
3. 基於您在數學和教學上的經歷和所受的訓練，您認為自己在什麼程度上為教中學數學及下列一些特定課題已準備就緒？
  - (a) 準備非常充分      (b) 有準備      (c) 沒有準備好

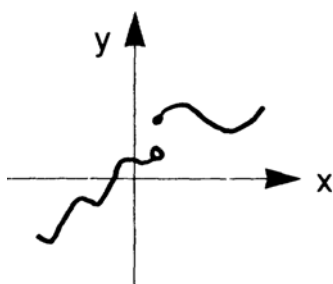
( ) 代數      ( ) 平面幾何      ( ) 立體幾何      ( ) 概率與統計  
( ) 代數 – 用不同的方式來表示、解釋基本初等函數概念  
( ) 代數 – 相關內容和概念之間的內在聯繫  
( ) 代數 – 學生在理解一些重要代數概念時常見的錯誤
  
4. 您在多大程度上同意或者不同意下面的陳述？
  - (a) 非常同意      (b) 同意      (c) 不同意      (d) 非常不同意

(i) ( ) 在數學教學中應該使用不止一種的表達方法(如，圖、具體材料、符號等)  
(ii) ( ) 動手操作和使用教具可以幫助學生避免抽象的數學  
(iii) ( ) 應該把數學當成能夠包含所有可能的演算法或者規則來學  
(iv) ( ) 在某個數學主題的教學中教師需要知道學生常見的錯誤觀念/困難  
(v) ( ) 在學生學習數學的過程中，教師應當防止學生犯錯誤

- (vi) ( ) 解決數學問題的過程經常包括假設、估算、試驗和修正結論的
- (vii) ( ) 學習數學主要需要記憶
- (viii) ( ) 大多數數學問題都可用不同方法來解
- (ix) ( ) 在數學教學中將現實問題模型化是一個基本的環節

5. 一位學生認為下列六種關係表示的都是非函數關係 ( $R$  是實數集,  $N$  是自然數集).

(i)



(ii)  $f: R \rightarrow R, f(x) = 4$

(iii)  $g: N \rightarrow R$

(iv) 一種對應關係使得所有正數對應 1, 所有負數對應 -1, 而 0 對應 3.

(v) 當  $x$  是有理數時,  $g(x) = x$ , 當  $x$  是無理數時,  $g(x) = 0$ .

(vi)  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 9)\}$

a) 對上述每種關係判斷學生回答的正確性, 並給出理由。

- (i) 正確/錯誤, 因為:
- (ii) 正確/錯誤, 因為:
- (iii) 正確/錯誤, 因為:
- (iv) 正確/錯誤, 因為:
- (v) 正確/錯誤, 因為:
- (vi) 正確/錯誤, 因為:

b) 對那些學生判斷錯誤的關係, 請分析解釋學生可能的錯誤原因。

c) 許多學生認為 (vi) 不過是一些點的集合, 不是函數。也有學生認為它不是函數, 因為如果是函數的話, 3 應該對應 6。你認為學生的這些觀點是否正確? 為什麼?

6. a) 函數與方程有什麼聯繫? 請具體說明。

b) 是否所有的函數都可以用代數運算式或公式來表示? 請解釋或舉例說明。

c) 描述一項可用來檢驗學生是否真正理解函數與方程之間關係的活動。

7. 對線性函數  $y = kx + m$  來說, 我們知道  $k$  是斜率, 而  $m$  是截距。當你教學二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  時, 如果一學生問係數  $a, b$  和  $c$  有何意義, 你如何解答學生的疑問?